Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

9 Febbraio 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log\left((x+1)^4\right)$$

discutendone campo d'esistenza, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione e dall'asse x e posta a sinistra della retta $x = 1$.

▫ ▫ ▫ ▫ □ ▫ ▫ ▫ ▫

Esercizio 2 (8 punti). Determinare il parametro α in modo tale che la funzione

$$y(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x-2}\right) & \forall\, x > 2 \\ x - \alpha & \forall\, x \leq 2 \end{cases}$$

sia continua in tutto $\mathbb{R}$. Determinare lo spazio immagine I della funzione $y(x)$ ottenuta. Tale funzione $y : \mathbb{R} \to I$ è invertibile? Inoltre, y è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

▫ ▫ ▫ ▫ □ ▫ ▫ ▫ ▫

Esercizio 3 (9 punti). Date le seguenti funzioni, calcolare $f'(0)$:

$$f(x) = \frac{(x+5)(e^{5x}-1)}{x^5+1}, \qquad f(x) = \exp\left(\frac{1}{1-\log(1+4x)}\right),$$

$$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(6x + \frac{\pi}{4}\right)\int_{-1}^{x}(6t+1)\,dt.$$

▫ ▫ ▫ ▫ □ ▫ ▫ ▫ ▫

Esercizio 4 (9 punti). Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

$$a_n = n^3 \sin^2\frac{1}{n}, \qquad a_n = \sum_{k=3}^{n}(\log k^3)\log\left(1+\frac{1}{k}\right), \qquad a_n = \frac{\log(2^n-1)}{2^n}.$$