

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Equazioni di Evoluzione

Giulio Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata 1, 27100 – PAVIA

E-mail: giusch04@unipv.it

Homepage: <http://www-dimat.unipv.it/~giulio/eqev09.html>

Versione del **April 27, 2010**

Contents

1	Due equazioni non lineari	2
1.1	Spazi funzionali. Funzioni a valori vettoriali	2
1.2	L'equazione di Allen-Cahn	2
1.3	L'equazione delle onde semilineare con smorzamento	10
2	Sistemi dinamici astratti	15
3	Attrattori globali ed esponenziali	15
4	Attrattori di sistemi dipendenti da un parametro e semicontinuità superiore	15

1 Due equazioni non lineari

1.1 Spazi funzionali. Funzioni a valori vettoriali

Sia V uno spazio di Banach. Diciamo che $u \in C_w([0, T]; V)$ quando u è continua da $[0, T]$ in V munito della topologia debole, ovvero

$$\forall \phi \in V', \quad t \mapsto \langle \phi, v(t) \rangle \quad \text{è continua.} \quad (1)$$

Abbiamo il

Teorema 1.1. *Siano V e H spazi di Hilbert, con $V \subset H$ con immersione compatta e densa. Allora, per ogni $r \in [1, +\infty]$, vale l'inclusione*

$$W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \subset C_w([0, T]; V). \quad (2)$$

PROOF. Notiamo innanzitutto che, dato che stiamo parlando di classi di equivalenza di funzioni, la tesi si può enunciare più precisamente dicendo che ogni elemento di $W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ ammette un rappresentante che sta in $C_w([0, T]; V)$.

Ciò detto, dimostriamo il teorema nel caso $r > 1$. Sia $u \in W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$. Allora, per il teorema di Aubin-Lions, $u \in C([0, T]; H)$ (più precisamente, u ammette un rappresentante che sta in $C([0, T]; H)$).

Mostriamo che tale rappresentante u sta anche in $C_w([0, T]; V)$. Per vedere questo è sufficiente mostrare che, per ogni $t \in [0, T]$ e ogni successione $\{t_n\} \subset [0, T]$ con $t_n \rightarrow t$, si ha che $u(t_n) \rightarrow u(t)$ debolmente in V . Dal momento che $u \in L^\infty(0, T; V)$, esiste un'altra successione $\{s_n\} \subset [0, T]$ tale che, per esempio,

$$|s_n - t_n| < \frac{1}{n}, \quad \|u(s_n)\|_V \leq C, \quad (3)$$

dove C , che è indipendente da n , non è altro che la norma di u in $L^\infty(0, T; V)$. La seconda condizione implica che esiste una sottosuccessione $u(s_{n_k})$ che ammette un limite debole in V . Tale limite deve peraltro coincidere con $u(t)$ per l'esistenza del limite in H . Dunque, $u(t) \in V$. Ciò dimostra in particolare che, per tale rappresentante u , si ha che $\|u(t)\|_V \leq C$ per **ogni** $t \in [0, T]$.

A questo punto, suppongo per assurdo che $u(t_n)$ non tenda a $u(t)$ debolmente in V . Ma allora esisterebbero una sottosuccessione $u(t_{n_k})$ e un intorno U di $u(t)$ nella topologia debole di V tale che $u(t_{n_k})$ non sta mai in U . Tuttavia, poiché $u(t_{n_k})$ è limitata in V , essa ammette una sottosuccessione debolmente convergente in V . Come prima, tale limite deve coincidere con $u(t)$, il che dà l'assurdo. ■

1.2 L'equazione di Allen-Cahn

In questa sezione ci occuperemo della seguente equazione non lineare (e, precisamente, semilineare), detta di *Allen-Cahn* o di *Ginzburg-Landau*:

$$u_t - \Delta u + f(u) = g. \quad (4)$$

L'equazione è simile all'equazione del calore, ma contiene il termine non lineare $f(u)$, sul quale supporremo sempre le seguenti ipotesi:

$$f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad (5)$$

la seconda delle quali è assunta per pura comodità di calcolo (e non è limitativa, dato che ci si può sempre ricondurre ad essa tramite una traslazione).

L'equazione (12) verrà studiata in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il quale sarà sempre supposto sufficientemente regolare. La scelta di un dominio tridimensionale è dettata dal significato "fisico" dell'equazione, che descrive vari tipi di processi meccanici o termodinamici.

Come per l'equazione del calore, per avere un problema ben posto occorre aggiungere condizioni al bordo. Considereremo solo il caso più semplice, dato dalla condizione di Dirichlet omogenea

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Inoltre, si deve aggiungere la condizione iniziale

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (7)$$

Il nostro primo obiettivo sarà studiare la buona positura del problema dato dall'equazione (12) e dalle condizioni (6)-(7). In particolare, occorrerà individuare un quadro funzionale opportuno in cui provare a dimostrare l'esistenza della soluzione. In effetti, vedremo che diverse possibilità sono ammissibili, essenzialmente in dipendenza dalla regolarità del dato iniziale u_0 e della sorgente g .

Il nostro primo risultato riguarda l'esistenza *locale in tempo* di una soluzione "forte". A questo fine, occorre specificare gli spazi funzionali che entrano in gioco nello studio dell'equazione. Poniamo, innanzitutto, $H := L^2(\Omega)$ e $V := H_0^1(\Omega)$. Indicheremo la norma e il prodotto scalare di H semplicemente con $\|\cdot\|$ e (\cdot, \cdot) . Grazie alla disuguaglianza di Poincaré, lo spazio V può essere dotato della norma $\|\cdot\|_V := \|\nabla \cdot\|$. Ricordiamo che, identificando H col suo duale topologico H' , H può essere visto come un sottospazio chiuso di V' . Si ha, cioè, la *terna hilbertiana* $V \subset H \subset V'$, ove le inclusioni sono continue e, per risultati generali di densità in spazi di Sobolev, dense. Poniamo, inoltre, $W := H^2(\Omega) \cap V$ e ricordiamo che $-\Delta$ può essere visto come un operatore lineare non limitato sullo spazio H avente dominio W . Denomineremo A tale operatore. Abbiamo, cioè,

$$(Av, w) = - \int_{\Omega} w \Delta v \, dx \quad (8)$$

per ogni coppia di funzioni $v, w \in H$ tali che $v \in D(A) = W$.

Possiamo ora enunciare il teorema.

Teorema 1.2. *Supponiamo che valga (5). Inoltre, assumiamo*

$$u_0 \in W, \quad (9)$$

$$g \in V. \quad (10)$$

Allora esistono un tempo $T_0 > 0$ sufficientemente piccolo ed una funzione u avente la regolarità

$$u \in H^1(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; W) \quad (11)$$

per $T = T_0$, tali che l'equazione valga nella forma

$$u_t + Au + f(u) = g \quad \text{in } H, \quad (12)$$

per quasi ogni tempo in $(0, T_0)$, e la condizione iniziale (7) sia soddisfatta q.o. in Ω .

Osservazione 1.3. Si noti che la condizione di Dirichlet (6) è implicita nella regolarità (11). La possibilità di dare senso alla condizione iniziale segue invece dal fatto che la (11) implica in particolare che $u \in C^0([0, T_0]; V)$ grazie al Teorema di Aubin-Lions.

Osservazione 1.4. Cercare una soluzione locale in tempo è anche, ma non solo, un fatto tecnico. Come per le equazioni differenziali ordinarie, in effetti, la possibile crescita superlineare di f può causare l'esplosione in tempi finiti della soluzione.

PROOF. È possibile dimostrare il teorema in vari modi. Ci pare didattico procedere attraverso un argomento di punto fisso di tipo contrattivo. Poiché $u_0 \in W$ è un dato, possiamo scegliere $R > 0$ tale che $\|u_0\|_W \leq R/2$. Definiamo allora lo spazio

$$\mathcal{X} := \{v \in L^\infty(0, T_0; W) : \|v\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq R\}, \quad (13)$$

ove T_0 sarà scelto alla fine del procedimento. Si osservi che, grazie alla continuità dell'immersione di Sobolev $W \subset C(\bar{\Omega})$, gli elementi di \mathcal{X} sono funzioni uniformemente limitate. Per applicare il Teorema delle contrazioni occorre munire \mathcal{X} di una metrica opportuna. Piuttosto che la norma di $L^\infty(0, T_0; W)$, che parrebbe la scelta naturale, è conveniente scegliere una metrica più debole, ad esempio quella di $L^2(0, T_0, H)$. Il motivo è che è più facile dimostrare la contrattività rispetto a norme più deboli. Inoltre, \mathcal{X} resta uno spazio completo anche rispetto alla norma di $L^2(0, T_0, H)$. Sia infatti data una successione $\{v_n\} \subset \mathcal{X}$ di Cauchy in $L^2(0, T_0, H)$. Allora, grazie alla completezza di $L^2(0, T_0, H)$, essa converge a una certa v rispetto alla norma scelta. Dal momento che $\{v_n\}$ è anche limitata rispetto alla norma di $L^\infty(0, T_0; W)$, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ che tende debolmente star in $L^\infty(0, T_0; W)$ a una funzione che, per unicità del limite, deve coincidere con v . Si ha allora che $v \in L^\infty(0, T_0; W)$; inoltre,

$$\|v\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq \liminf_{k \nearrow \infty} \|v_{n_k}\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq R, \quad (14)$$

grazie alla semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole star. Da qui segue $v \in \mathcal{X}$.

Per applicare il metodo di punto fisso, prendiamo una funzione $\bar{u} \in \mathcal{X}$ e definiamo u come la soluzione (unica) del problema lineare

$$u_t + Au = g - f(\bar{u}), \quad (15)$$

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (16)$$

Tale soluzione esiste grazie alla teoria lineare, dato che il secondo membro di (15) è ora una funzione nota.

Osservazione 1.5. Sorvoliamo su quale sia la regolarità ottimale della soluzione u . In parte questo sarà chiarito dalle stime che seguiranno.

Definiamo ora la mappa $\mathcal{T} : \bar{u} \mapsto u$. Al fine di poter applicare il Teorema delle contrazioni dobbiamo dimostrare che essa ha immagine in \mathcal{X} e che è, appunto, una contrazione. Cominciamo dalla prima verifica. Moltiplichiamo (rispetto al prodotto scalare di H) l'equazione per $u + Au_t$ (occorrerebbe verificare che tale moltiplicazione è ammissibile, ma sorvoliamo anche su questo punto). Integrando per parti, otteniamo (per quasi ogni valore della variabile tempo)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \|Au\|^2) + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 = (g - f(\bar{u}), u) + (\nabla g - f'(\bar{u})\nabla \bar{u}, \nabla u_t). \quad (17)$$

e dobbiamo fornire una stima del secondo membro. Ci occupiamo solo del secondo termine, che è più complicato (il primo termine si stima in modo simile, utilizzando in più la disuguaglianza di Poincaré). Osserviamo innanzitutto che, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$(\nabla g - f'(\bar{u})\nabla \bar{u}, \nabla u_t) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla g\|^2 + \|f'(\bar{u})\nabla \bar{u}\|^2 \quad (18)$$

Ora, grazie all'ipotesi (5) e all'immersione continua $W \subset C(\bar{\Omega})$, esiste una costante $c_1(R)$ dipendente da R e da f , ma indipendente da T_0 , tale che, per quasi ogni $t \in (0, T_0)$,

$$\|f'(\bar{u})\nabla \bar{u}\|^2 \leq \|f'(\bar{u})\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \bar{u}\|^2 \leq c_1(R). \quad (19)$$

Dal momento che anche il termine contenente g è controllato grazie alla (10), concludiamo che esiste una costante $c_2(R)$ (dipendente anche da g) tale che

$$\frac{d}{dt} (\|Au\|^2 + \|u\|^2) \leq c_2(R). \quad (20)$$

Osserviamo ora che

$$(\|\cdot\|^2 + \|A\cdot\|^2)^{1/2} \quad (21)$$

è una norma equivalente alla norma di W . Anzi, per semplicità di calcolo, dotiamo W proprio della norma (21). Integrando (17) su $(0, t)$ per $t \in (0, T_0]$ e successivamente passando all'estremo superiore rispetto a t , otteniamo allora

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_0; W)}^2 \leq \|u_0\|_W^2 + T_0 c_2(R) \leq \frac{R^2}{4} + T_0 c_2(R), \quad (22)$$

dove c_2 è effettivamente calcolabile in funzione di R e degli altri dati (osserviamo ancora una volta che essa non dipende da T_0). Possiamo allora scegliere T_0 sufficientemente piccolo, in modo tale che $R^2/4 + T_0 c_2(R) \leq R^2$. Ciò assicura che \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} .

Per concludere la dimostrazione, proviamo che la mappa \mathcal{T} è contrattiva rispetto alla norma di $L^2(0, T_0; H)$. Per fare questo, consideriamo due funzioni \bar{u}_1, \bar{u}_2 in \mathcal{X} e denotiamo con u_1, u_2 le rispettive soluzioni. Poniamo anche $\bar{u} := \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ e $u := u_1 - u_2$. Abbiamo allora che u risolve

$$u_t + Au + f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Moltiplichiamo tale equazione, nel prodotto scalare di H , per u . Usando Hölder otteniamo subito

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq \|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\| \|u\|. \quad (24)$$

Possiamo ora notare che

$$f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = \int_0^1 f'(s\bar{u}_1 + (1-s)\bar{u}_2) \bar{u} \, ds, \quad (25)$$

da cui

$$\|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\| \leq \|\bar{u}\| \left\| \int_0^1 f'(s\bar{u}_1 + (1-s)\bar{u}_2) \, ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (26)$$

ed è evidente che esiste una costante $c_3(R)$ tale che l'ultima norma è, per quasi ogni $t \in (0, T_0)$, più piccola di c_3 . Usando anche le disuguaglianze di Young e di Poincarè, abbiamo allora

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq c_4(R) \|\bar{u}\|^2, \quad (27)$$

da cui, integrando su $(0, t)$ per $t \in (0, T_0)$ e quindi passando all'estremo superiore rispetto a t ,

$$\|u\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 \leq T_0 \|u\|_{L^\infty(0, T_0; H)}^2 \leq T_0 c_4(R) \|\bar{u}\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 \quad (28)$$

e, per avere una contrazione, è sufficiente scegliere $T_0 < c_4^{-1}$. La dimostrazione è completa. Si noti, infatti, che la regolarità (11) è una diretta conseguenza della stima (17). ■

Chiameremo nel seguito soluzione “forte” una funzione u , definita in un certo intervallo $[0, T]$ ed avente la regolarità (11), che soddisfa l'equazione (12) quasi ovunque in $(0, T)$ e verifica la condizione iniziale (7). Il teorema precedente permette di costruire una soluzione forte “locale in tempo” e, a questo livello, non sappiamo dire se tale soluzione sia prolungabile ad intervalli di tempo arbitrari oppure possa esplodere in tempi finiti. Per il momento possiamo però dimostrare che nella classe delle soluzioni forti c'è unicità anche su intervalli di tempo “grandi”.

Teorema 1.6. *Valgano le ipotesi del Teorema 1.2 e siano $T > 0$ e u_1, u_2 due soluzioni del problema (12)+(7) definite sull'intervallo $[0, T]$ e aventi la regolarità (11). Allora $u_1 = u_2$.*

PROOF. Come nel precedente argomento contrattivo, scrivo l'equazione per u_1 e per u_2 , faccio la differenza e la moltiplico per $u := u_1 - u_2$. Ottengo allora (cfr. con (24))

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq - \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2)) u \quad (29)$$

Procedendo come nella dimostrazione precedente, trovo una costante C , dipendente dalle norme (11) di u_1 e u_2 , tale che

$$-\int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))u \leq \|f(u_1) - f(u_2)\| \|u\| \leq C \|u\|^2. \quad (30)$$

La tesi segue allora applicando il Lemma di Gronwall in (30). \blacksquare

Possiamo ora chiederci se esistano soluzioni forti globali in tempo. Come è naturale aspettarsi, questo dipende dall'andamento della funzione f all'infinito. Un primo risultato, che dovrebbe essere già noto, ci dice che la soluzione "forte" è globale in tempo nel caso in cui f è Lipschitz.

Teorema 1.7. *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 1.2 e, in più, che f sia (globalmente) Lipschitz. Allora, per ogni $T > 0$, la soluzione forte locale si può estendere a una soluzione forte definita nell'intervallo $[0, T]$ e avente la stessa regolarità.*

PROOF. Nonostante questo risultato sia essenzialmente una conseguenza del Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, è opportuno fornirne una dimostrazione indipendente attraverso un argomento di estensione mutuato dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Sia dunque u la soluzione "forte" locale costruita in precedenza e definiamo il suo tempo di vita massimale T_{\max} come l'estremo superiore dei tempi $T > 0$ tali che u ammetta un prolungamento (indicato con la stessa lettera u) che sia ancora una soluzione forte sull'intervallo $(0, T)$. Si noti che posso parlare di "prolungamento" senza ambiguità grazie al precedente risultato di unicità. In altre parole, tutti i prolungamenti "si incollano" ed è possibile definire un (unico) prolungamento massimale u_{\max} definito per quasi ogni $t \in (0, T_{\max})$.

La prima osservazione che posso fare, intuitiva ma delicata da dimostrare, è che T_{\max} , se è finito (se $T_{\max} = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare...), non può essere un massimo. In altre parole, **non** si ha che

$$u_{\max} \in H^1(0, T_{\max}; V) \cap L^\infty(0, T_{\max}; W). \quad (31)$$

Infatti, se valesse la (31), avremmo, per il Teorema 1.1, che $u \in C_w([0, T_{\max}]; W)$. Dunque, otterremmo che esiste il

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}^-} u_{\max}(t) =: u_* \quad (32)$$

rispetto alla topologia debole di W e tale limite apparterebbe a W . Ma, allora, sarebbe possibile trovare una soluzione forte del problema con dato iniziale u_* e tempo iniziale T_{\max} . Tale soluzione permetterebbe di estendere u_{\max} al di là di T_{\max} , il che contraddice la costruzione di T_{\max} .

Mostriamo ora che, invece, se $T_{\max} < +\infty$, allora vale la (31). Dal momento che tale relazione non può essere contemporaneamente vera e falsa, ciò implicherà che $T_{\max} = +\infty$. Per ottenere questo, moltiplico come in precedenza (12) per $Au_t + u$ (ove si può pensare che sia $u = u_{\max}$), arrivando a una relazione simile alla (17). Grazie all'ipotesi di Lipschitzianità di f il (termine più delicato a) secondo membro si può ora stimare come segue:

$$(\nabla g - f'(u)\nabla \bar{u}, \nabla u_t) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla g\|^2 + c \|\nabla u\|^2. \quad (33)$$

Otteniamo allora la relazione

$$\frac{d}{dt} \|u\|_W^2 + \|\nabla u_t\|^2 \leq c(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla g\|^2) \leq c(\|u\|_W^2 + \|\nabla g\|^2). \quad (34)$$

Grazie al fatto che, su ogni $(0, T)$ con $T < T_{\max}$, u è soluzione forte, possiamo applicare Gronwall su $(0, T)$ e ottenere

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; W)}^2 + \|u\|_{H^1(0, T; V)}^2 \leq Q(\|u_0\|_W, T), \quad (35)$$

ove $Q : [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione monotona crescente separatamente in ciascuna delle due variabili e, in particolare, **non esplode** per $T \nearrow T_{\max}$. Dunque vale la (31) e il teorema è dimostrato. \blacksquare

Cerchiamo ora soluzioni “deboli” del problema, ovvero definite in un quadro funzionale meno regolare. Vedremo che tali soluzioni esistono e hanno carattere globale in tempo sotto condizioni su f meno restrittive della Lipschitzianità.

Teorema 1.8. *Supponiamo che valga (5). Supponiamo inoltre:*

$$\exists \lambda : f'(r) \geq -\lambda \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

$$u_0 \in V, \quad F(u_0) \in L^1(\Omega) \quad (37)$$

$$g \in H. \quad (38)$$

Sia infine $T > 0$. Allora esiste una funzione u , avente la regolarità

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; W), \quad (39)$$

che soddisfa l'equazione (12) q.o. in $(0, T)$ e la condizione iniziale (7) q.o. in Ω . Inoltre, tale soluzione è unica.

PROOF. Regularizziamo opportunamente i dati f , u_0 e g in modo da avere successioni $\{f_n\}$, $\{u_{0,n}\}$ e $\{g_n\}$ in accordo con le ipotesi del Teorema 1.7. Richiediamo inoltre che sia

$$(u_{0,n}, g_n) \rightarrow (u_0, g) \quad \text{fortemente in } V \times H \quad (40)$$

e che f_n tenda a f uniformemente sui compatti di \mathbb{R} . Ad esempio, possiamo troncare f al di fuori dell'intervallo $[-n, n]$. Non è difficile verificare che, grazie alla (36), si ha allora che

$$\exists c_5 > 0 : f_n(r) \operatorname{sign} r \leq f(r) \operatorname{sign} r + c_5 |r| \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (41)$$

da cui, definendo

$$F_n(r) := \int_0^r f_n(s) ds, \quad \text{si ha } F_n(r) \leq F(r) + c_5 \frac{r^2}{2} \quad (42)$$

per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Anche l'approssimazione del dato iniziale non può essere scelta arbitrariamente, ma va specificata con una qualche cura. Una possibilità è scegliere $u_{0,n}$ come la (unica) soluzione del problema ellittico

$$u_{0,n} + n^{-1} A u_{0,n} = u_0, \quad (43)$$

da cui, per ogni n , si ha addirittura che $u_{0,n} \in W \cap H^3(\Omega)$ ed è facile verificare che vale la convergenza specificata in (40). Pongo ora

$$h(r) := f(r) + \lambda r, \quad h_n(r) := f_n(r) + \lambda r, \quad H(r) := F(r) + \lambda \frac{r^2}{2} \quad H_n(r) := F_n(r) + \lambda \frac{r^2}{2} \quad (44)$$

e osservo che H e H_n sono convesse. Grazie alla (42) e alla (44), si ha inoltre che

$$H_n(r) \leq F_n(r) + \frac{\lambda}{2} r^2 \leq F(r) + \frac{c_5 + \lambda}{2} r^2. \quad (45)$$

Avendo specificato l'approssimazione dei dati, possiamo ora applicare il Teorema 1.7. Otteniamo dunque, $\forall n \in \mathbb{N}$, una soluzione u_n dell'equazione

$$u_{n,t} + A u_n + f_n(u_n) = g_n, \quad (46)$$

e tale soluzione è definita su tutto $(0, T)$ (di fatto su tutto $(0, +\infty)$).

Moltiplichiamo (46) per $u_{n,t}$. Osserviamo che, grazie alla regolarità (11), tale procedimento è rigoroso. Otteniamo

$$\|u_{n,t}\|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2 + \int_\Omega F_n(u_n) - (g_n, u_n) \right) \leq 0, \quad (47)$$

Sommiamo ora alla (47) l'uguaglianza

$$\lambda \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u_{n,t}\|^2 + 2\lambda^2 \|u_n\|^2, \quad (48)$$

in modo tale che il termine sotto derivata temporale (“energia” del sistema) verifichi

$$\mathcal{E}_n(u_n) := \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2 + \int_{\Omega} F_n(u_n) - (g, u_n) + \lambda \|u_n\|^2 + c_6 \geq \kappa \|u_n\|_V^2 \quad (49)$$

per opportune costanti positive κ e c_6 indipendenti da n .

Abbiamo allora, per qualche $c_7 > 0$,

$$\frac{1}{2} \|u_{n,t}\|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{E}_n(u_n) \leq 2\lambda^2 \|u_n\|^2 \leq c_7 \mathcal{E}_n(u_n), \quad (50)$$

da cui, applicando Gronwall, otteniamo

$$\|\mathcal{E}_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T)} \leq \mathcal{E}_n(u_{0,n}) \exp(c_7 T), \quad (51)$$

e dobbiamo verificare che $\mathcal{E}_n(u_{0,n})$ è limitato in modo indipendente da n . Il passaggio chiave è il controllo il termine non lineare. Grazie alla seconda delle (37), alla convessità di H_n , alla (43) e alla (45), abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_n(u_{0,n}) &= \int_{\Omega} H_n(u_{0,n}) - \frac{\lambda}{2} \|u_{0,n}\|^2 \leq \int_{\Omega} H_n(u_0) + (h_n(u_{0,n}), u_{0,n} - u_0) \\ &\leq \int_{\Omega} F(u_0) + \frac{\lambda + c_5}{2} \|u_0\|^2 - n^{-1} (h_n(u_{0,n}), Au_{0,n}) \leq C, \end{aligned} \quad (52)$$

ove la costante C è indipendente da n . Si è usato in particolare il fatto che $(h_n(u_{0,n}), Au_{0,n}) \geq 0$ grazie alla monotonia di h_n . Integrando in tempo la (50), otteniamo allora

$$\|u_n\|_{H^1(0,T,H)}^2 + \|u_n\|_{L^\infty(0,T,V)}^2 \leq C, \quad (53)$$

per qualche costante C indipendente da n .

Moltiplicando ora (46) per Au_n , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|^2 + \|Au_n\|^2 &\leq (g_n, Au_n) - \int_{\Omega} f'(u_n) |\nabla u_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|Au_n\|^2 + \frac{1}{2} \|g_n\|^2 + \lambda \|\nabla u_n\|^2 \end{aligned} \quad (54)$$

Usando la (38) e la (53), si vede facilmente che

$$\|u_n\|_{L^2(0,T,W)}^2 \leq C, \quad (55)$$

da cui, per confronto nella (46),

$$\|f_n(u_n)\|_{L^2(0,T,H)}^2 \leq C. \quad (56)$$

Le relazioni (53), (55) e (56) implicano, a patto di estrarre una successione (indicata per semplicità sempre con u_n), convergenze deboli o deboli star (nelle norme corrispondenti) a un'opportuna funzione limite u . Il Teorema di Aubin-Lions implica allora

$$u_n \rightarrow u \quad \text{fortemente in } C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V). \quad (57)$$

In particolare, (la sottosuccessione) u_n tende a u quasi ovunque in $(0, T) \times \Omega$. Dal momento che f_n converge a f uniformemente sui compatti di \mathbb{R} , si ha allora che $f_n(u_n)$ converge quasi ovunque a $f(u)$.

Utilizzando una variante del [3, Teorema 18, Appendice] (vedi Prop. 1.9 qui sotto), otteniamo che

$$f_n(u_n) \rightarrow f(u) \quad \text{fortemente in } L^q(Q) \quad \forall q \in [1, 2). \quad (58)$$

Questo è sufficiente a passare al limite nell'equazione (46). Le relazioni (53) e (55) e la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole o debole star implicano poi la validità della (39); dunque, l'esistenza è dimostrata.

Per provare l'unicità, procediamo come nella dimostrazione del Teorema 1.6. Utilizzando le stesse notazioni, arriviamo ancora alla (29). Ora, grazie all'ipotesi (36), non occorre più usare l'uniforme limitatezza di u_1 e u_2 (che è falsa nel presente quadro di regolarità), ma abbiamo direttamente

$$-\int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))u \leq \lambda \|u\|^2, \quad (59)$$

grazie al Teorema di Lagrange. L'unicità segue come prima dal Lemma di Gronwall. ■

Vediamo ora il risultato di convergenza usato nella precedente dimostrazione.

Proposizione 1.9. *Sia A un insieme di misura finita e sia γ_n una successione di funzioni limitata in $L^p(A)$ per qualche $p \in (1, \infty]$. Inoltre, supponiamo che γ_n tenda a un limite γ quasi ovunque in A . Allora $\gamma \in L^p(A)$ e γ_n tende a γ debolmente in $L^p(A)$ (debolmente star se $p = \infty$) e fortemente in $L^q(A)$ per ogni $q \in [1, p)$.*

PROOF. Il fatto che $\gamma \in L^p(A)$ segue dal Lemma di Fatou applicato a $|\gamma_n|^p$. Pongo, come in [3, Teorema 18, Appendice], $g_n := \gamma_n - \gamma$. Per il Teorema di Severini-Egorov, (tutta la successione) g_n tende a 0 quasi uniformemente. Inoltre, g_n è limitata in $L^p(A)$ per ipotesi e perché anche γ appartiene a $L^p(A)$ per quanto visto sopra. Ripetendo la dimostrazione di [3], si vede allora che g_n tende a 0 (ovvero γ_n tende a γ) fortemente in $L^p(A)$ per ogni $p < q$. La convergenza debole in $L^p(A)$ segue allora dai consueti risultati di compattezza debole. ■

Osservazione 1.10. Ci si può chiedere se, sotto le ipotesi (9)-(10) e (36) (ovvero, se i dati g e u_0 sono più regolari) e la f cresce velocemente all'infinito, ma è "essenzialmente monotona"), la soluzione forte locale costruita nel Teorema 1.2 possa ancora essere estesa a una soluzione forte globale. Grazie al Teorema 1.8, sicuramente si può estendere u a una soluzione debole globale. Tuttavia, *non* è ovvio che u possa essere estesa a una soluzione forte globale. Per rendersi conto di questo fatto, si consideri la relazione (17) (con u al posto di \bar{u}). Anche se f è monotona, non è evidente come stimare il termine a secondo membro ($f'(u)\nabla u, \nabla u_t$), dato che la monotonia di f non garantisce più che esso abbia un segno. In realtà vedremo più avanti che l'esistenza di una soluzione globale regolare è comunque vera.

Esercizio 1.11. È davvero necessaria la regolarità (10) per avere la tesi del Teorema 1.2? Analogamente, è necessaria la (38) perché valga la tesi del Teorema 1.8? Provare a dimostrare che i teoremi restano veri nelle ipotesi più deboli (rispettivamente) $g \in H$ e $g \in V'$.

Concludiamo questa sezione notando che ha senso considerare soluzioni dell'equazione (12) in classi di regolarità ancora inferiori. Per esempio, si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 1.12. *Supponiamo che f sia un polinomio di grado dispari con coefficiente del termine di grado più alto strettamente positivo. Assumiamo inoltre*

$$u_0 \in H, \quad (60)$$

$$g \in V'. \quad (61)$$

Sia infine $T > 0$. Allora esiste una funzione u avente (almeno) la regolarità

$$u \in L^2(0, T; V), \quad (62)$$

che soddisfa l'equazione (12) e la condizione iniziale (7) in un senso opportuno. Inoltre, tale soluzione è unica.

La dimostrazione potrebbe essere effettuata utilizzando come per il Teorema 1.8 un metodo di compattezza. Ovvero, si osserva innanzitutto che l'ipotesi attuale su f è più restrittiva della (36). Quindi, si regolarizzano i dati u_0 e g e si applica il Teorema 1.8 al problema regolarizzato. Si mostrano infine delle stime indipendenti dal parametro di approssimazione e si passa al limite.

1.3 L'equazione delle onde semilineare con smorzamento

In questa sezione ci occupiamo della seguente equazione:

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u) = g. \quad (63)$$

Come in precedenza, A è il Laplaciano con condizioni di Dirichlet omogenee e supporremo sempre che valga la

$$f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad f(0) = 0. \quad (64)$$

Naturalmente, occorre associare alla (63) due condizioni iniziali, ovvero

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad (65)$$

dove u_0, u_1 sono dati. Come primo passo, è conveniente richiamare il risultato che si ha per il problema lineare, dato che lo dovremo utilizzare con una certa precisione. Come nella sezione precedente, ho posto $H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $W := D(A) = H^2(\Omega) \cap V$. Abbiamo bisogno di enunciare il risultato considerando un termine di sorgente dipendente dal tempo.

Teorema 1.13. *Supponiamo che i dati soddisfino*

$$(u_0, u_1) \in W \times V, \quad g \in C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) + H. \quad (66)$$

Allora esiste una e una sola funzione u (soluzione “forte”) che soddisfa l'equazione

$$u_{tt} + u_t + Au = g \quad (67)$$

in H per ogni $t \in [0, T]$ e la condizione iniziale (65). Inoltre, u ha la regolarità

$$u \in C^2([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; W). \quad (68)$$

Se, invece, si ha solo

$$(u_0, u_1) \in V \times H, \quad g \in C^0([0, T]; V') \cap L^2(0, T; H) + V', \quad (69)$$

allora esiste una e una sola u (soluzione “debole”) che soddisfa la (67) in V' per ogni $t \in [0, T]$ e verifica la condizione iniziale (65). Inoltre,

$$u \in C^2([0, T]; V') \cap C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; V) \quad (70)$$

e tale regolarità è ottimale.

Osservazione 1.14. Considerando, ad esempio, le soluzioni deboli, è facile rendersi conto che la regolarità (70) corrisponde a quella che si ottiene moltiplicando l'equazione (67) per u_t e sfruttando la (69). In particolare, la regolarità di u_{tt} segue per confronto nell'equazione utilizzando la continuità di g rispetto alla norma di V' .

Passando al problema non lineare, comincio col dimostrare un risultato di esistenza locale di una soluzione “forte” relativo al caso in cui f è Lipschitz.

Teorema 1.15. *Supponiamo che f soddisfi (64) e sia globalmente Lipschitz. Assumiamo inoltre*

$$(u_0, u_1) \in W \times V, \quad g \in H. \quad (71)$$

Allora, esistono un tempo $T_0 > 0$ e una funzione u avente la regolarità (68) (per $T = T_0$) che soddisfa l'equazione (63) in H e la condizione iniziale (65).

PROOF. Procediamo, come in precedenza, con un argomento contrattivo, che descriviamo senza fornire tutti i dettagli. Sia $R > 0$ tale che

$$\|u_0\|_V + \|u_1\|_H \leq R/2 \quad (72)$$

(si noti che queste norme sono più deboli rispetto alla regolarità effettivamente richiesta sui dati iniziali). Definiamo allora lo spazio

$$\mathcal{X} := \{v \in H^1(0, T_0; H) \cap L^2(0, T_0; V) : \|v\|_{H^1(0, T_0; H)} + \|v\|_{L^2(0, T_0; V)} \leq R\}, \quad (73)$$

ove T_0 sarà scelto alla fine del procedimento. Si noti che questo non è lo spazio naturale ove cercare la soluzione del problema iperbolico. Come nel caso parabolico, si verifica comunque che \mathcal{X} è completo se munito della norma di $L^2(0, T_0; H)$.

Fisso $\bar{u} \in \mathcal{X}$ e considero il problema dato dalla

$$u_{tt} + u_t + Au = g - f(\bar{u}) \quad (74)$$

e dalla condizione (65). Dato il carattere Lipschitz di f , si verifica facilmente che

$$\|f(\bar{u})\|_{C^0([0, T_0]; H)} + \|f(\bar{u})\|_{L^2(0, T_0; V)} \leq c_8(R). \quad (75)$$

Segue allora dal Teorema 1.13 che (74)+(65) ammette una e una sola soluzione u che verifica la (68). Pongo, come in precedenza, $\mathcal{T} : \bar{u} \mapsto u$.

Verifico che \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} . Per fare questo, moltiplico (74) per u_t . Osservo che ciò è ammissibile perché tutti i termini dell'equazione giacciono (almeno) in $L^2(0, T_0; H)$. È facile allora ottenere

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \|u_t\|^2 \leq \|g - f(\bar{u})\|^2. \quad (76)$$

Integrando in tempo, arrivo a

$$\|u_t\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T_0; V)}^2 \leq T_0 (\|u_t\|_{L^\infty(0, T_0; H)}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T_0; V)}^2) \leq T_0 c_9(R) + \frac{R^2}{2}, \quad (77)$$

da cui la mappa \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} per T_0 sufficientemente piccolo.

Infine, dimostro che \mathcal{T} è contrattiva. Fissate due funzioni \bar{u}_1, \bar{u}_2 in \mathcal{X} e dette u_1, u_2 le rispettive soluzioni, poniamo $\bar{u} := \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ e $u := u_1 - u_2$. Abbiamo allora che u risolve

$$u_{tt} + u_t + Au + f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \quad (78)$$

Moltiplichiamo tale equazione, nel prodotto scalare di H , per u_t . Si ha subito

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \|u_t\|^2 \leq \|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\|^2 \leq L^2 \|\bar{u}\|^2, \quad (79)$$

ove L è la costante di Lipschitz di f . La contrattività di \mathcal{T} rispetto alla norma di $L^2(0, T_0; H)$ segue allora, almeno per T_0 sufficientemente piccolo, integrando in tempo e applicando la disuguaglianza di Poincaré. Dunque, \mathcal{T} ha uno e un solo punto fisso $u \in \mathcal{X}$. Per concludere la dimostrazione, devo far vedere che la funzione u trovata è una soluzione forte (per il momento sappiamo solo che è un elemento dello spazio \mathcal{X} , che ha un livello inferiore di regolarità). Anche se si potrebbe procedere più velocemente, faremo seguire questa proprietà da un risultato un pochino più generale, presentato separatamente qui sotto. ■

Lemma 1.16. *Supponiamo che f soddisfi (64) e sia Lipschitz. Assumiamo inoltre (71). Sia $T > 0$ e sia u una funzione che risolve, in un senso opportuno, il problema (63) sull'intervallo $(0, T)$ e soddisfa la condizione iniziale (65). Sia inoltre*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; H)} + \|u\|_{L^2(0, T; V)} \leq M \quad (80)$$

per qualche $M > 0$. Allora u è una soluzione forte ed esiste $c(M, T)$ tale che

$$\|u\|_{C^2([0, T]; H)} + \|u\|_{C^1([0, T]; V)} + \|u\|_{C^0([0, T]; W)} \leq c(M, T). \quad (81)$$

PROOF. Il lemma dice che ogni soluzione u (locale o globale) del problema nonlineare in ipotesi “forti” sui dati, se verifica (80), allora è automaticamente una soluzione forte.

Infatti, u risolve in particolare l'equazione *lineare*

$$u_{tt} + u_t + Au = \phi := g - f(u), \quad (82)$$

dove, grazie alla Lipschitzianità di f e alla (80), si ha

$$\|\phi\|_{C^0([0,T];H)} + \|\phi\|_{L^2(0,T;V)} \leq c(M). \quad (83)$$

Ma allora u soddisfa (68) grazie al Teorema 1.13. ■

Passiamo ora a dimostrare un risultato di unicità per la soluzione forte. Si noti che non è necessaria la Lipschitzianità di f .

Teorema 1.17. *Supponiamo che f soddisfi (64) e che valga (71). Sia $T > 0$ e siano u_1 e u_2 due soluzioni “forti” del problema (63)+(65) sull'intervallo $(0, T)$. Valga cioè, per $i = 1, 2$,*

$$u_i \in C^2([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; W). \quad (84)$$

Allora $u_1 = u_2$.

PROOF. Chiaramente $u := u_1 - u_2$ soddisfa

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u_1) - f(u_2) = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \quad (85)$$

Moltiplicando tale equazione per u_t la dimostrazione si ottiene procedendo grosso modo come per il Teorema 1.6. ■

Dimostriamo ora che, nel caso di f Lipschitz, la soluzione “forte” costruita nel Teorema 1.15 ha carattere globale in tempo.

Teorema 1.18. *Supponiamo che f soddisfi (64), che f sia Lipschitz e che valga (71). Allora esiste una soluzione globale “forte” di (63)+(65).*

PROOF. Sia u la soluzione “forte” locale costruita in precedenza e definiamo il suo tempo di vita massimale T_{\max} come l'estremo superiore dei tempi $T > 0$ tali che u ammetta un prolungamento che sia ancora una soluzione forte sull'intervallo $(0, T)$. Grazie all'unicità provata nel Teorema 1.17), tutti i prolungamenti si “incollano” e otteniamo una soluzione massimale u_{\max} definita q.o. in $(0, T_{\max})$.

Come nel caso parabolico, mostro che T_{\max} , se è finito (se $T_{\max} = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare...), non può essere un massimo. In altre parole, **non** si ha che

$$u_{\max} \in C^2([0, T_{\max}]; H) \cap C^1([0, T_{\max}]; V) \cap C^0([0, T_{\max}]; W). \quad (86)$$

Infatti, se così fosse, esisterebbe il

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} (u_{\max}(t), u_{\max,t}(t)) =: (u_0^*, u_1^*) \quad (87)$$

rispetto alla topologia forte di $V \times W$ e sarebbe allora possibile prolungare la soluzione.

Mostriamo ora che, invece, se $T_{\max} < +\infty$, allora vale la (86), ottenendo così una contraddizione.

Moltiplico l'equazione per u_t (dove ho scritto u invece di u_{\max} per brevità). Effettuando passaggi standard e usando in particolare la Lipschitzianità di f , non è difficile arrivare alla relazione

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) \leq c_{10} (1 + \|u\|^2), \quad (88)$$

da cui, usando Poincaré e Gronwall, ottengo che, per ogni $T \in (0, T_{\max})$,

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq Q(\|u_0\|_V, \|u_1\|, T), \quad (89)$$

ove, come in precedenza, Q è monotona in ciascuno dei suoi argomenti e non esplosa per $T \nearrow T_{\max}$. Di conseguenza, la (86) segue dal Lemma 1.16 (in particolare, si ha la (81)). ■

Posso finalmente passare al caso in cui f non è Lipschitz. Rispetto al caso parabolico, sarò comunque costretto a mantenere ipotesi più restrittive. In particolare, richiederò che

$$\exists \lambda : f'(r) \geq -\lambda \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (90)$$

$$\exists c_f > 0, p \in [1, 3] : |f'(r)| \leq c_f(1 + |r|^{p-1}) \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (91)$$

Osservo che l'ipotesi (90) è esattamente identica alla (36) (ovvero f deve essere monotona a meno di una perturbazione lineare). Invece, la (91) prescrive una crescita al più cubica. Come vedremo, questa restrizione è legata alla scelta di lavorare in tre dimensioni spaziali (e, di fatto, all'immersione di Sobolev $V \subset L^6(\Omega)$).

Possiamo ora dimostrare l'esistenza (globale) di una soluzione debole:

Teorema 1.19. *Supponiamo che f soddisfi (64) e (90)-(91). Assumiamo inoltre*

$$(u_0, u_1) \in V \times H, \quad g \in V'. \quad (92)$$

Allora, esiste una e una sola funzione u avente la regolarità (70) che soddisfa l'equazione (63) in V' per ogni $t \in [0, T]$ e la condizione iniziale (65).

PROOF. Approssimo i dati costruendo una successione $\{f_n\}$ di funzioni Lipschitz che tendono a f sui compatti di \mathbb{R} , una successione $\{g_n\} \subset H$ che tende a g in V' e una successione di dati iniziali $\{(u_{0,n}, u_{1,n})\} \subset W \times V$ che tende a $\{(u_0, u_1)\}$ in $V \times H$. Si noti che ora non è necessario costruire l'approssimazione di u_0 in modo complicato, dato che la condizione $F(u_0) \in L^1(\Omega)$ è automaticamente soddisfatta (anche a livello di approssimazione) grazie al fatto che F cresce al massimo come una quarta potenza e $u_0 \in L^6(\Omega)$ per le immersioni di Sobolev. Grazie al Teorema 1.18, ottengo, per ogni fissato n , una soluzione globale forte u_n del problema

$$u_{n,tt} + u_{n,t} + Au_n + f_n(u_n) = g_n, \quad (93)$$

$$u_n|_{t=0} = u_{0,n}, \quad u_{n,t}|_{t=0} = u_{1,n}. \quad (94)$$

Osservo che è ammissibile moltiplicare l'equazione (93) per $u_{n,t}$ (nel prodotto scalare di H). Un procedimento standard porta a ottenere

$$\|u_{n,t}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u_n\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|F_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T)} \leq c, \quad (95)$$

ove c non dipende da n e F_n è una primitiva di f_n (cfr. (42)). Inoltre, grazie all'immersione continua $V \subset L^6(\Omega)$ e all'ipotesi (91),

$$\|f_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq c, \quad (96)$$

da cui il passaggio al limite rispetto a n si effettua come nel caso parabolico. In particolare, ho che

$$f_n(u_n) \rightarrow f(u) \quad \text{debolmente in } L^2(0, T; H) \quad (97)$$

(si noti che, grazie alla Prop. 1.9, si ha convergenza forte nel caso in cui $p < 3$ in (91), ovvero f è sottocubica).

Dunque, u risolve, in un senso opportuno, l'equazione (63) e soddisfa la regolarità

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V), \quad (98)$$

che è però più debole della (70). Per dimostrare che u è effettivamente una soluzione debole, osservo che, grazie ancora alla (91), si ha che $f(u) \in L^2(0, T; H)$. Inoltre, dalla (98) e dal Teorema di Aubin-Lions segue anche

$$u \in C^0([0, T]; L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [1, 6]; \quad (99)$$

infatti, $V \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta. Si ha allora che, per ogni $t, t+h \in [0, T]$,

$$f(u(t+h)) - f(u(t)) = \int_0^1 f'(su(t+h) + (1-s)u(t))(u(t+h) - u(t)) \, ds, \quad (100)$$

da cui, usando l'immersione continua $L^{6/5}(\Omega) \subset V'$,

$$\begin{aligned} \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_{V'} &\leq \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_{L^{6/5}(\Omega)} \\ &\leq c(1 + \|u(t+h)\|_{L^{18/5}(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{L^{18/5}(\Omega)}^2) \|u(t+h) - u(t)\|_{L^{18/5}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (101)$$

ancora grazie alla (91). Usando la (99), si può dunque mandare $h \rightarrow 0$ e si ottiene che $f(u) \in C^0([0, T]; V')$. La (70) segue dunque dalla seconda parte del Teorema 1.13. Per dimostrare l'unicità di u considero come al solito due soluzioni u_1 e u_2 , e pongo $u := u_1 - u_2$, la quale soddisfa

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u_1) - f(u_2) = 0. \quad (102)$$

con condizioni iniziali nulle. Ora, contrariamente a quanto succedeva nel Teorema 1.17, u_t **non è abbastanza regolare** per poter moltiplicare la (102) per u_t . Moltiplico, allora, per $A^{-1}u_t$ (grazie alle condizioni di Dirichlet, l'operatore A è strettamente positivo, e dunque invertibile). Ho

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|_{V'}^2 + \|u\|^2) + \|u_t\|_{V'}^2 \leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'}^2, \quad (103)$$

Procedendo in modo simile a (101), si ha

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'} &\leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \\ &\leq c(1 + \|u_1\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L^6(\Omega)}^2) \|u\|^2 \leq C\|u\|^2, \end{aligned} \quad (104)$$

ove C dipende anche dalle norme (98) di u_1 e u_2 . La tesi segue dal Lemma di Gronwall. \blacksquare

Osservazione 1.20. È possibile provare la regolarità (70) in modo diretto (ovvero senza ricorrere al Teorema 1.13), dimostrando una stima di Cauchy per la successione approssimante $\{u_n\}$ nello spazio $C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; V)$.

Osservazione 1.21. Se f ha crescita più che cubica, ovvero si ha, al posto della (91),

$$\exists p > 3: \quad \kappa_1|r|^{p-1} - \kappa_2 \leq f'(r) \leq \kappa_3(1 + |r|^{p-1}), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (105)$$

per opportune costanti $\kappa_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, allora è ancora possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione "debole" dell'equazione non lineare (63) (anche se cambiano le condizioni di regolarità, in particolare su $f(u)$). Tuttavia, **non è noto** (ed è un problema aperto importante!) se tale soluzione sia unica.

Osservazione 1.22. Una differenza fondamentale tra il caso parabolico e il caso iperbolico riguarda l'ammissibilità delle test-funzioni nell'ottenere le stime di regolarità naturale. Per esempio, nel teorema precedente, si è ottenuta l'esistenza di una soluzione debole u come limite di una famiglia $\{u_n\}$ di soluzioni più regolari (forti) costruite approssimando i dati (in particolare, la f). La stima necessaria per passare al limite è stata ottenuta moltiplicando (93) per $u_{n,t}$, il che era possibile grazie alla regolarità "forte" della u_n . Una volta ottenuta la soluzione debole u come limite, non è invece più possibile moltiplicare la (63) per u_t , in quanto questa funzione non è abbastanza regolare.

Osservazione 1.23. Un problema rimasto aperto dalla precedente discussione riguarda l'esistenza di una soluzione forte globale nel caso in cui f non è Lipschitz. Questo risultato è vero (ovviamente per dati aventi la regolarità (71)) nel caso in cui f verifica la condizione (64); tuttavia non ne forniremo una dimostrazione in questa sede. Il lettore può comunque convincersi della validità del risultato cercando una *stima formale*, globale in tempo, della soluzione u nelle norme (68). Questa può essere ottenuta testando l'equazione (63) per Au_t e provando a stimare il termine $(f(u), Au_t)$, attraverso opportune integrazioni per parti, in un modo che dipende soltanto dalla regolarità (71) dei dati. Si parla di stima "formale" perché, come osservato poco sopra, le condizioni di regolarità attese per u (ovvero le (68)) non sono sufficienti ad operare una tale stima, se non attraverso un'approssimazione (ovvero ad un livello in cui la soluzione è ancora più forte).

2 Sistemi dinamici astratti

3 Attrattori globali ed esponenziali

4 Attrattori di sistemi dipendenti da un parametro e semi-continuità superiore

References

- [1] V. Barbu, “Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces”, Noordhoff, Leyden, 1976.
- [2] H. Brézis, “Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert”, North-Holland Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] H. Brézis, “Analisi Funzionale”, Liguori Editore, 1986.
- [4] V. Pata and S. Zelik, *A result on the existence of global attractors for semigroups of closed operators*, Commun. Pure Appl. Anal., **6** (2007), 481–486.
- [5] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. (4), **146** (1987), 65–96.
- [6] R. Temam, “Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics”, Springer-Verlag, New York, 1988.