Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Note sulle Equazioni Differenziali

Giulio Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata 1, 27100 – PAVIA

E-mail: `giulio@dimat.unipv.it`

Homepage: `http://www-dimat.unipv.it/~giulio/istmat04.html`

Versione del **14 gennaio 2005**

0.1 Introduzione

Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$. Denotiamo con t la variabile in I e diamole il significato di "variabile tempo; indichiamo invece con x la variabile in J e interpretiamola come "posizione di un punto all'interno del segmento J. Molto spesso, si ha a che fare con una "legge oraria del moto, ossia con una funzione sufficientemente regolare $x : I \to J$, $x = x(t)$, la quale descrive la posizione del punto x in J al tempo $t \in I$. Ad esempio, il segmento J potrebbe essere pensato congiungere Milano e Pavia e il nostro punto x potrebbe rappresentare un'automobile che percorre la distanza indicata da J nel tempo di un'ora. Intendendo che le nostre unità di misura siano le ore per il tempo e i chilometri per la distanza percorsa, possiamo allora porre $I = [0, 1]$ e $J = [0, 40]$. Infine, possiamo pensare che la nostra macchina parta da Milano, la cui posizione è indicata dal primo estremo $x_0 = 0$ di J al tempo $t_0 = 0$ quando facciamo scattare il cronometro. Possiamo allora chiamare $t_0 = 0$ *tempo iniziale* e $x_0 = 0$ *posizione iniziale*. La coppia (t_0, x_0), uguale in questo caso a $(0, 0)$, prende di solito il nome di *condizione iniziale* o *dato iniziale*.

Partendo da una tale situazione fisica, nel caso in cui la x sia una funzione nota di t e sia derivabile in I (come accade nei casi concreti), allora la sua derivata prima $x'(t)$ rappresenta la velocità del punto materiale, espressa, nelle unità di misura scelte, in chilometri orari. Può però succedere che la funzione x non sia nota a priori, ma debba essere determinata a partire dalla conoscenza di altri dati. Un caso tipico in cui questo accade, è quando è invece nota la velocità, che potrebbe essere stata misurata da un contachilometri capace di memorizzarla per tutti i valori del tempo t. In questo caso, detta $f : I \to \mathbb{R}$ la velocità misurata dal contachilometri, noi possiamo risalire alla posizione $x(t)$ semplicemente osservando che, se

$$x'(t) = f(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{0.1}$$

allora, grazie alla formula fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, \mathrm{d}s. \tag{0.2}$$

Il semplice problema che abbiamo analizzato merita un certo numero di commenti. Nella relazione (0.1), f, t_0 e x_0 sono "dati del problema", ossia quantità note sulla base di qualche misurazione. Nel caso specifico, noi sappiamo che siamo partiti da Milano (ossia dalla posizione $x_0 = 0$ nell'intervallo J) al tempo iniziale $t_0 = 0$. Inoltre, conoscevamo la velocità (istantanea) misurata ad ogni tempo t. Sulla base di **tutte** queste informazioni, allora la posizione al variare del tempo è (univocamente) determinata dalla relazione (0.2). Si è evidenziata la parola "tutte per sottolineare che la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ in (0.1) è altrettanto importante quanto la conoscenza della velocità f. In altre parole, se sappiamo solo quanto siamo stati veloci, ma non dove, e neanche quando siamo partiti, risulta impossibile determinare dove ci trovavamo al tempo $t \in I$. Matematicamente, questo si esprime osservando che la relazione $x'(t) = f(t)$, ove f è sempre il dato e x l'incognita, ha *infinite soluzioni*, le quali sono, ovviamente, le primitive di f. La corretta soluzione di (0.1) è, tra queste, quella che soddisfa la condizione iniziale.

La (0.1) rappresenta infine un semplice esempio di *equazione differenziale*. Molto sinteticamente, questo vale a dire due cose: che siamo di fronte a un'equazione la cui incognita x (ossia l'oggetto che dobbiamo determinare) è non un numero, ma una funzione; inoltre, nell'espressione dell'equazione compare qualcuna delle sue derivate, nel caso specifico x': questo spiega l'uso dell'aggettivo "differenziale". Notiamo che per l'equazione (0.1) abbiamo a disposizione la *formula risolutiva* (0.2). Dunque, *se siamo in grado di calcolare l'integrale* in (0.2) (il che come è noto può essere un problema non banale), allora possiamo sempre determinare la soluzione x, ossia la posizione del punto al variare del tempo. Nel prossimo paragrafo, verremo a introdurre una classe più ampia di equazioni differenziali, per le quali il problema della risoluzione esplicita è più complesso, ossia non si ha sempre a disposizione una formula risolutiva. In seguito, concentreremo la nostra attenzione su alcuni tipi di equazioni molto particolari, per le quali forniremo metodi costruttivi di risoluzione. Segnaliamo già da subito che le equazioni che tratteremo hanno un'importanza rilevante nelle applicazioni, perché compaiono nella descrizione di numerosi processi fisici o biologici.

0.2 Cenni di teoria

Manteniamo lo stesso esempio del paragrafo precedente, ma complichiamo ancora un pochino la situazione. Supponiamo cioè che la funzione f rappresenti ancora la velocità e sia sempre un dato del problema, ossia una quantità nota. Tuttavia, ora immaginiamo che la tale velocità non dipenda più solo dal tempo, ma anche dalla posizione x.

Ad esempio, si può immaginare che al chilometro $x = 18$ ci sia una strettoia e si debba obbligatoriamente passare a 20 km/h. Ora naturalmente non possiamo supporre che f sia stata misurata da un contachilometri: se si vuole continuare a pensare in concreto, si immagini che la legge f sia nota in base a qualche tipo di osservazione sperimentale sul percorso. Più avanti forniremo degli esempi concreti e fisicamente significativi di questo tipo di ipotesi. La cosa interessante dal punto di vista matematico è che ora f è un oggetto nuovo rispetto a quanto visto finora nel corso, ossia una *funzione di due variabili*. Questo vuol dire che f ci restituisce il valore della velocità atteso in corrispondenza del tempo t *e* della posizione x. Supponiamo cioè che sia

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f = f(t, x), \tag{0.3}$$

ove I e J sono due intervalli di $\mathbb{R}$. Come notazione, indicheremo sempre con I l'intervallo dove *vive* il "tempo" t e con J quello dove varia la "posizione" x. Il prodotto cartesiano $I \times J$ contiene allora le *coppie ordinate* (t, x), da cui dipende il valore di f. In una tale situazione, la relazione (0.1) e la formula risolutiva (0.2) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0; \tag{0.4}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s. \tag{0.5}$$

Notiamo che, nella (0.4), è obbligatorio chiedere che siano $t_0 \in I$ e $x_0 \in J$. Dobbiamo infatti essere sicuri che l'equazione abbia senso almeno al tempo t_0. In questa situazione, sarebbe naturale chiamare soluzione del cosiddetto *Problema di Cauchy* (0.4) la funzione $x : I \to J$ definita dalla (0.5). Tuttavia, le cose non sono così semplici. Innanzitutto, si può vedere che ora il secondo membro della (0.5) *dipende anche* dalla funzione incognita $x(t)$. Dunque, la (0.5) non è più una vera "formula risolutiva", ma solo una riscrittura (equivalente) del problema. Ciò vale a dire che la (0.4) non si risolve tramite il semplice calcolo di un integrale; anzi, vedremo che le equazioni differenziali di cui si sa calcolare la soluzione esplicita sono una stretta minoranza. Ma c'è un'altra difficoltà, probabilmente ancora peggiore. Dal momento che la (0.5) non permette di "costruire" la soluzione, ma solo di riformulare il problema, non è più ovvio che la soluzione del problema di Cauchy (0.4) debba per forza esistere, né che, qualora esista, sia unica. Queste proprietà fondamentali vanno adesso dimostrate e, per questo, bisogna richiedere opportune ipotesi sulla funzione f. In particolare, come vedremo fra un attimo, le cose vanno abbastanza bene una volta che la f sia supposta, come noi faremo sempre, della *regolarità* $C^1(I \times J)$[1]. Sotto una tale ipotesi, la funzione $x(t)$ soluzione della (0.4) esiste sempre, ed è unica. Tuttavia, potrebbe

[1] Spieghiamo, senza essere del tutto rigorosi, che cosa vuol dire "di classe C^1" nell'ambito delle funzioni di due variabili. Si immagini di prendere, ad esempio, un qualsiasi $t \in I$ e di "congelarlo", ossia di tenerlo fisso. Quello che si ottiene, è una nuova funzione $f^t : J \to \mathbb{R}$, definita come $f^t(x) := f(t, x)$, della sola variabile x. Tale funzione coincide grosso modo con la restrizione della f alla copia verticale di J individuata dalla scelta di t (più rigorosamente all'insieme $\{t\} \times J$). Dal momento che f^t è una funzione di una sola variabile, si può chiedere che sia derivabile su J e si può considerare la sua derivata $(f^t)'(x)$, derivata calcolata nella sola variabile "mobile" rimasta, ossia la x. Di solito, a questa derivata si dà un nome: si pone cioè $f_x(t, x) := (f^t)'(x)$ e la si chiama *derivata*

capitare che x non sia definita su tutto I, ma solo su un sottointervallo più piccolo contenente t_0, come mostra il seguente

Esempio 0.1. Consideriamo la funzione

$$f(t,x) = 1 + x^2,$$

ove ovviamente si ha $I = J = \mathbb{R}$. Una verifica a posteriori consente di mostrare che la funzione

$$x(t) = \tan t, \quad t \in \big(-\pi/2, \pi/2\big), \tag{0.6}$$

risolve il Problema di Cauchy (0.4) per la scelta dei dati iniziali $t_0 = x_0 = 0$. Per la proprietà di unicità cui si è accennato, questa è l'unica soluzione del problema. A causa della presenza di asintoti verticali, si vede però che non è possibile prolungare la x al di fuori dell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Questo fenomeno viene in genere detto di "esplosione in tempi finiti". In realtà, l'equazione $x' = 1 + x^2$ ammette anche soluzioni definite su altri intervalli di $\mathbb{R}$. Tuttavia, in generale non si consente di "incollare" queste alla funzione x trovata in (0.6), in quanto la funzione che si otterrebbe non sarebbe definita su un intervallo; inoltre, in questo modo, si verrebbe a perdere la proprietà di unicità.

I pochi esempi visti finora mostrano che la teoria delle equazioni differenziali è tutt'altro che elementare e diversi fenomeni complicati possono avere luogo. Ci limitiamo dunque a dare l'enunciato del teorema fondamentale, omettendo la dimostrazione. Osserviamo che si potrebbe fornire un enunciato ancora più generale; tuttavia quello qui riportato copre tutti i casi che saranno trattati nel seguito.

Teorema 0.2. *Siano I, J intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e sia $f \in C^1(I \times J)$. Siano $t_0 \in I$, $x_0 \in J$. Allora esiste un intervallo aperto $I_0 \subset I$ contenente t_0 ed una funzione $x : I_0 \to J$ di classe C^2 che risolve il problema* (0.4). *L'intervallo I_0 può essere scelto in modo* massimale, *ossia si può supporre che non esistano soluzioni del problema definite su intervalli più grandi di I_0. Inoltre, la x è* l'unica *soluzione definita su I_0. Infine, se*

$$J = \mathbb{R}, \qquad \exists\, C > 0 : \quad |f(t,x)| \le C(1 + |x|) \quad \forall\, (t,x) \in I \times J, \tag{0.7}$$

allora si può prendere $I_0 = I$.

Concludiamo con qualche osservazione aggiuntiva sull'enunciato. Chiedere che tutti gli intervalli in gioco siano aperti (cosa che non avevamo fatto all'inizio) è puramente

parziale di f rispetto alla variabile x. In modo analogo, ma scambiando il ruolo delle variabili (ossia "congelando" la x), si definisce la derivata parziale f_t di f rispetto a t. Si noti che, una volta costruite ed eventualmente calcolate, f_t e f_x sono viste come funzioni di entrambe le variabili x e t, vale a dire che in un certo senso, a questo livello, si discongela la t (o la x). Dunque, per definizione, dire che f è di classe C^1 significa che le funzioni f_t e f_x esistono per ogni scelta di $t \in I$ e $x \in J$; inoltre, sono funzioni continue nel complesso delle variabili (x,t). Ad esempio, se $f(t,x) = t^2 \sin(x + 2t)$, si ha allora $f_x(x,t) = t^2 \cos(x + 2t)$ e $f_t(x,t) = 2t \sin(x + 2t) + 2t^2 \cos(x + 2t)$. In pratica, la prima derivata f_x è stata calcolata bloccando la t e derivando la f vista come funzione della sola x. Dato che f_x e f_t sono funzioni regolari, possiamo dire allora che f è di classe C^1.

una scelta di comodo per non doverci portare dietro derivate destre o sinistre. Inoltre, dal momento che ogni restrizione di una soluzione è ancora una soluzione, per enunciare in modo rigoroso il teorema (e in particolare la proprietà di unicità), si è preferito considerare la soluzione cosiddetta *massimale*, ossia quella che non ammette prolungamenti che siano ancora soluzioni. Per chiarire il concetto, nell'Esempio 0.1 la funzione x definita in (0.6) è la (unica) soluzione massimale: non può essere prolungata al di fuori dell'intervallo $I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ in modo da ottenere ancora una soluzione; inoltre, è l'unica soluzione definita su I_0. Al contrario, la funzione $y(t) = \tan t, t \in (-\pi/4, \pi/4)$, è anch'essa una soluzione del problema (diversa dalla x perché diverso è il dominio), ma non è massimale: infatti, la x ne è un prolungamento.

Osserviamo infine che la condizione (0.7), detta di solito di *sottolinearità* (perché essenzialmente dice che la f, nella variabile x, può crescere all'infinito al massimo con la velocità di una retta), garantisce che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo I; ossia, non si hanno fenomeni di "esplosione" come quello descritto nell'Esempio 0.1 (ove infatti la (0.7) non valeva).

Esempio 0.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$x' = -tx^3, \qquad x(0) = 1,$$

ove la funzione $f(t,x) = -tx^3$ è ovviamente definita su tutto $I \times J = \mathbb{R}^2$, ma, a causa della crescita *cubica* in x, non soddisfa la (0.7). Ciononostante, si può controllare che la soluzione massimale del problema è data da

$$x(t) = (1 + t^2)^{-1/2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.8}$$

Dunque la (0.7) è *sufficiente*, ma non *necessaria*, perché il dominio della soluzione massimale sia l'intero intervallo I.

0.3 Equazioni lineari del primo ordine

In questo paragrafo cominciamo ad esaminare i tipi di equazioni di cui si sa dare una risoluzione esplicita. Innanzitutto, notiamo che l'equazione in (0.4) si dice *lineare* quando la funzione f è lineare (ossia si comporta come una retta) *rispetto alla variabile* x. Volendo essere rigorosi, questo vuol dire innanzitutto che $J = \mathbb{R}$. Inoltre, chiamato come sempre I l'intervallo (aperto) in cui varia t, chiediamo che esista una funzione $a : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che

$$f(t,x) = a(t)x, \quad t \in I, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.9}$$

In un certo senso, la $a(t)$ è la pendenza, variabile rispetto a t, della retta $x \mapsto f(t,x)$. L'equazione differenziale

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{0.10}$$

associata alla (0.9) si dice di solito di tipo *lineare omogeneo*. L'ultimo termine si spiega col fatto che la retta in x individuata da f passa sempre per l'origine. Possiamo in realtà considerare con poco sforzo "rette" più generali: data un'altra funzione $b : I \to$

$\mathbb{R}$ di classe C^1 (ove I è *lo stesso* intervallo ove era definita a), possiamo considerare funzioni del tipo

$$f(t,x) = a(t)x + b(t), \quad t \in I, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.11}$$

A queste è associata l'equazione differenziale

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{0.12}$$

detta in genere *lineare completa*. Si noti che, data un'equazione del tipo (0.12), la (0.10) costruita con la stessa funzione a si chiama "omogenea associata alla (0.12)" e, come vedremo, ha importanza nella risoluzione di quest'ultima. Chiameremo *Problema di Cauchy* per la (0.12) (o per la (0.10)) il problema che si ottiene associando alla (0.12) (o, rispettivamente, alla (0.10)), la condizione $x(t_0) = x_0$ ove $t_0 \in I$ e $x_0 \in J = \mathbb{R}$ sono dati del problema, ossia quantità note.

Vale il seguente teorema di struttura, che, come al solito, non dimostriamo:

Teorema 0.4. *Data una qualunque soluzione* non nulla $x : I \to \mathbb{R}$ *della* (0.10)*, le soluzioni della* (0.10) *sono tutte e sole le funzioni* cx, $c \in \mathbb{R}$*. Inoltre, data una soluzione* $\overline{x}$ *della* (0.12)*, la totalità delle soluzioni di* (0.12) *è data dalle funzioni* $cx + \overline{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Due parole di commento. Innanzitutto, notiamo che nell'enunciato si parla di soluzioni definite su tutto I. In effetti, anche se questo non è del tutto ovvio, si può adattare opportunamente l'ipotesi (0.7) alle funzioni f in (0.9) e (0.11) per vedere che non ci sono fenomeni di esplosione in tempi finiti. Il teorema dà però soprattutto informazioni sull'insieme delle soluzioni e, in sostanza, dice che questo conserva la struttura lineare dell'equazione. In pratica, per quanto riguarda la (0.10), la somma di due soluzioni è ancora soluzione e, inoltre, moltiplicando una soluzione per una costante si ottiene ancora una soluzione.

Indipendentemente dal teorema, la cosa buona è che abbiamo delle *formule risolutive* che permettono di ricondurre la risoluzione di (0.10) e di (0.12) al calcolo di integrali. Si ponga infatti

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\ \mathrm{d}s \tag{0.13}$$

o, più in generale, se il tempo t_0 non è dato, si scelga A come una qualunque primitiva di a. Allora, si verifica direttamente che le soluzioni di (0.10) sono date da

$$x(t) = ce^{A(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{0.14}$$

È un po' più laborioso, ma ugualmente elementare, verificare la validità della seguente formula risolutiva di (0.12), detta a volte di "variazione delle costanti", in relazione al modo (che non descriviamo) in cui essa viene "costruita":

$$x(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\ \mathrm{d}s, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{0.15}$$

ove, ancora, se t_0 non è noto, si può prendere l'integrale indefinito. Notiamo infine che in entrambe le formule precedenti compare una costante moltiplicativa arbitraria. Questo fatto non deve sorprendere: non stiamo tenendo conto della condizione iniziale. Per selezionare la soluzione soddisfacente a tale condizione esistono in realtà due strade: o si prendono la (0.14) (o la (0.15)) e poi si determina c "a posteriori" sostituendo i valori di t_0 e di x_0, oppure si usa la seguente, e ultima, formula risolutiva, che dà proprio la soluzione del problema di Cauchy per la (0.12):

$$x(t) = x_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s) \, \mathrm{d}s, \tag{0.16}$$

ove adesso, però, t_0 e x_0 devono proprio essere i dati iniziali. Nel caso si consideri il problema di Cauchy associato alla omogenea (0.10), la formula è identica, ma il secondo integrale è di fatto nullo perché $b \equiv 0$.

Per concludere, notiamo una volta di più che la risoluzione delle equazioni (0.10) ed (0.12) non presenta alcuno scoglio dal punto di vista teorico; tuttavia, nei casi pratici, il calcolo degli integrali in (0.14), (0.15) o (0.16) può essere difficile o impossibile. Anzi, potrebbero già sorgere dei problemi a livello del calcolo della funzione $A(t)$ introdotta in (0.13).

0.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di equazioni del "primo ordine" senza specificare che cosa sia un tale "ordine". Rimediamo subito: si dice *ordine* di un'equazione differenziale il più alto indice di derivazione che vi compare. Questa, in effetti, è una nuova complicazione rispetto a quanto visto finora, ove al più si vedeva scritta x' (e dunque si era nell'ambito del *primo ordine*). Tuttavia, esistono, e sono significative, equazioni differenziali in cui compaiono anche derivate successive della x. La teoria generale per queste equazioni è un pochino più complessa di quella raccontata finora e ci limiteremo a trattare un caso molto particolare. Siano dunque dati numeri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e una funzione $b : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1, ove I è, come prima, un intervallo aperto. Introduciamo allora l'equazione *lineare completa del secondo ordine a coefficienti costanti*:

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = b(t). \tag{0.17}$$

Spieghiamo brevemente la terminologia: sul "secondo ordine" ci siamo già soffermati. Il "coefficienti costanti" indica che i coefficienti α, β, γ che moltiplicano le derivate dell'incognita x non sono più funzioni del tempo (come era invece la $a(t)$ nella (0.12)), ma numeri. In effetti, nel caso in cui α, β, γ vengano fatti dipendere dal tempo, *non esistono* tecniche generali di risoluzione: un buon motivo per non trattare una tale situazione. Infine, "completa" indica la presenza del termine $b(t)$, che invece supponiamo poter dipendere da t (essere cioè una funzione non costante). È allora naturale, come si era fatto nel precedente paragrafo, affiancare alla (0.17) la corrispondente equazione omogenea

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = 0, \tag{0.18}$$

ottenuta semplicemente sostituendo 0 a b in (0.17).

Introduciamo ora un oggetto apparentemente scollegato dal contesto, ma che sorprendentemente si rivelerà cruciale nella risoluzione di questo tipo di equazioni. Definiamo *equazione caratteristica* della (0.18) l'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita λ data da:

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0 \tag{0.19}$$

e chiamiamo *radici caratteristiche* della (0.18) le sue soluzioni λ_1, λ_2. Come è noto, a seconda del segno del discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, queste possono essere reali distinte, reali coincidenti oppure complesse coniugate. Vale il seguente

Teorema 0.5. *Sono soluzioni dell'equazione* (0.18) *tutte e sole le funzioni della forma*

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \text{se } \Delta > 0, \tag{0.20}$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \qquad \text{se } \Delta = 0, \tag{0.21}$$

$$x(t) = \big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) e^{\nu t} \qquad \text{se } \Delta < 0, \tag{0.22}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*, ove, nel secondo caso* (0.21)*,* $\lambda_1 = \lambda_2$ *è la radice doppia e, nel terzo* (0.22) *la risoluzione dell'equazione caratteristica ha dato luogo ad un'espressione della forma* $\lambda_{1,2} = \nu \pm \sqrt{\ell}$*, con* ℓ strettamente negativo, *e si è allora posto* $\omega := (-\ell)^{1/2}$.[2]

Come si vede, il teorema precedente sistema completamente la questione della risoluzione di (0.18). Si noti che il comparire dell'equazione caratteristica (0.19) non è poi una cosa tanto astrusa: infatti, già nel paragrafo precedente, nel caso in cui $a(t)$ è una funzione costante, le soluzioni della (0.10) sono della forma $x(t) = ce^{at}$, dato che $A(t) = a(t - t_0)$ e il termine e^{-at_0} può essere inglobato nella costante c. Questo è in accordo con la (0.20), una volta che si pensi che a è (l'unica) radice dell'equazione caratteristica (ora di primo grado) $\lambda - a = 0$ associata alla (0.10).

Restano però aperte due questioni: la risoluzione dell'equazione completa (0.17) e il problema delle condizioni iniziali (o equivalentemente della determinazione del valore delle *due* costanti $c_{1,2}$). Cominciamo a discutere il primo problema e, anzi, ci limitiamo al caso particolare in cui vale una delle due formule seguenti:

$$b(t) = P(t)e^{\kappa t}, \tag{0.23}$$

$$b(t) = P_1(t)\cos(\kappa t) + P_2(t)\sin(\kappa t), \tag{0.24}$$

ove $\kappa \in \mathbb{R}$ e P, P_1, P_2 sono polinomi nella variabile t. Segnaliamo che sarebbe possibile, ma parecchio più complicato, considerare funzioni $b(t)$ del tutto arbitrarie. Limitiamoci allora al caso di (0.23) o (0.24): qui la situazione è più semplice perché si può costruire una *soluzione di prova* $\overline{x}$ della (0.17) con una ricetta a volte laboriosa, ma infallibile. Il fatto non ovvio è che, anche in questa situazione, tutte (e sole) le soluzioni della (0.17) si ottengono come nel paragrafo precedente, ossia prendendo la somma della $\overline{x}$ (dove adesso le costanti c_1 e c_2 sono inglobate) con la generica x data dal Teorema 0.5. Questa proprietà, che non dimostriamo, è come nel Teorema 0.4 una conseguenza della struttura lineare dell'equazione e non vale, in effetti, per equazioni più generali.

Veniamo ora alla ricetta per determinare la $\overline{x}$. Sia d dato dal grado del polinomio $P(t)$ nel caso (0.23) e dal massimo tra i gradi di P_1 e P_2 nel caso (0.24). Allora vale la seguente casistica:

[2] Per chi conosce i numeri complessi, ciò vale a dire che l'equazione (0.19) ha le radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \nu \pm i\omega$.

1. Se valgono (0.20) o (0.21), e (0.24), allora si può scegliere $\overline{x}(t) = Q_1(t)\cos(\kappa t) + Q_2(t)\sin(\kappa t)$, ove Q_1 e Q_2 sono polinomi di grado d.

2. Se valgono le condizioni (0.22) e (0.24), allora si può scegliere la soluzione di prova data da $\overline{x}(t) = t^\sigma\big(Q_1(t)\cos(\kappa t) + Q_2(t)\sin(\kappa t)\big)$, ove Q_1 e Q_2 sono polinomi di grado d e inoltre $\sigma = 1$ se $\nu = 0$ e $\omega = \kappa$, e $\sigma = 0$ altrimenti.

3. Se valgono (0.20) e (0.23), allora si può scegliere $\overline{x}(t) = t^\sigma Q(t)e^{\kappa t}$, ove Q è un polinomio di grado d e $\sigma = 1$ se $\kappa = \lambda_1$ o $\kappa = \lambda_2$, e $\sigma = 0$ altrimenti.

4. Se valgono (0.21) e (0.23), allora si può scegliere $\overline{x}(t) = t^\sigma Q(t)e^{\kappa t}$, ove Q è un polinomio di grado d e $\sigma = 2$ se $\kappa = \lambda_1 = \lambda_2$, e $\sigma = 0$ altrimenti.

5. Se valgono (0.22) e (0.23), allora si può scegliere $\overline{x}(t) = Q(t)e^{\kappa t}$, ove Q è un polinomio di grado d.

Notiamo che questo metodo copre in particolare il caso in cui b è un polinomio o addirittura una costante. In tal caso, ci si mette semplicemente nella situazione (0.23) con $\kappa = 0$.

Per concludere, resta da esaminare il problema delle condizioni iniziali. Rispetto a quanto visto nell'introduzione, la situazione è ora più complessa. Da un punto di vista fisico, se x rappresenta la posizione di un punto materiale, una relazione del tipo (0.17) o (0.18) fornisce infatti l'*accelerazione* x'' in funzione della posizione, della velocità e del tempo. Dunque, affinché la soluzione sia *univocamente determinata* (o, in altre parole, si possa assegnare un valore ad entrambe le costanti $c_{1,2}$), adesso non è più sufficiente conoscere il tempo e la posizione iniziali, ma occorre anche sapere la *velocità iniziale* x_1 misurata al tempo t_0. Le condizioni corrette da imporre alla (0.17) (o (0.18)) sono cioè del tipo

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_1, \tag{0.25}$$

ove $t_0 \in I = \mathrm{dom}(b)$ e $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ sono quantità note. Si può allora dimostrare rigorosamente che, per ogni siffatta scelta delle condizioni iniziali, la soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando alla (0.17) (o alla (0.18)) le condizioni (0.25) esiste ed è unica. Nel nostro caso concreto, questo vuol dire che, se dobbiamo risolvere un problema di Cauchy di questo tipo, i passi che dobbiamo svolgere sono, nell'ordine, i seguenti:

a. Si determina la *soluzione generale* della (0.18) risolvendo l'equazione caratteristica (0.19) e applicando il Teorema 0.5.

b. Si trova una *soluzione particolare* $\overline{x}$ della (0.17) usando la "ricetta" **1.-5.**. A questo punto, al variare delle costanti c_1, c_2, l'espressione $x + \overline{x}$ spazza *tutte e sole* le soluzioni della (0.17).

c. Si vede infine quale è la soluzione del problema di Cauchy imponendo che la $x + \overline{x}$ soddisfi le condizioni iniziali e determinando in questo modo c_1 e c_2.

Osserviamo che la procedura qui descritta, benché laboriosa, funziona **sempre** e non comporta problemi di calcolo (non compaiono cioè integrali difficili o impossibili da risolvere). Dunque, se ci si blocca nei conti, è perché si è sbagliato qualcosa, verosimilmente nella determinazione di $\overline{x}$ (punto **b.**), che è il passaggio tecnicamente più complicato.

0.5 Equazioni a variabili separabili

Hanno questo nome le equazioni della forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) = a(t)b(x(t)), \tag{0.26}$$

ove I, J sono, come prima, intervalli aperti non necessariamente limitati di $\mathbb{R}$, e a e b verificano, rispettivamente, $a \in C^1(I)$ e $b \in C^1(J)$. Il motivo per cui una tale equazione si chiama a variabili separabili è chiaro: la funzione f al secondo membro si "separa" nel prodotto del termine $a(t)$ dipendente solo da t e del termine $b(x)$ dipendente solo da x.

Rispetto ai casi trattati fino ad ora, l'equazione (0.26) è molto più delicata dal punto di vista della teoria; è infatti di tipo *non lineare*. Ciò significa che la x al secondo membro compare come argomento della funzione b, che può essere anche molto complicata (e in particolare non rappresentare affatto una retta). Una conseguenza di ciò è che *non è detto* che la soluzione di un problema di Cauchy per la (0.26) (ottenuto come sempre prendendo $t_0 \in I$, $x_0 \in J$ e imponendo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$) debba essere definita su tutto I (vedi l'Esempio 0.1 ove in effetti l'equazione è proprio del tipo (0.26), con $a(t) \equiv 1$).

Tuttavia, dal punto di vista pratico c'è anche una buona notizia: anche per queste equazioni esiste un metodo di risoluzione. Quello che si fa è abbastanza ovvio: si "separano" le variabili, ossia si dividono entrambi i membri per $b(x(t))$, ottenendo formalmente

$$\frac{x'(t)}{b(x(t))} = a(t), \tag{0.27}$$

ove il secondo membro dipende solo da t e nel primo la t compare solo come argomento della x e della x'. A questo punto, possiamo integrare rispetto al tempo e, più precisamente, abbiamo le seguenti 2 opzioni:

1. Prendiamo gli integrali indefiniti. Otteniamo allora

$$\int \frac{x'(t)}{b(x(t))}\ \mathrm{d}t = \int a(t)\ \mathrm{d}t. \tag{0.28}$$

   Usiamo ora la formula di integrazione per sostituzione introducendo la nuova variabile $x = x(t)$, e sviluppiamo il primo membro come segue:

$$\int \frac{x'(t)}{b(x(t))}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{b(x)}. \tag{0.29}$$

   L'ultimo integrale si può ora calcolare esplicitamente. Dette dunque A una primitiva di a e B una primitiva di $1/b$, otteniamo l'uguaglianza

$$B(x) = A(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{0.30}$$

ove c è una costante additiva al cui variare vengono descritte le diverse soluzioni. Se si hanno delle condizioni iniziali (ossia si sta studiando il problema di Cauchy), il valore esatto di c verrà poi trovato alla fine imponendo tali condizioni. Notiamo però che la (0.30) non fornisce ancora l'espressione analitica delle soluzioni, perché la x vi compare *implicitamente* (ossia all'interno della funzione B). Come osserveremo fra un attimo, però, la B è sempre una funzione *strettamente monotona*, e dunque *invertibile*. Pertanto, le soluzioni x vengono alla fine ad essere date da:

$$x = B^{-1}(A(t) + c), \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{0.31}$$

ove segnaliamo però che il calcolo esplicito di B^{-1} può essere nei casi pratici difficile o anche impossibile.

2. Quando si hanno le condizioni iniziali, si può procedere in modo equivalente, ma un pochino più veloce. Arrivati cioè alla (0.27), prendiamo adesso l'integrale *definito* scegliendo come primo estremo di integrazione t_0. Usando ancora la formula di sostituzione, otterremo alla fine

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}y}{b(y)} = \int_{t_0}^{t} a(s)\ \mathrm{d}s, \tag{0.32}$$

la quale permette di trovare direttamente la soluzione esatta del problema di Cauchy, a patto che, come del resto nel caso precedente, si riesca a venire a capo dei vari calcoli.

La procedura fin qui ottenuta è comoda, ma non del tutto rigorosa. Il lettore infatti dovrebbe essersi accorto che a un certo punto abbiamo fatto una cosa non sempre lecita. Precisamente, per ottenere (0.27), abbiamo diviso per $b(x)$ senza preoccuparci che fosse $b(x) \neq 0$. Purtroppo, questo può effettivamente succedere e dunque non sempre si può dividere per b; tuttavia, questo non è un problema reale. Infatti, agli zeri della funzione b corrispondono *soluzioni costanti* (dette anche, utilizzando l'interpretazione cinematica, "soluzioni stazionarie" o "di equilibrio") dell'equazione (0.26). Si verifica cioè facilmente che, se $b(\overline{x}) = 0$, allora la funzione $x(t) \equiv \overline{x}$, definita su *tutto l'intervallo* I, è una soluzione dell'equazione. Ma c'è un altro particolare importante, sebbene forse meno evidente: se io ho una qualsiasi soluzione x, o questa è costante (corrisponde cioè a uno degli zeri di b e allora non occorre nessun conto per determinarla), oppure per nessun $t \in \mathrm{dom}(x)$ si ha che $b(x(t)) = 0$. Infatti, se $b \circ x$ si annullasse per qualche tempo $\overline{t}$ del suo dominio, questo vorrebbe dire che una tale x "incontra" in $\overline{t}$ una soluzione stazionaria dell'equazione, e ciò è impossibile per la proprietà di unicità.

La precedente osservazione giustifica anche un altro punto del procedimento: se x è una soluzione (non costante) del problema, allora $b \circ x$ è, per la continuità della funzione composta, una funzione continua e mai nulla. Dunque, per il teorema degli zeri, essa non cambia mai segno. Ciò garantisce che la funzione B che è una primitiva in x di $1/b$ costruita in un intervallo ove x non può mai toccare uno zero di b è strettamente monotona. Dunque, effettivamente è possibile invertirla, come abbiamo fatto per passare dalla (0.30) alla (0.31).

Segnaliamo infine che, nei casi pratici, piuttosto riferirsi a "formule risolutive" quali ad esempio la (0.31) è conveniente ripetere in concreto tutti i vari passaggi (cioè la separazione delle variabili, il calcolo degli integrali con la formula di sostituzione e l'inversione di B).

Osservazione 0.6. Dal procedimento svolto si può anche leggere qual è il dominio della soluzione massimale x del problema di Cauchy per la (0.26). Si verifica infatti che questo è dato dal più grande intervallo aperto $I_0 \subset I$ contenente t_0 in cui l'uguaglianza (0.31), ove la costante c è stata determinata imponendo la condizione iniziale, ha senso (si provi, a tale proposito, a sviluppare i conti dell'Esempio 0.1).