

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

20 SETTEMBRE 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = x - 5 \arctan(x + 1)$$

discutendone campo d'esistenza, segno (non è richiesta la determinazione esplicita degli zeri di f), limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x+1)^3 - 3x}{\sin^3 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - (x+1) \log x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\sin^2 x}{x}}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 3 (6 punti). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\frac{y}{t} + t \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 4 (8 punti). Determinare il parametro α in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{4x}-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ (x+\alpha)^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

sia continua in \mathbb{R} . La funzione ottenuta è anche derivabile in \mathbb{R} ?

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 5 (4 punti). Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{1}{n}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.