

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

20 SETTEMBRE 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = x + 2 \arctan(1 - x)$$

discutendone campo d'esistenza, segno (non è richiesta la determinazione esplicita degli zeri di f), limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x^2 - 2x + 2}{\sin^2(x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \log x - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1 - \cos x}.$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 3 (6 punti). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\frac{y}{t} + t \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 4 (8 punti). Determinare il parametro α in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 2\alpha(x + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

sia continua in \mathbb{R} . La funzione ottenuta è anche derivabile in \mathbb{R} ?

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 5 (4 punti). Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.