

# Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

4 LUGLIO 2006

**!! Tempo a disposizione 2h e 30'.**

**Esercizio 1 (12 punti).** Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(|x|) - |x| + \log(1 + x^2)$$

discutendone campo d'esistenza, segno, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi (non è richiesta la determinazione esplicita degli zeri di  $f$ ). Dire se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ . Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

**Esercizio 2 (8 punti).** Giustificare l'invertibilità della funzione

$$y = f(x) = \arctan\left(\frac{x + x^2}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Indicata quindi con  $x = g(y)$  la sua funzione inversa, determinarne il dominio e lo spazio immagine. Posto  $y_0 := f(1)$ , calcolare infine  $g'(y_0)$ .

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

**Esercizio 3 (6 punti).** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2t - 1 \\ x(0) = x'(0) = 1. \end{cases}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

**Esercizio 4 (6 punti).** Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{2^n n},$$

determinare gli insiemi dei valori di  $\alpha$  tali per cui la serie rispettivamente converge assolutamente, converge semplicemente, diverge, oscilla.

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

**Esercizio 5 (6 punti).** Calcolare

$$D \arctan(x^2 - 1), \quad \int \frac{x}{1 + (x^2 - 1)^2} dx$$

e

$$D2^{x^2-x}, \quad \int (2x - 1)2^{x^2-x} dx.$$