APPUNTI PER IL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE

(A. A. 2002-2003)

Gianni A. Pozzi

Indice

Capitolo 3. Problemi di evoluzione.

Capitolo 1

ALCUNI COMPLEMENTI AL TESTO DI H. BREZIS: “ANALISI FUNZIONALE

Per la parte del corso svolta seguendo il testo di H. Brézis “*Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori Ed., 1986 (traduzione italiana di “*Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson Ed., 1983), che nel seguito sarà indicato con [Br], si rimanda al testo stesso (viene soltanto fornito qualche complemento). È presupposta la conoscenza degli argomenti trattati in [Br], Paragrafi **I.1**, **II.1-3**, e **Capitoli III, IV, V** (per intero). La prima parte di questi appunti è quindi da intendere come una *traccia*, senza pretesa di completezza, di argomenti svolti nelle lezioni ma non contenuti nei Paragrafi citati; molte delle osservazioni sono tratte da appunti, non pubblicati, di H. Brézis e G. Tronel.

1.0 Notazioni.

Le notazioni sono, per la maggior parte, quelle usate in [Br]; ne richiamiamo tuttavia alcune, per comodità del lettore:

• dati $x \in X$ ed $y \in Y$, $[x;y] \in X \times Y$ indica la **coppia ordinata** di elementi x ed y; $\mathfrak{P}(X)$ è la **famiglia delle parti** di X;

• la **funzione indicatrice** $I_A : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ del sottoinsieme A di X è definita da:

$$I_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A, \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus A; \end{cases}$$

• se X è uno spazio topologico ed $A \subset X$, con $\operatorname{int} A$ ed $\overline{A}$ si indicano, rispettivamente, l'**interno** e la **chiusura** di A;

• se X è uno spazio metrico, $d(x, A)$ è la **distanza** di $x \in X$ dal sottoinsieme non vuoto A di X $\Big(d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)\Big)$; se $x_0 \in X$ e $\varrho \in \mathbb{R}_+$, si indica con $\Sigma(x_0, \varrho)$ la **sfera aperta** di centro x_0 e raggio ϱ;

• se X è uno spazio di successioni *reali*, $\{e^{(n)}\}$ indica la successione dei **versori** di X: $e^{(n)} := \{\delta_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$, dove $\delta_n^n = 1$, $\delta_k^n = 0$ se $k \neq n$.

• E, F indicano spazi di BANACH *reali*, con norma $\|\cdot\|$; E' è il duale di E, con norma $\|\cdot\|_*$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è la dualità tra E' ed E; (se necessario, si utilizzeranno le notazioni $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_{E'}$, ${}_{E'}\langle\cdot,\cdot\rangle_E$); E_s , E_w (risp., E'_s , E'_w , E'_{w^*}) indicano gli spazi E (E') muniti delle topologie forte, debole (forte, debole, debole*); la convergenza di $\{x_n\}$ ad x nella topologia forte, debole, debole* sarà spesso indicata, rispettivamente, con

$$x_n \to x \quad ; \quad x_n \rightharpoonup x \quad ; \quad x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x;$$

$\mathcal{L}(E;F)$ indica lo spazio degli operatori A lineari e continui da E in F, con norma $\|A\|_{\mathcal{L}(E;F)} := \sup\{\|Ax\|_F \mid \|x\|_E = 1\}$; si pone $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E;E)$;

• dato $p \geq 1$, q è l'**esponente coniugato** di p ($q := p/(p-1)$ se $p > 1$; $q := +\infty$ se $p = 1$) (in [BR] è usata la notazione p' anziché q);

• H indica uno spazio di HILBERT *reale*, con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$; di solito (*non* sempre: si ricordi l'OSSERVAZIONE 1 di [BR], **V.2**) è possibile (ed utile) identificare H al suo duale H' (mediante il teorema di RIESZ);

• $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$ sono gli usuali spazi delle **funzioni test** e delle **distribuzioni** sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

1.1 Separazione di insiemi convessi.

Premettiamo la seguente definizione (si veda [BR], **I.2**):

Definizione 1.1 *Dati un funzionale lineare f non identicamente nullo su E ed un numero reale λ, si chiama* **iperpiano** *(affine, di equazione)* $[f = \lambda]$ *l'insieme* $f^{-1}(\lambda) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda\}$. ∎

In dimensione *finita* (cioè, quando $E = \mathbb{R}^n$), *ogni funzionale lineare è continuo*: infatti, poiché, $\forall x \in E$, risulta $x = \sum_{k=1}^n (x, e^{(k)})\, e^{(k)}$, si ha che

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |x|\,|f(e^{(k)})| = |x| \left(\sum_{k=1}^n |f(e^{(k)})|\right) = c\,|x|\,,$$

e questo comporta che *in dimensione finita ogni iperpiano è chiuso*.

La situazione è completamente diversa nel caso di spazi a dimensione *infinita*: si dimostra (si veda [BR], **Proposizione I.5**) che $[f = \lambda]$ *è chiuso se e solo se f è continuo*; ma la continuità di f non è più conseguenza della linearità, come mostra il seguente risultato:

Lemma 1.1 *Se* $\dim E = +\infty$*, esiste un funzionale* lineare non continuo f *definito su* tutto E.

Dim.: definiamo la famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di E nel modo seguente: $A \in \mathcal{S} \iff$ gli elementi di A sono linearmente indipendenti. $\mathcal{S}$, ordinato per inclusione, è evidentemente induttivo. Per il Lemma di ZORN, $\mathcal{S}$ ha almeno un elemento massimale $M := \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, che è una *base algebrica* per E (cioè, ogni elemento $x \in E$ si scrive, in modo unico, nella forma $x = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} x_\lambda e_\lambda$

con Λ_0 sottoinsieme *finito* di Λ, ed $x_\lambda \in \mathbb{R}$). Non è limitativo supporre che $\|e_\lambda\| = 1$ $\forall \lambda \in \Lambda$, e che (essendo $\dim E = +\infty$), $\mathbb{N} \subset \Lambda$; definiamo intanto:

$$f(e_\lambda) := \begin{cases} \lambda & \text{se } \lambda \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{se } \lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{N}, \end{cases}$$

ed estendiamo poi f, per linearità, a tutto E; è chiaro che f verifica le condizioni richieste. ∎

Definizione 1.2 *Dati i due sottoinsiemi A, B di E, l'iperpiano* $[f = \lambda]$ **separa A e B in senso largo** *se $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ (oppure $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$; li* **separa in senso stretto** *se $\exists \varepsilon > 0 :\ f(a) \leq \lambda - \varepsilon$ mentre $f(b) \geq \lambda + \varepsilon$ (oppure, $f(a) \geq \lambda + \varepsilon$, mentre $f(b) \leq \lambda - \varepsilon$) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.* ∎

Ricordiamo le seguenti *forme geometriche* del teorema di Hahn-Banach (cfr. [Br], **Teorema I.6** e **Teorema I.7**):

Teorema 1.1 *Siano A, B due sottoinsiemi* non vuoti*,* disgiunti *e* convessi *di E; allora:*

i) se uno dei due è aperto*, esiste un iperpiano chiuso che li separa* in senso largo*;*

ii) se uno dei due è chiuso *e l'altro è* compatto*, esiste un iperpiano chiuso che li separa* in senso stretto*.* ∎

<u>Osservazione</u> **1.1** In dimensione infinita, *non è detto* che due convessi A, B non vuoti e disgiunti possano essere separati, neppure in senso largo, da un iperpiano chiuso. Ad esempio, sia $E := \ell^p$ (con $1 \leq p < +\infty$), e si ponga

$$A := \left\{ a = \{a_n\} \in E \;\middle|\; a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$C := \left\{ c = \{c_n\} \in E \;\middle|\; c_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

È evidente che A e C sono sottospazi chiusi di E, ed è facile verificare che $A + C$ è denso in E: se $f = \{f_n\} \in E'(=\ell^q)$ è nulla su $A + C$, in particolare è nulla su C, ed è immediato dedurne che $f_{2n-1} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ma f deve essere nulla anche su A, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n} a_{2n} = 0$ $\forall a \in A$; se per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$ si pone $a^{(k)} := 2^k\, e^{(2k-1)} + e^{(2k)}$, ne viene che $0 = \langle f, a^{(k)} \rangle = f_{2k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, cosicché $f = 0$.

Se $\xi \in E$ è il vettore $\xi := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(2n)}}{2^n}$, si vede subito che $\xi \notin A + C$. In effetti, se esistessero $a = \{a_n\} \in A$ e $c = \{c_n\} \in C$ tali che $\xi = a + c$, si avrebbe, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = a_n + c_n$; in particolare, $\frac{1}{2^n} = a_{2n}$ e $0 = 2^n\, a_{2n} + c_{2n-1} = 1 + c_{2n-1}$, cioè $c_{2n-1} = -1$, assurdo perché, essendo $c \in E$, deve essere $\lim_{n \to +\infty} c_{2n-1} = 0$. Posto $B := C - \xi$ (è un convesso chiuso di E), risulta $A \cap B = \emptyset$; ma si controlla facilmente che i convessi (non vuoti, disgiunti, chiusi e non compatti) A e B *non possono essere separati in senso largo da nessun iperpiano chiuso.* In effetti, se $0 \neq f \in E'$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ sono tali che $\langle f, a \rangle \geq \alpha \geq \langle f, b \rangle$ (oppure $\langle f, a \rangle \leq \alpha \leq \langle f, b \rangle$) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, ne viene facilmente che, poiché A e C sono sottospazi, f è nulla sia su A sia su C, quindi su $A + C$, dunque $f = 0$, contrariamente all'ipotesi. ∎

1.2 Funzioni convesse; funzioni s.c.i.; funzione coniugata.

Premettiamo qualche richiamo sulle funzioni convesse e sulle funzioni semicontinue inferiormente; in tutto questo Paragrafo, ci limitiamo al caso di funzioni $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, con E *spazio normato.* Poniamo intanto la seguente

Definizione 1.3 *i) il* **dominio** *di* φ *è l'insieme*

$$\operatorname{dom}\varphi := \{x \in E \mid \varphi(x) < +\infty\}\,;$$

se $\operatorname{dom}\varphi \neq \emptyset$, φ *si dice* **propria***;*

*ii) l'***epigrafico** *di* φ *è l'insieme*

$$\operatorname{epi}\varphi := \{\,[x;\lambda] \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\};$$

iii) φ *è* **convessa** *se,* $\forall x, y \in E$ *e* $\forall t \in [0,1]$, *si ha*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\,.$$

iv) φ *è* **semicontinua inferiormente** *(abbreviato in* **s.c.i.***) se,* $\forall x \in E$ *e* $\forall \{x_n\} \subset E$ *tale che* $x_n \to x$, *risulta*

$$\varphi(x) \leq \liminf_n \varphi(x_n)\,. \ \blacksquare$$

1.2.1 Funzioni convesse.

Dimostriamo intanto le seguenti proprietà (soltanto enunciate in [Br], **I.3**):[1]

Proposizione 1.1 *i) se* φ *è convessa, per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'insieme* $[\varphi \leq \lambda] := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$ *è convesso in* E *(ne viene che anche* $\operatorname{dom}\varphi$ *è convesso);*

ii) φ *è convessa se e solo se* $\operatorname{epi}\varphi$ *è un sottoinsieme convesso di* $E \times \mathbb{R}$*;*

iii) se φ_1, φ_2 *sono convesse, lo è ogni loro combinazione lineare a coefficienti* α, β *non negativi;*

iv) se $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *è una famiglia di funzioni convesse, anche il loro* **inviluppo superiore** φ, *definito da*

$$\varphi(x) := \sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x)\,,$$

è una funzione convessa.

Dim.: *i)*: evidente, perché se $\varphi(x_1) \leq \lambda$ e $\varphi(x_2) \leq \lambda$, allora, $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda$. *Non vale* l'implicazione nell'altro senso: basta scegliere $E := \mathbb{R}$ e $\varphi(x) := \sqrt{|x|}\,$;

ii): se φ è convessa, dati $[x_1;\lambda_1]$, $[x_2;\lambda_2] \in \operatorname{epi}\varphi$ e $t \in [0,1]$, poiché $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \leq t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$, ne viene che $\operatorname{epi}\varphi$ è convesso; viceversa, se $\operatorname{epi}\varphi$ è convesso, dati $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}\varphi$,

[1] valide, con la *stessa* dimostrazione, in *ogni spazio vettoriale reale* E

poiché $[x_1;\varphi(x_1)]$ e $[x_2;\varphi(x_2)]$ appartengono ad epi φ, ne viene subito che $[tx_1+(1-t)x_2;t\varphi(x_1)+(1-t)\varphi(x_2)]\in \operatorname{epi}\varphi$, da cui la convessità di φ;
iii): il controllo della convessità di $\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2$ è immediato;
iv): $\forall\lambda\in\Lambda\,,\forall x_1,x_2\in E\,,\forall t\in[0,1]$ risulta $\varphi_\lambda(tx_1+(1-t)x_2)\le t\varphi_\lambda(x_1)+(1-t)\varphi_\lambda(x_2)\le t\varphi(x_1)+(1-t)\varphi(x_2)$, da cui, passando all'estremo superiore per $\lambda\in\Lambda$, $\varphi(tx_1+(1-t)x_2)\le t\varphi(x_1)+(1-t)\varphi(x_2)$. ■

Fissata la funzione *convessa* $\varphi: E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, valgono le seguenti proprietà (si vedano, ad esempio: I. Ekeland, R. Temam: "*Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars, 1974; A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov: "*Theory of Extremal Problems*, Studies in Mathematics and its Applications, volume 6, North-Holland, 1979):

Lemma 1.2 *Se φ è convessa e superiormente limitata in un intorno del punto $x_0\in E$, allora è continua per $x=x_0$.*

Dim.: per ipotesi, $\exists\varrho>0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ tali che $\forall x\in\Sigma(x_0,\varrho)$ risulta $\varphi(x)\le\lambda$. Si osservi intanto che, $\forall t\in\,]0,1[$, si ha $\Sigma(x_0,t\varrho)\subset\Sigma(x_0,\varrho)$; quindi, $\forall v\in E$ con $\|v\|<t\varrho$, si ha che $x_0,\ x_0+v,\ x_0\mp\frac{v}{t}\in\Sigma(x_0,\varrho)$. Per la convessità di φ, $\varphi(x_0+v)=\varphi\left((1-t)x_0+t\left(x_0+\frac{v}{t}\right)\right)\le(1-t)\varphi(x_0)+t\varphi\left(x_0+\frac{v}{t}\right)$, da cui $\varphi(x_0+v)-\varphi(x_0)\le t\left(\varphi\left(x_0+\frac{v}{t}\right)-\varphi(x_0)\right)\le t(\lambda-\varphi(x_0))$. Inoltre, $\varphi(x_0)=\varphi\left(\frac{1}{1+t}(x_0+v)+\frac{t}{1+t}\left(x_0-\frac{v}{t}\right)\right)\le\frac{1}{1+t}\varphi(x_0+v)+\frac{t}{1+t}\varphi\left(x_0-\frac{v}{t}\right)$, da cui $\varphi(x_0)-\varphi(x_0+v)\le t\left(\varphi\left(x_0-\frac{v}{t}\right)-\varphi(x_0)\right)\le t(\lambda-\varphi(x_0))$.
Fissato ad arbitrio $\varepsilon>0$, scelto $t\in\,]0,1[$ in modo che $t(\lambda-\varphi(x_0))<\varepsilon$, e posto $\varrho_0:=t\varrho$, si ha dunque che $\forall x\in\Sigma(x_0,\varrho_0)$ risulta $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, da cui la continuità di φ per $x=x_0$. ■

<u>Osservazione</u> **1.2** Dalla dimostrazione segue che *se φ è convessa*, e in un intorno di $x_0\in E$ risulta $\varphi(x)\le\varphi(x_0)$, allora in tale intorno *φ è costante.* ■

Proposizione 1.2 *Se φ è convessa e superiormente limitata in un aperto A non vuoto di E, allora* $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$ *è non vuoto, e φ è continua in* $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$.[2]

Dim.: per ipotesi, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tale che $\forall v\in A$ risulti $\varphi(v)\le\lambda$; dal momento che $A\subset\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$, ne viene intanto che $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)\ne\emptyset$, e resta solo da mostrare la continuità di φ nel generico punto $x_0\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$. Fissato $v_0\in A$, il **Lemma 1.2** assicura la continuità di φ in v_0; osservato che per $t>0$ sufficientemente piccolo si ha che $w_0:=[(x_0-tv_0)/(1-t)]\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$ (perché $w_0-x_0=t(x_0-v_0)/(1-t)$, ed x_0 è *interno* a $\operatorname{dom}\varphi$), poniamo $y:=f(x):=tx+(1-t)w_0$, da cui $x=f^{-1}(y)=[y-(1-t)w_0]/t$. Si ha allora che $f(v_0)=x_0$, e che $f(A)$ è un intorno aperto di x_0. Inoltre, $\forall y\in f(A)$ risulta, per la convessità di φ,

$$\varphi(y)\le t\varphi(f^{-1}(y))+(1-t)\varphi(w_0)\le t\lambda+(1-t)\varphi(w_0);$$

[2] Si può mostrare che φ è *localmente lipschitziana* in $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$.

posto $\widetilde{\lambda} := t\lambda + (1-t)\varphi(w_0)$, si ha che $\varphi(y) \leq \widetilde{\lambda}$ nell'intorno $f(A)$ di x_0, quindi φ è continua in x_0, grazie al **Lemma 1.2.** ■

I risultati precedenti possono essere precisati e completati:

Teorema 1.2 *Se $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, le proprietà seguenti si equivalgono:*

i) $\exists (x_0 \in E,\ \varrho_0 > 0,\ \lambda_0 \in \mathbb{R}) :\ \forall x \in \Sigma(x_0, \varrho_0)$ *si ha* $\varphi(x) \leq \lambda_0$*;*
ii) $\exists x_0 \in E :\ \varphi$ *è continua per* $x = x_0$*;*
iii) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) \neq \emptyset$*, e* φ *è continua in* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$*;*
iv) $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\ \varphi) \neq \emptyset$.

Dim.: le implicazioni $i) \Rightarrow ii)$ e $i) \Rightarrow iii)$ sono conseguenze, rispettivamente, del **Lemma 1.2** e della **Proposizione 1.2**; è poi evidente che $ii) \Rightarrow i)$ e che $iii) \Rightarrow ii)$; ne viene che le proposizioni $i), ii), iii)$ sono equivalenti.
Per concludere la dimostrazione, verifichiamo che $i)$ e $iv)$ si equivalgono.
$i) \Rightarrow iv)$: l'insieme $\{\,[x;\lambda] \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \Sigma(x_0,\varrho_0)$ e $\lambda > \lambda_0\}$ è aperto, non vuoto, e contenuto in $\mathrm{epi}\,\varphi$;
$iv) \Rightarrow i)$: se $[x_0;\overline{\lambda}] \in \mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi)$, allora $\exists$ ($\varrho_0 > 0$ e $\delta > 0$) tali che se $\|x - x_0\| < \varrho_0$ e $|\lambda - \overline{\lambda}| < \delta$, allora $[x;\lambda] \in \mathrm{epi}\,\varphi$, cioè $\varphi(x) \leq \lambda < \overline{\lambda} + \delta$, da cui la $i)$ (con $\lambda_0 := \overline{\lambda} + \delta$). ■

In dimensione *finita*, vale un risultato più forte:

Proposizione 1.3 *Se:* $\dim E = n < +\infty$*,* φ *è convessa, ed* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$ *non è vuoto, allora* φ *è continua in* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$.

Dim.: fissato $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$, $\exists \varrho_0 > 0$ tale che $\Sigma(x_0, 2\varrho_0) \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$, cosicché $x_i := x_0 + \varrho_0\, e^{(i)} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$ per $i = 1, \ldots, n$. L'insieme

$$A \;:=\; \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i > 0\ (i = 0, \ldots, n)\ ,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\} = \left\{ x_0 + \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{(i)} \;\middle|\; \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1 \right\}$$

è aperto (la verifica è immediata). Inoltre, φ è superiormente limitata su A: in effetti, posto $M := \max_{0 \leq i \leq n} \varphi(x_i)$, si ha, $\forall x \in A$, $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) \leq M$. La conclusione segue dal **Teorema 1.2.** ■

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.3** La **Proposizione 1.3** implica, in particolare, che se φ è convessa e $\dim E < +\infty$, allora $(\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) = \emptyset) \Longleftrightarrow (\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) = \emptyset)$. Quando $\dim E = +\infty$, l'ultima biimplicazione scritta *non è più vera*: dal **Teorema 1.2** risulta che $(\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) = \emptyset) \Longrightarrow (\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) = \emptyset)$; ma *non è detto* che se $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) = \emptyset$ allora $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) = \emptyset$, o, equivalentemente, che si abbia $(\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) \neq \emptyset) \Longrightarrow (\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) \neq \emptyset)$. Basta assumere come φ un funzionale lineare non continuo definito su tutto E (si veda il **Lemma 1.1**): se fosse $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) \neq \emptyset$, φ dovrebbe essere continua $\forall x_0 \in \mathrm{dom}\,\varphi = E$ (per il **Teorema 1.2**), contrariamente all'ipotesi. ■

<u>Osservazione</u> **1.4** Se $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) \neq \emptyset$, allora risulta:

$$\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) = \{x \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \,:\, [x;\lambda] \in \mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi)\}\ ;$$

$$\mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi) = \{\,[x;\lambda] \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) \text{ e } \lambda > \varphi(x)\}\ .$$

Le uguaglianze precedenti si giustificano facilmente, se si osserva che:

• per il **Teorema 1.2**, si ha che $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi) \neq \emptyset$, e φ è continua in $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$; è poi immediato controllare che se $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\varphi)$ e $\lambda > \varphi(x)$, allora $[x;\lambda] \in \mathrm{int}(\mathrm{epi}\,\varphi)$;

• è ovvia la verifica che se $[x;\lambda]$ è *interno* ad $\mathrm{epi}\,\varphi$, allora x è interno a $\mathrm{dom}\,\varphi$ e $\lambda > \varphi(x)$. ∎

1.2.2 Funzioni s.c.i..

Dimostriamo intanto, sempre nel caso in cui E sia uno spazio normato, le seguenti proprietà, enunciate in [Br], **I.3** per un generico spazio topologico:

Proposizione 1.4 *i) φ è s.c.i. se e solo se* $\mathrm{epi}\,\varphi$ *è chiuso in $E \times \mathbb{R}$;*

ii) φ è s.c.i. se e solo se, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme $[\varphi \leq \lambda]$ è chiuso in E;

iii) se φ_1, φ_2 sono s.c.i., lo è ogni loro combinazione lineare a coefficienti α, β non negativi;

iv) se $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di funzioni s.c.i., anche il loro inviluppo superiore φ è s.c.i.;

v) se dom *φ è compatto e φ è s.c.i., φ ammette minimo su E.*

Dim.: *i)*: se φ è s.c.i. e $[x_n;\lambda_n] \subset \mathrm{epi}\,\varphi$ è tale che $[x_n;\lambda_n] \to [x;\lambda]$, si ha che $x_n \to x$ in E e $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{R}$. Pertanto, $\varphi(x) \leq \liminf_n \varphi(x_n) \leq \liminf_n \lambda_n = \lambda$, dunque $[x;\lambda] \in \mathrm{epi}\,\varphi$. Viceversa, se $\mathrm{epi}\,\varphi$ è chiuso, fissato ad arbitrio $x \in E$, sia $\{x_n\} \subset E$ tale che $x_n \to x$. Posto $\lambda := \liminf_n \varphi(x_n)$, si può estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\lim_k \varphi(x_{n_k}) = \lambda$. Ma allora la successione $\{\,[x_{n_k};\varphi(x_{n_k})]\,\} \subset \mathrm{epi}\,\varphi$ tende a $[x;\lambda]$ in $E \times \mathbb{R}$, quindi $[x;\lambda] \in \mathrm{epi}\,\varphi$, cioè $\varphi(x) \leq \lambda = \liminf_n \varphi(x_n)$;

ii): se φ è s.c.i. ed $\{x_n\} \subset [\varphi \leq \lambda]$ è tale che $x_n \to x$, si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, che $\varphi(x_n) \leq \lambda$, dunque $\varphi(x) \leq \lambda$, cioè $x \in [\varphi \leq \lambda]$. Viceversa, supponiamo che $[\varphi \leq \lambda]$ sia chiuso $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; data una successione $\{x_n\} \subset E$ convergente ad x, se ne estragga una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\varphi(x_{n_k}) \to \lambda := \liminf_n \varphi(x_n)$. Allora, $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \,:\, \forall k > k_\varepsilon$ risulta $\varphi(x_{n_k}) < \lambda + \varepsilon$; poiché $x_{n_k} \in [\varphi \leq \lambda + \varepsilon]$, e $x_{n_k} \to x$, si ha che $x \in [\varphi \leq \lambda + \varepsilon]$, cioè $\varphi(x) \leq \varepsilon + \liminf_n \varphi(x_n)$, da cui, per l'arbitrarietà di ε, $\varphi(x) \leq \liminf_n \varphi(x_n)$;

iii): evidente, per le proprietà del minimo limite;

iv): fissata $\{x_n\} \subset E$ con $x_n \to x$, si ha $\varphi_\lambda(x) \leq \liminf_n \varphi_\lambda(x_n) \leq \liminf_n \varphi(x_n)\ \ \forall \lambda \in \Lambda$, da cui $\varphi(x) \leq \liminf_n \varphi(x_n)$;

v): sia $\{x_n\} \subset \mathrm{dom}\,\varphi$ una successione tale che $\varphi(x_n) \to \lambda := \inf_{x \in E} \varphi(x)$. poiché $\mathrm{dom}\,\varphi$ è compatto, è possibile estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un $x \in \mathrm{dom}\,\varphi$. Ma allora $\lambda \leq \varphi(x) \leq \liminf_k \varphi(x_{n_k}) = \lambda$, il che conclude la dimostrazione. ∎

Infine, diamo un risultato di continuità, all'interno del proprio dominio, delle funzioni convesse, proprie, s.c.i., definite su uno spazio di BANACH:

Proposizione 1.5 *Se E è uno spazio di* BANACH, *e φ è convessa, propria e s.c.i., allora φ è continua in* $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$.

Dim.: assumendo che $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi) \neq \emptyset$ (altrimenti, non c'è nulla da dimostrare), supponiamo dapprima che $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$, e fissiamo $\lambda > \varphi(0)$. Posto $C := [\varphi \leq \lambda]$, si ha intanto che C è un convesso chiuso (si vedano le **Proposizioni 1.1** e **1.4**), e non vuoto (dato che $0 \in C$). Inoltre, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,C$: in effetti, $\forall y \in E$, dato che la restrizione di φ alla retta $\{ty \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ è continua nell'origine (**Proposizione 1.3**), scelto $\varepsilon \in \left]0, \lambda - \varphi(0)\right[$ si ha che $\exists \overline{n}\ :\ \forall n > \overline{n}$ risulta $\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right| < \varepsilon$, quindi $\varphi\left(\frac{y}{n}\right) < \varphi(0) + \varepsilon < \lambda$, da cui $\frac{y}{n} \in C$, cioè $y \in n\,C$. Per il Lemma di BAIRE ([BR], **Lemma II.1**), ciò implica che $\exists n_0\ :\ \operatorname{int}(n_0\,C) \neq \emptyset$; ne viene che anche $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, e poiché φ è superiormente limitata in C, quindi in $\operatorname{int} C$, la **Proposizione 1.2** mostra che φ è continua in $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$.

Il caso generale si riconduce immediatamente a quello ora trattato: se $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$, basta porre $\overline{\varphi}(x) := \varphi(x + x_0)$, ed osservare che anche $\overline{\varphi}$ è convessa, propria, s.c.i., e $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\overline{\varphi})$. Per quanto dimostrato più sopra, $\overline{\varphi}(x)$ è continua in $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\overline{\varphi})$, e ciò implica evidentemente la continuità di φ in $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi) = x_0 + \operatorname{int}(\operatorname{dom}\overline{\varphi})$. ∎

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.5** Nella **Proposizione 1.5**, l'ipotesi di *completezza* di E non può essere eliminata, come mostra l'esempio seguente. Si ponga $E := \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists \overline{n} = \overline{n}(x)\ :\ x_n = 0\ \ \forall n > \overline{n} \right\}$, con $\|x\| := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ (è uno spazio normato, che però è evidentemente non completo), e si definisca $\varphi : E \to \mathbb{R}$ come segue: $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|x_n|$. È evidente che φ è convessa. Per dimostrare che φ è anche s.c.i. nel generico punto $x = \{x_n\} \in E$, sia intanto $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n = 0\ \forall n > N$, e, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, si ponga $\varepsilon_0 := \frac{2\varepsilon}{N(N+1)}$. Se $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, è una successione in E che converge ad x, $\exists k_0 :\ \forall k > k_0$ si ha $\|x^{(k)} - x\| < \varepsilon_0$, quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < |x_n^{(k)}| + \varepsilon_0$, da cui $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} n|x_n| < \sum_{n=1}^{N} (n|x_n^{(k)}| + n\varepsilon_0) \leq \varphi(x^{(k)}) + \varepsilon$, e, infine, $\varphi(x) < \varepsilon + \liminf_k \varphi(x^{(k)})$, quindi $\varphi(x) \leq \liminf_k \varphi(x^{(k)})$.

D'altronde, φ *non è continua* (ad esempio, nell'origine): se si sceglie $x^{(k)} := \frac{e^{(k)}}{k}$, si ha che $x^{(k)} \to 0$, mentre $\varphi(x^{(k)}) = 1$ e $\varphi(0) = 0$. ∎

1.2.3 Funzione coniugata.

Poniamo la seguente definizione:

Definizione 1.4 *i) se φ è propria, la sua* **coniugata** *(o* **polare**, *o* **trasformata di** YOUNG-FENCHEL*)* $\varphi^* : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *è data,* $\forall y \in E'$, *da:*

$$\varphi^*(y) := \sup_{x\in E}\{\langle y, x\rangle - \varphi(x)\} = \sup_{x\in \operatorname{dom}\varphi} \{\langle y, x\rangle - \varphi(x)\}\,;$$

ii) se φ^* è propria, si definisce **biconiugata** *(o* **bipolare***) di φ la funzione $\varphi^{**} : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ data da*

$$\varphi^{**}(x) := \sup_{y \in E'} \{\langle y, x\rangle - \varphi^*(y)\} = \sup_{y \in \operatorname{dom} \varphi^*} \{\langle y, x\rangle - \varphi^*(y)\} ;$$

è facile verificare che risulta $\varphi^{**}(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in E$. ∎

Il ruolo della funzione coniugata nei problemi di minimo è chiarito dalla proprietà (evidente) che $\varphi^*(0) = -\inf_{x\in E} \varphi(x) = -\inf_{x\in \operatorname{dom} \varphi} \varphi(x)$.

Altre conseguenze immediate delle definizioni (valide $\forall y \in E'$):
$(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \ \forall x \in E) \Longrightarrow (\varphi_1^*(y) \geq \varphi_2^*(y))$;
posto $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, si ha $\widetilde{\varphi}^*(y) = \varphi^*(-y))$;
$\forall \lambda > 0 \ , \ (\lambda\varphi)^*(y) = \lambda\varphi^*(y/\lambda)$;
$\forall(\lambda > 0, \ z \in E, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \overline{y} \in E')$, posto $\varphi_{\lambda,z,\mu,\overline{y}}(x) := \varphi(\lambda x + z) + \mu + \langle \overline{y}, x\rangle$, si ha che $\varphi^*_{\lambda,z,\mu,\overline{y}}(y) = \varphi^*((y - \overline{y})/\lambda) - \langle y - \overline{y}, z\rangle/\lambda - \mu$.

Vale inoltre la proprietà ([Br], **Proposizione I.9**):

Proposizione 1.6 φ^* è sempre *convessa e s.c.i.; se φ è convessa, propria e s.c.i., allora anche φ^* è propria.*[3] ∎

È *fondamentale* il teorema di Fenchel-Moreau ([Br], **Teorema I.10**):

Teorema 1.3 *Se φ è convessa, propria e s.c.i., allora $\varphi^{**} = \varphi$.* ∎

Si osservi anche il seguente corollario al risultato precedente:

Corollario 1.1 *Se φ è propria e tale che anche φ^* è propria, allora, $\forall x \in E$,*
$$\varphi^{**}(x) = \max\{\psi(x) \mid \psi \text{ convessa, s.c.i., e tale che } \psi(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in E\}.$$
In particolare, $I_K^{**} = I_C$, dove[4] *$C := \overline{\operatorname{conv} K}$.*

Dim.: immediata, perché se ψ è convessa, s.c.i., propria, e $\psi(x) \leq \varphi(x)$ per ogni $x \in E$, allora $\psi(x) = \psi^{**}(x) \leq \varphi^{**}(x)$; d'altronde, se φ^* è propria, allora φ^{**} è convessa, s.c.i., propria e $\varphi^{**}(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in E$. ∎

Alcuni esempi con $E = \mathbb{R}$.

• **1.** Se $\varphi(x) := x$, si ha $\varphi^*(y) = I_{\{1\}}(y)$. Dalle proprietà enunciate in precedenza, si deduce che, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, posto $\varphi_{a,b}(x) := ax + b$, risulta $\varphi^*_{a,b}(y) = I_{\{a\}}(y) - b$ (d'altronde, semplice conseguenza della definizione). Si veda anche il successivo Esempio **12.** È immediata poi la verifica diretta (superflua, per il teorema di Fenchel-Moreau, ma utile come esercizio; ciò

[3] *Non è però necessario* che φ sia convessa oppure s.c.i. perché φ^* sia propria: ad esempio, se φ è una *qualunque* funzione propria ed inferiormente limitata, si è visto più sopra che $0 \in \operatorname{dom} \varphi^*$.

[4] con "conv K si indica il *convessificato* di K, cioè l'intersezione di tutti i convessi contenenti K.

vale per molti degli esempi seguenti) che $\varphi^{**}_{a,b}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{yx - \varphi^*_{a,b}(y)\} = ax - \varphi^*_{a,b}(a) = ax + b = \varphi_{a,b}(x)$.

• **2.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $\varphi_{a,b}(x) := I_{]\,a,b\,[}(x)$; allora

$$\varphi^*_{a,b}(y) = \begin{cases} ay & \text{se } y \le 0, \\ by & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

La stessa espressione ha anche la coniugata di $\psi_{a,b}(x) := I_{[a,b]}(x)$. Si ha quindi $\varphi^{**}_{a,b}(x) = \psi^{**}_{a,b}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{xy - \varphi^*_{a,b}(y)\} = I_{[a,b]}(x) = \psi_{a,b}(x)$ (il controllo è immediato; ma è comunque conseguenza del **Teorema 1.3**). Se, in particolare, $a = -1$, $b = 1$, si ha quindi $\varphi^*_{-1,1}(y) = |y|$. Ne viene anche (per il **Teorema 1.3**, e grazie alle proprietà elementari richiamate più sopra) che, posto $\xi(x) := |x|$, si ha $\xi^*(y) = I_{[-1,1]}(y)$, e che inoltre, posto, per $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $\xi_{\alpha,\beta}(x) := \alpha|x| + \beta$, risulta $\xi^*_{\alpha,\beta}(y) = I_{[-\alpha,\alpha]}(y) - \beta$.

• **3.** Sia $\varphi_a(x) := I_{\{a\}}(x)$; in questo caso, risulta ovviamente che $\varphi^*_a(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - \varphi_a(x)\} = ay$; si confronti con l'Esempio **1**, con $b = 0$.

• **4.** Poniamo, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

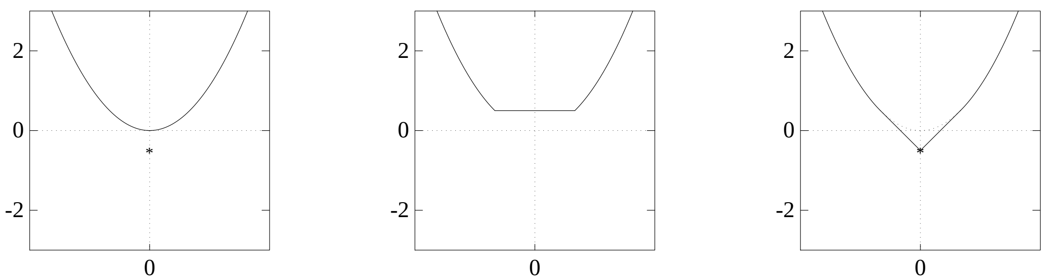
Si vede facilmente che

$$\varphi^*_\alpha(y) = \max\left\{\tfrac{1}{2}y^2; -\alpha\right\},$$

da cui, se $\alpha \ge 0$, $\varphi^*_\alpha(y) = \frac{1}{2}y^2$. Se invece $\alpha < 0$ si ha (verifica semplice; d'altronde, si ricordi il **Corollario 1.1**) che

$$\varphi^{**}_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha + |x|\sqrt{-2\alpha} & \text{se } |x| \le \sqrt{-2\alpha}\,, \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } |x| > \sqrt{-2\alpha}\,; \end{cases}$$

perciò, $\quad (\varphi^{**}_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x)) \iff (\alpha = 0)$. Un esempio:



$\varphi_{-.5}(x)$ $\qquad$ $\varphi^*_{-.5}(y)$ $\qquad$ $\varphi^{**}_{-.5}(x)$

• **5.** Fissato $p > 0$, è facile verificare che, posto $\varphi_p(x) := |x|^p/p$, valgono i seguenti risultati:

<u>$p > 1$</u>: $\varphi^*_p(y) = |y|^q/q = \varphi_q(y)$. In particolare, φ_p è <u>*formalmente autoconiugata*</u> (cioè, l'espressione analitica di φ^*_p coincide con quella di φ_p) se e solo se $p = 2$.

$\underline{p = 1}$: questo caso rientra nell'ESEMPIO **2**.

$\underline{0 < p < 1}$: si verifica subito che $\varphi_p^*(y) = I_{\{0\}}(y)$, quindi $\varphi_p^{**}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, (si rivedano l'ESEMPIO **3** ed il **Corollario 1.1**).

- **6.** Fissato $p > 0$, sia

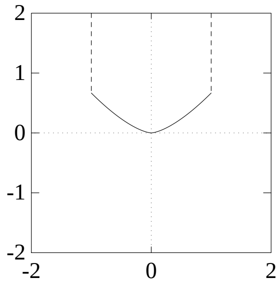
$$\varphi_p(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}|x|^p & \text{se } |x| \le 1, \\ +\infty & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

poiché $\varphi_p^*(0) = 0$ e $\varphi_p^*(-y) = \varphi_p^*(y)$, è facile concludere che:

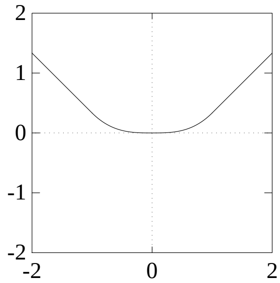
$\underline{p > 1}$: allora

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}|y|^q & \text{se } |y| \le 1, \\ |y| - \dfrac{1}{p} & \text{se } |y| > 1; \end{cases}$$

un esempio:



$\varphi_{1.5}(x)$

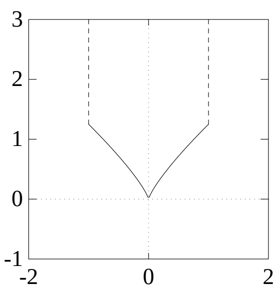


$\varphi_{1.5}^*(y)$

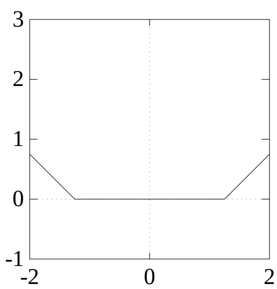
$\underline{0 < p < 1}$: per $y \ge 0$, la funzione $x \mapsto xy - x^p/p$ è convessa nell'intervallo $[0, 1]$, quindi assume il suo massimo o per $x = 0$ o per $x = 1$, da cui

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \le \dfrac{1}{p}, \\ |y| - \dfrac{1}{p} & \text{se } |y| > \dfrac{1}{p}; \end{cases}$$

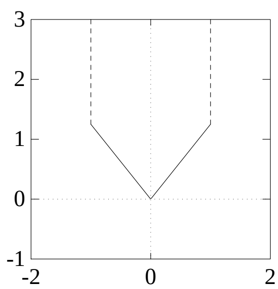
è poi facile verificare (direttamente, oppure mediante il **Corollario 1.1**) che $\varphi_p^{**}(x) = \dfrac{1}{p}|x|$ *se* $|x| \le 1$, mentre $\varphi^{**} = +\infty$ *se* $|x| > 1$. Un esempio:



$\varphi_{.8}(x)$



$\varphi_{.8}^*(y)$



$\varphi_{.8}^{**}(x)$

$\underline{p = 1}$: si verifica subito che

$$\varphi_1^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \le 1, \\ |y| - 1 & \text{se } |y| > 1. \end{cases}$$

• **7.** Fissato $p > 0$, sia

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} \frac{1}{p}x^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È immediata la verifica che:

<u>$p > 1$</u>: allora

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{q}y^q & \text{se } y \geq 0, \\ 0 & \text{se } y < 0; \end{cases}$$

<u>$p = 1$</u>: risulta

$$\varphi_1^*(y) = I_{\left]-\infty,1\right]}(y)\,.$$

<u>$0 < p < 1$</u>: si ha

$$\varphi_p^*(y) = I_{\left]-\infty,0\right]}(y)\,;$$

di conseguenza, risulta (si confronti anche il **Corollario 1.1**)

$$\varphi_p^{**}(x) = I_{\left[0,+\infty\right[}(x)\,.$$

• **8.** Fissato $p > 0$, sia

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} -\frac{1}{p}x^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

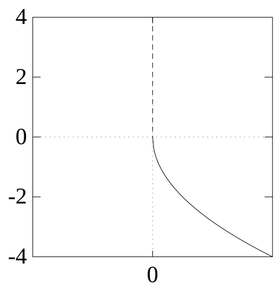
Si controlla subito che:

<u>$p > 1$</u>: allora $\varphi_p^*(y) \equiv +\infty$;

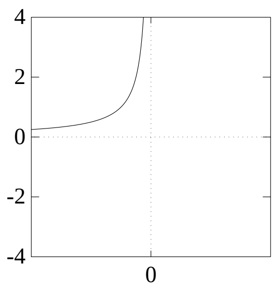
<u>$0 < p < 1$</u>: si ha

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{q}|y|^q & \text{se } y < 0, \\ +\infty & \text{se } y \geq 0; \end{cases}$$

un esempio:



$\varphi_{.5}(x)$



$\varphi_{.5}^*(y)$

<u>$p = 1$</u>: risulta

$$\varphi_1^*(y) = I_{\left]-\infty,-1\right]}(y)\,.$$

<u>ALCUNI ESEMPI CON E SPAZIO NORMATO</u>.

Alcuni degli esempi precedenti (come gli ESEMPI **5, 6**) possono essere adattati al caso di una funzione definita su uno *spazio normato*, anche utilizzando la seguente

Proposizione 1.7 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una funzione convessa, propria, s.c.i. e* pari. *Dato uno spazio normato* E*, si definisca* $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *ponendo,* $\forall x \in E$*,* $\varphi(x) := f(\|x\|)$*; valgono i seguenti risultati:*
i) φ *è convessa, propria, s.c.i.;*
ii) $\forall y \in E'$*,* $\varphi^*(y) = f^*(\|y\|_*)$.

Dim.: *i*) poiché f è convessa, propria e pari, $\operatorname{dom} f$ è un intervallo non vuoto, simmetrico rispetto all'origine (eventualmente, ridotto a $\{0\}$); quindi $0 \in \operatorname{dom} f$ e, di conseguenza, $0 \in \operatorname{dom}\varphi$, dunque φ *è propria.* È poi evidente che φ è s.c.i.: se $x_n \to x_0$ in E, si ha $\|x_n\| \to \|x_0\|$, da cui, dato che f è s.c.i., $\varphi(x_0) = f(\|x_0\|) \leq \liminf_n f(\|x_n\|) = \liminf_n \varphi(x_n)$.[5]

Per dimostrare che φ è *convessa*, si osservi che, $\forall x_1, x_2 \in E$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ risulta, per il teorema di FENCHEL-MOREAU applicato ad f, ed utilizzando la convessità e la simmetria di f ed f^*:

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|) = f^{**}(\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|) =$$

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \{\|\lambda x_1 + (1-\lambda x_2)\|\,\tau - f^*(\tau)\} = \sup_{\tau\geq 0} \{\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|\,\tau - f^*(\tau)\} \leq$$

$$\sup_{\tau\geq 0} \{\lambda\|x_1\|\,\tau + (1-\lambda)\|x_2\|\,\tau - \lambda f^*(\tau) - (1-\lambda)f^*(\tau)\} \leq$$

$$\lambda \sup_{\tau\geq 0} \{\|x_1\|\,\tau - f^*(\tau)\} + (1-\lambda)\sup_{\tau\geq 0} \{\|x_2\|\,\tau - f^*(\tau)\} =$$

$$\lambda\, f^{**}(\|x_1\|) + (1-\lambda)\, f^{**}(\|x_2\|) = \lambda\,\varphi(x_1) + (1-\lambda)\,\varphi(x_2)\,.$$

ii) Utilizzando ancora la simmetria di f, si ottiene, $\forall y \in E'$,

$$\varphi^*(y) = \sup_{x\in E} \{\langle y, x\rangle - f(\|x\|)\} = \sup_{t\geq 0} \left\{ \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=t}} \{\langle y, x\rangle - f(t)\} \right\} =$$

$$\sup_{t\geq 0}\{\|y\|_*\, t - f(t)\} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|y\|_*\, t - f(t)\} = f^*(\|y\|_*)\,. \ \blacksquare$$

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.6** La definizione di φ nella **Proposizione 1.7** fa intervenire *soltanto* i valori che f assume per $t \geq 0$, mentre $f^*(\tau)$ *dipende anche* dai valori di $f(t)$ per $t < 0$. È quindi ovvio che la **Proposizione 1.7** non può valere se non si richiede qualche relazione tra i valori assunti da $f(t)$ per $t > 0$ e quelli assunti per $t < 0$; a questo risponde appunto la richiesta che f sia pari. Qualche esempio, in cui f è convessa, propria, s.c.i., ma *non pari*:

i) se $\operatorname{dom} f \subset \{t < 0\}$ (ad esempio, se f è la funzione indicatrice dell'intervallo $[a, b]$, con $-\infty \leq a \leq b < 0$), φ <u>*non è propria*</u>;

[5] Si osservi che la dimostrazione della semicontinuità inferiore di φ *non richiede* che f sia pari.

ii) posto $f(t) := (t-1)^2$, e fissato $x \in E$ con $\|x\| = 1$, si ha che $\varphi\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) = \varphi(0) = 1$, mentre $\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(-x) = \varphi(x) = f(1) = 0$; quindi, φ non è convessa;

iii) posto $f(t) := t$, da cui $\varphi(x) = \|x\|$, si ha che φ è convessa, propria e continua, quindi s.c.i.. Tuttavia, si ottiene che, $\forall y \in E'$,

$$\varphi^*(y) = \sup_{x\in E} \left(\langle y, x\rangle - \|x\|\right) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=\lambda}} \left(\langle y, x\rangle - \lambda\right) \right\} = \sup_{\lambda\geq 0} \lambda(\|y\|_* - 1)\,;$$

si ha quindi che $\varphi^*(y) = 0 \iff 0 \leq \|y\|_* \leq 1$, mentre $f^*(\tau) = I_{\{1\}}(\tau)$: cosicché $\varphi^*(y) \neq f^*(\|y\|_*)$. ■

Dalla **Proposizione 1.7** si ottengono, in particolare, i seguenti risultati:

- **9.** Fissato $p > 0$, si ponga $f_p(t) := |t|^p/p$ e $\varphi_p(x) := f_p(\|x\|)$; allora:

$p > 1$: si ha $\varphi_p^*(y) = \|y\|_*^q/q$. Quindi, φ_p è *formalmente autoconiugata* se e solo se $p = 2$ (ed autoconiugata se E è uno spazio di Hilbert identificato al suo duale).

$p = 1$: risulta $\varphi_1^*(y) = I_{[-1,1]}(\|y\|_*) = I_{\overline{\Sigma_*(0,1)}}(y)$ (si riveda l'Esempio **2**).

$0 < p < 1$: si ha $\varphi_p^*(y) = I_{\{0\}}(y)$, quindi $\varphi_p^{**}(x) = 0 \quad \forall x \in E$ (si riveda l'Esempio **3**).

- **10.** Fissato $p > 0$, posto

$$f_p(t) := \begin{cases} \frac{1}{p}|t|^p & \text{se } |t| \leq 1, \\ +\infty & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

e $\varphi_p(x) := f_p(\|x\|)$, ne viene che:

$p > 1$: allora

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{q}\|y\|_*^q & \text{se } \|y\|_* \leq 1, \\ \|y\|_* - \frac{1}{p} & \text{se } \|y\|_* > 1; \end{cases}$$

$0 < p < 1$: in questo caso,

$$\varphi_p^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|y\|_* \leq \frac{1}{p}, \\ \|y\|_* - \frac{1}{p} & \text{se } \|y\|_* > \frac{1}{p}; \end{cases}$$

inoltre,

$$\varphi_p^{**}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}\|x\| & \text{se } \|x\| \leq 1, \\ +\infty & \text{se } \|x\| > 1. \end{cases}$$

$p = 1$: si ha subito che

$$\varphi_1^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|y\|_* \leq 1, \\ \|y\|_* - 1 & \text{se } \|y\|_* > 1. \end{cases}$$

• **11.** Fissato $p > 0$, sia

$$\tilde{f}_p(t) := \begin{cases} \frac{1}{p}|t|^p & \text{se } t \neq 0, \\ +\infty & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

e si ponga $\psi_p(x) := \tilde{f}_p(\|x\|)$.
In questo caso, non è applicabile la **Proposizione 1.7**, dato che $\tilde{f}_p$ non è convessa né s.c.i.. È tuttavia immediato verificare che, se φ_p è come nell'Esempio **9**, risulta:

$$\psi_p^*(y) = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{1}{p}\|x\|^p \right\} = \sup_{x \in E} \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{1}{p}\|x\|^p \right\} = \varphi_p^*(y) \ .$$

Un esempio rilevante, anche per il seguito:

• **12.** Dato un sottoinsieme non vuoto $K \subset E$, la coniugata I_K^* della sua funzione indicatrice è detta **funzione d'appoggio** di K, e verifica evidentemente $I_K^*(y) = \sup_{x \in K} \langle y, x \rangle$; è sempre propria ($I_K^*(0) = 0$), ed inoltre è *positivamente omogenea* (e *non negativa se* $0 \in K$). Per quanto riguarda I_K^{**}, si veda il **Corollario 1.1**; è chiaro inoltre che $I_K^{**}(x) \geq \langle 0, x \rangle - I_K^*(0) = 0$, e, d'altra parte, se $x \in K$ risulta $\langle y, x \rangle - I_K^*(y) \leq 0$; ne viene, in definitiva, che

$$\forall x \in E, \quad x \in K \Longrightarrow I_K^{**}(x) = I_K(x) = 0,$$

mentre l'implicazione inversa è falsa, come mostra già l'Esempio **2**.

In particolare, fissato $x_0 \in E$, si ha evidentemente che $I_{\{x_0\}}^*(y) = \langle y, x_0 \rangle$ $\forall y \in E'$; quindi, posto, per $y_0 \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ fissati, $\varphi_{y_0,\lambda}(x) := \langle y_0, x \rangle + \lambda$, si deduce subito che $\varphi_{y_0,\lambda}^*(y) = I_{\{y_0\}}(y) - \lambda$ (si rivedano gli Esempi **1**, **2**, **3**).

1.2.4 Funzioni convesse s.c.i. e problemi di minimo.

La **Proposizione 1.4**, v) fornisce un primo risultato relativo all'esistenza del minimo in E di una funzione φ s.c.i., ma nell'ipotesi (alquanto restrittiva) che dom φ sia *compatto*. Ricordiamo ora un altro risultato ([Br], **Corollario III.20**), che evidenzia l'*importanza fondamentale* delle funzioni convesse s.c.i. nei problemi di minimo su convessi di spazi riflessivi:

Proposizione 1.8 *Se sono soddisfatte le ipotesi seguenti:*

i) E è uno spazio di Banach *riflessivo;*
ii) $K \neq \emptyset$ è un convesso chiuso $\subset E$;
iii) $\varphi : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, propria, s.c.i.;
iv) se K non è limitato, φ è "coerciva su K, cioé tale che

$$\lim_{\substack{x \in K \\ \|x\| \to +\infty}} \varphi(x) = +\infty \ ,$$

allora φ ammette minimo su K. ∎

<u>Osservazione</u> **1.7** Le ipotesi della **Proposizione 1.8** sono tutte *essenziali*. I controesempi sono evidenti già con $E = \mathbb{R}$ se: K non è chiuso; oppure φ non è s.c.i.; oppure K non è limitato e φ non è coerciva. Se $K = \emptyset$ o $\operatorname{dom}\varphi = \emptyset$, non servono commenti. Restano da esaminare i casi in cui *non* vale una (ed *una sola*) delle ipotesi: E riflessivo; K convesso; φ convessa.

α) E <u>non riflessivo</u>: si ponga $E := C^0([0,1])$, $K := \{x \in E \mid x(0) = 0, \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$ (è un sottospazio chiuso di E). Fissato un elemento x_0 in $E \setminus K$ con $x_0(0) = 0$, definiamo $\varphi(x) := \|x - x_0\|$. Mostriamo intanto che $\inf_{x\in K}\varphi(x) = d(x_0, K) = \left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|$. Infatti, da un lato si ha, $\forall x \in K$, che $\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 \{x_0(t) - x(t)\}\,dt\right| \le \varphi(x)$, da cui $d(x_0, K) \ge \left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|$; inoltre, posto, $\forall \alpha > 0$, $w_\alpha(t) := x_0(t) - (1+\alpha)t^\alpha \int_0^1 x_0(t)\,dt$, si ha evidentemente $w_\alpha \in K$, quindi $d(x_0, K) \le \varphi(w_\alpha) = (1+\alpha)\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|$, da cui, per l'arbitrarietà di α, l'uguaglianza cercata. Mostriamo che l'estremo inferiore non può essere raggiunto. Infatti, se, per assurdo, $\exists z \in K$ tale che $\|z - x_0\| = d(x_0, K)$, allora $\max_{0\le t\le 1}|z(t) - x_0(t)| = \left|\int_0^1 \{z(t) - x_0(t)\}\,dt\right|$, che è possibile solo se $z(t) - x_0(t)$ è costante; ma poiché $z(0) - x_0(0) = 0$, ciò implica $x_0(t) = z(t)$, il che è contrario all'ipotesi $x_0 \notin K$. Quindi, *non esiste un punto in K che abbia distanza minima da x_0.*

β) K <u>non convesso</u>: si ponga $E := \ell^2$, $K := \{x \in \ell^2 \mid |x| = 1\}$, e si indichi con $\varphi : K \to \mathbb{R}$ la restrizione a K della funzione (convessa e continua su E) $x \mapsto ||x||_\infty := \sup_n |x_n|$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $e^{(n)}$ l'n-esimo versore di ℓ^2; posto $x^{(n)} := \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n e^{(k)}$, si ha $|x^{(n)}| = 1$, quindi $x^{(n)} \in K$, mentre $||x^{(n)}||_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Pertanto, $\inf_{x\in K}\varphi(x) = 0$, e di conseguenza $\varphi(x)$ *non ha minimo su K.*

γ) φ <u>non convessa</u>: si ponga $E := H_0^1(0,1)$, con $\|x\|_E^2 := \int_0^1 (x'(t))^2\,dt$, $K := \overline{\Sigma(0,1)}$, e, $\forall x \in E$,

$$\varphi(x) := \int_0^1 \left\{x^2(t) + \Big|1 - |x'(t)|\Big|\right\}dt\,.$$

Si controlla facilmente che φ è *continua* su E (nella topologia forte), non convessa (se $\widetilde{x}(t) := \frac{1}{2} - \left|t - \frac{1}{2}\right|$, si ha $\|\widetilde{x}\| = 1$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}(-\widetilde{x})\right) = \varphi(0) = 1$, mentre $\frac{1}{2}\varphi(\widetilde{x}) + \frac{1}{2}\varphi(-\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{x}) = \frac{1}{12}$), ed inoltre *strettamente positiva* (se $x_0 \in E$ è tale che $\varphi(x_0) = 0$, deve essere $x_0(t) = 0$ e $|x_0'(t)| = 1$ *q.o.* in $]0,1[$, il che è evidentemente impossibile). D'altra parte, definendo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)}(t)$ come il prolungamento per periodicità a tutto $[0,1]$ della funzione che vale t su $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ e $\dfrac{1}{n} - t$ su $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$, si ha che $x^{(n)} \in K$ (dato che $\left\|x^{(n)}\right\| = 1$); ma $\varphi(x^{(n)}) \to 0$, cosicché $\inf_{x\in E}\varphi(x) = 0$, e φ *non ha minimo su K.* ∎

<u>Osservazione</u> **1.8** *i*) Problemi "generalizzati di minimo per una funzione φ (quasi) generica si possono formulare in termini della *convessificata s.c.i.* di φ, cioé φ^{**}, che, *quando φ^* è propria*, è convessa, propria e s.c.i.; si rivedano la **Proposizione 1.6** ed il **Corollario 1.1**.

ii) La **Proposizione 1.8** risolve un problema di minimo *vincolato* per φ (il vincolo essendo costituito dal convesso chiuso non vuoto K), in cui, in particolare, rientra il problema di minimo *libero*: cercare il minimo di φ in *tutto* E. In realtà, anche il problema di minimo vincolato si può scrivere come un problema di minimo libero, relativo però alla somma di φ e della funzione indicatrice I_K di K. Rientra quindi nel problema (non semplice) di studiare il minimo della *somma* di due funzioni (ad esempio convesse). ∎

Un primo fondamentale risultato in questa direzione è dato dal *teorema di dualità* di Fenchel ([Br], **Teorema I.11**):

Proposizione 1.9 *Siano φ, ψ due funzioni convesse su E, ed esista un punto $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi \cap \operatorname{dom}\psi$ in cui φ è continua; allora*

$$\inf_{x\in E}\{\varphi(x)+\psi(x)\} = \sup_{y\in E'}\{-\varphi^*(-y)-\psi^*(y)\} = \max_{y\in E'}\{-\varphi^*(-y)-\psi^*(y)\}. \ \blacksquare$$

Per completezza, diamo la dimostrazione di alcune proprietà, in parte utilizzate (ma solo enunciate) in [Br](**Lemma I.4**) nella prova della proposizione precedente.

Proposizione 1.10 *Sia K un convesso di E. Allora:*

i) $\overline{K}$ è convesso;

ii) $\operatorname{int} K$ è convesso; se $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, allora $\overline{K} = \overline{\operatorname{int} K}$;

iii) se K è aperto, allora $K = \operatorname{int} \overline{K}$.

Dim.: *i*) se $x, y \in \overline{K}$, $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset K$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Per ogni $t \in [0,1]$, si ha $z_n := tx_n + (1-t)y_n \in K$, e inoltre z_n tende a $tx+(1-t)y$, che quindi è in $\overline{K}$.

ii) Premettiamo la seguente osservazione:

se $x \in K$ ed $y \in \operatorname{int} K$, allora $tx + (1-t)y \in \operatorname{int} K \quad \forall t \in [0,1[$.

Infatti, per ipotesi $\exists \varrho > 0 : \ \Sigma(y,\varrho) \subset K$, quindi, $\forall t \in [0,1]$, si ha che $tx + (1-t)\Sigma(y,\varrho) = \Sigma(tx+(1-t)y, (1-t)\varrho) \subset K$. Da cioò risulta che: se anche $x \in \operatorname{int} K$, $tx + (1-t)y \in \operatorname{int} K$, quindi $\operatorname{int} K$ è convesso; se $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, fissato $y_0 \in \operatorname{int} K$ si ha che, $\forall x \in K$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)x + \frac{1}{n}y_0 \in \operatorname{int} K$, quindi $x \in \overline{\operatorname{int} K}$; perciò $K \subset \overline{\operatorname{int} K}$, da cui, ovviamente, $\overline{K} = \overline{\operatorname{int} K}$.

iii) Basta verificare che $(x \in \operatorname{int}\overline{K}) \Rightarrow (x \in K)$. Supponiamo, per assurdo, che $\exists x_0 \in \operatorname{int}\overline{K} \setminus K$; per il Teorema di Hahn-Banach (**Teorema 1.1**, *ii*)) $\exists y \in E' \setminus \{0\}$, $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \langle y, x_0\rangle \leq \alpha \leq \langle y, x\rangle$ per ogni $x \in K$, quindi anche $\forall x \in \overline{K}$. Poiché $x_0 \in \operatorname{int}\overline{K}$, $\exists \varrho > 0 : \ \Sigma(x_0,\varrho) = x_0 + \varrho\Sigma(0,1) \subset \overline{K}$; per ogni z con $|z| < 1$ si deve quindi avere

$$\alpha + \varrho\langle y, z\rangle \geq \langle y, x_0\rangle + \varrho\langle y, z\rangle = \langle y, x_0 + \varrho z\rangle \geq \alpha,$$

cioé $\langle y, z\rangle \geq 0 \ \forall z \in \Sigma(0,1)$; ma questo implica $y = 0$, contrariamente all'ipotesi che $y \in E' \setminus \{0\}$. ∎

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.9** Nell'enunciato della **Proposizione 1.9**, l'ipotesi su x_0 è *essenziale*, come mostrano i seguenti esempi:

i) sia $E := \mathbb{R}$; si ponga $\psi(x) := I_{\{0\}}(x)$, e

$$\varphi(x) := \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0, \\ -\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Si ha che $\psi^*(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (ESEMPIO 1 del Paragrafo **1.2.3**), e si calcola subito che

$$\varphi^*(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4y} & \text{se } y < 0, \\ +\infty & \text{se } y \geq 0. \end{cases}$$

Poiché $\operatorname{dom}\varphi \cap \operatorname{dom}\psi = \{0\}$, se ne deduce che $\inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x) + \psi(x)\} = 0$; inoltre, $\sup_{y\in\mathbb{R}}\{-\varphi^*(-y) - \psi^*(y)\} = \sup_{y\in\mathbb{R}_+} -\dfrac{1}{4y} = 0$; però, l'estremo superiore ora scritto *non è mai raggiunto* (non è un massimo).

ii) sia $E := \mathbb{R}^2$, e si definisca

$$\varphi(x) := \begin{cases} -\sqrt{x_1 x_2} & \text{se } x_1 \geq 0 \text{ ed } x_2 \geq 0, \\ +\infty & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad \psi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 = 0, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È immediato verificare che $\psi^*(y) = I_{\{y_2=0\}}(y)$; inoltre, risulta

$$\varphi^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y_1 < 0,\ y_2 < 0 \text{ e } 4y_1y_2 \geq 1, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infatti, posto $Q := \operatorname{dom}\,\varphi$, si osservi intanto che, poiché $0 \in Q$, risulta $\varphi^*(y) \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}^2$. Inoltre, sia $y \in \mathbb{R}^2$ tale che $\exists \bar{x} = [\bar{x}_1; \bar{x}_2] \in Q$ con $\langle y, \bar{x}\rangle + \sqrt{\bar{x}_1\,\bar{x}_2} > 0$. Poiché $\bar{x} \neq 0$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\bar{x} \in Q$, ne viene che $\varphi^*(y) \geq n\,(\langle y, \bar{x}\rangle + \sqrt{\bar{x}_1\,\bar{x}_2}\,)\ \forall n \in \mathbb{N}$, da cui $\varphi^*(y) = +\infty$. Di conseguenza,

$$\varphi^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle y, x\rangle + \sqrt{x_1\,x_2} \leq 0 \quad \forall x \in Q, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $\langle y, x\rangle + \sqrt{x_1\,x_2} = y_1\left(\sqrt{x_1}\right)^2 + \sqrt{x_2}\,\sqrt{x_1} + y_2\,x_2 = y_2\left(\sqrt{x_2}\right)^2 + \sqrt{x_1}\,\sqrt{x_2} + y_1\,x_1$, la condizione $\langle y, x\rangle + \sqrt{x_1\,x_2} \leq 0\quad \forall x \in Q$ è soddisfatta se e solo se risulta $y_1 < 0$, $y_2 < 0$, ed inoltre $4y_1\,y_2 \geq 1$.

Di conseguenza, in questo caso si ha

$$\inf_{x\in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\} = 0, \quad \text{mentre} \quad \forall y \in E\,',\ \varphi^*(-y) + \psi^*(y) = +\infty \ \blacksquare$$

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.10** La **Proposizione 1.9** ha particolare interesse se l'estremo inferiore che in essa compare *non è un minimo*. Nell' <u>OSSERVAZIONE</u> **1.7**, α), (di cui riprendiamo ipotesi e notazioni), posto $\psi(x) := I_K(x)$, si è visto che $\inf_{x\in K}\varphi(x) = \inf_{x\in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\} = \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right|$, ma che tale estremo inferiore *non è assunto*. Per la **Proposizione 1.9**, il "<u>problema duale</u> (che consiste nel *massimizzare* su $E\,'$ il funzionale $\overline{-\varphi^*(-y) - \psi^*(y)}$) ha invece soluzione, che ora determiniamo. Si controlla senza difficoltà che, $\forall y \in E\,'$, si ha $\varphi^*(y) = \langle y, x_0\rangle + I_{\overline{\Sigma_*(0,1)}}(y)$. Inoltre (si veda il precedente

ESEMPIO **12**), $\psi^*(y) = \sup_{x\in K}\langle y, x\rangle$; poiché K è un sottospazio, si ha che[6] $\psi^*(y) = I_{K^\perp}(y)$. Dunque

$$\max_{y\in E'}\{-\varphi^*(-y) - \psi^*(y)\} = \max\{\langle y, x_0\rangle \mid y \in K^\perp\ ,\ \|y\|_* \leq 1\},$$

e, come sappiamo, tale massimo vale $d(x_0, K) = \left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|$. Quindi:

se $\int_0^1 x_0(t)\,dt > 0$, *la misura di* LEBESGUE *su* $]\,0,1\,[$ *è punto di massimo;*

se invece $\int_0^1 x_0(t)\,dt < 0$, *un punto di massimo è la misura di* LEBESGUE *su* $]\,0,1\,[$, *cambiata di segno.* ■

1.3 Relazioni di ortogonalità. Operatori chiusi. Aggiunto.

Premettiamo il seguente risultato ([BR], **Teorema II.8** e **Corollario II.9**):

Proposizione 1.11 *Siano* G, L *due sottospazi chiusi dello spazio di* BANACH E, *tali che* $G + L$ *sia* chiuso*; allora* $\exists c \geq 0$ *tale che:*

i) $\forall x \in G + L,\ \ \exists g \in G,\ \exists l \in L:\ \ x = g + l,\ \ \|g\| \leq c\|x\|,\ \ \|l\| \leq c\|x\|$;
ii) $\forall x \in E,\ d(x, G\cap L) \leq c\{d(x, G) + d(x, L)\}$. ■

OSSERVAZIONE **1.11** La somma di due sottospazi chiusi *può non essere chiusa*, come risulta già dall'OSSERVAZIONE **1.1**, *di cui conserviamo le notazioni*: i sottospazi là indicati con A e C sono chiusi, la loro somma è densa in E, ma non coincide con E (non contiene il vettore là indicato con ξ). ■

Diamo la seguente

Definizione 1.5 *Se* G *è un sottospazio* chiuso *di* E, *un* **supplementare topologico** L *di* G *è un sottospazio* chiuso *di* E *tale che* $G \cap L = \{0\}$ *e* $G + L = E$. ■

Valgono allora le seguenti proprietà (cfr. [BR], **II.4**):

• se L è un supplementare topologico di G, ogni $x \in E$ si scrive in modo *unico* come $x = g + l$, con $g \in G$ ed $l \in L$; le applicazioni $x \mapsto g$ ed $x \mapsto l$ (**proiettori** su G e su L) sono operatori *lineari e continui*;

• G ammette *sempre* un supplementare topologico se $\dim G < +\infty$, oppure se G è *chiuso* ed ha *codimensione finita*;

• se E non è hilbertizzabile, esistono sottospazi chiusi di E che non ammettono alcun supplementare topologico.

[6] la definizione ([BR], **II.5**) di $K^\perp$ è richiamata nel Paragrafo seguente.

1.3.1 Relazioni di ortogonalità.

Nel caso hilbertiano, un supplementare topologico del sottospazio chiuso G è il sottospazio *ortogonale* a G; la definizione di ortogonalità può essere estesa al caso degli spazi di BANACH, con le modifiche dovute alla mancanza di un prodotto scalare. Precisamente, si pone (cfr. [BR], **II.5**) la seguente

Definizione 1.6 *Dati $M \subset E$ (risp., $N \subset E'$),*

i): gli **ortogonali** *$M^\perp$ di M ($N^\perp$ di N) sono definiti, rispettivamente, da:*

$$M^\perp := \{y \in E' \mid \langle y, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in M\} \; (\subset E')$$

$$N^\perp := \{x \in E \mid \langle y, x\rangle = 0 \;\; \forall y \in N\} \; (\subset E) \; ;$$

ii): $[M]$ (risp., $[N]$) è la **varietà lineare generata da** *M (risp., N), cioé l'intersezione di tutte le varietà lineari contenenti M (N); $\overline{M}^s$ ed $\overline{M}^w$ indicano le chiusure di M in E_s ed in E_w; $\overline{N}^s$, $\overline{N}^w$ ed $\overline{N}^{w^*}$ indicano le chiusure di N in E'_s, E'_w, E'_{w^*}; se M (N) è* convesso*, si pone $\overline{M} := \overline{M}^s = \overline{M}^w$, $\overline{N} := \overline{N}^s = \overline{N}^w$.* ■

Valgono i seguenti risultati:

Proposizione 1.12 *i): $M^\perp$ è una* varietà lineare, chiusa in *E'_{w^*} (quindi, anche in E'_w ed, equivalentemente, in E'_s); $N^\perp$ è una* varietà lineare, chiusa in *E_w (equivalentemente, in E_s);*

ii): $M^\perp = \overline{M}^\perp = [M]^\perp \left(= (\overline{[M]})^\perp\right)$ (chiusure in E_s o in E_w); inoltre, $(M^\perp)^\perp = \overline{[M]}$;

$N^\perp = \overline{N}^\perp = [N]^\perp \left(= (\overline{[N]})^\perp\right)$ (chiusure in E'_s, o in E'_w, o in E'_{w^*}); inoltre, $(N^\perp)^\perp \supset \overline{[N]}$. ■

Dim.: *i*): è evidente che $M^\perp$ ed $N^\perp$ sono varietà lineari. Per verificare la chiusura di $M^\perp$ in E'_{w^*}, mostriamo che $E' \setminus M^\perp$ è *aperto* in E'_{w^*}. Infatti, per ogni y_0 in $E' \setminus M^\perp$ deve esistere $x_0 \in M$ tale che $\langle y_0, x_0\rangle \neq 0$; allora $V := \left\{y \in E' \mid |\langle y - y_0, x_0\rangle| < \frac{1}{2}|\langle y_0, x_0\rangle|\right\}$ è un intorno di y_0 in E'_{w^*}, ed è contenuto in $E' \setminus M^\perp$, che quindi è aperto. La verifica della chiusura di $N^\perp$ è immediata.

ii): Poiché $M \subset \overline{M}^s \subset \overline{M}^w$, si ha che $M^\perp \supset \left(\overline{M}^s\right)^\perp \supset \left(\overline{M}^w\right)^\perp$. Mostriamo ora che $M^\perp \subset (\overline{M}^w)^\perp$; supponiamo, per assurdo, che $\exists y_0 \in M^\perp$ tale che $y_0 \notin (\overline{M}^w)^\perp$. Allora, $\langle y_0, x\rangle = 0 \; \forall x \in M$, mentre $\exists x_0 \in \overline{M}^w \; : \; \langle y_0, x_0\rangle \neq 0$. Ne viene che $V := \left\{x \in E \mid |\langle y_0, x - x_0\rangle| < \frac{1}{2}|\langle y_0, x_0\rangle|\right\}$ è un intorno di x_0 in E_w, ma non contiene punti di M, il che è assurdo dato che $x_0 \in \overline{M}^w$. Si ha quindi che $M^\perp = \overline{M}^\perp$, e che $[M]^\perp = \left(\overline{[M]}\right)^\perp$ (chiusure in E_s o in E_w); poiché è ovvio che $M^\perp = [M]^\perp$, si conclude che $M^\perp = \overline{M}^\perp = [M]^\perp = \left(\overline{[M]}\right)^\perp$ (chiusure in E_s o in E_w). A partire dalle inclusioni $N \subset \overline{N}^s \subset \overline{N}^w \subset \overline{N}^{w^*}$, e dimostrando, con procedimento analogo, che

$N^\perp \subset \left(\overline{N}^{w^*}\right)^\perp$, si conclude che $N^\perp = \overline{N}^{\,\perp} = [N]^\perp \left(= (\overline{[N]}\,)^\perp\right)$ (chiusure in E'_s, in E'_w o in E'_{w^*}).

Infine, poiché $M^\perp = [M]^\perp$ ed $N^\perp = [N]^\perp$, le relazioni $(M^\perp)^\perp = \overline{[M]}$ ed $(N^\perp)^\perp \supset \overline{[N]}$ sono contenute nella **Proposizione II.12** di [Br]. ∎

<u>Osservazione</u> **1.12** Se E *non* è riflessivo, ed $N \subset E'$, si può mostrare che $(N^\perp)^\perp$ è uguale alla chiusura di $[N]$ in E'_{w^*} (che *contiene strettamente* quella in E'_s, uguale a quella in E'_w). Un esempio: se $E := \ell^1$, ed $N := \{e^{(n)}\}$, si ha che $[N] = \{y \in \ell^\infty \mid \exists n_0 = n_0(y) \, : \, \forall n > n_0, \;\; y_n = 0\}$, mentre $N^\perp = \{x \in \ell^1 \mid \langle e^{(n)}, x\rangle = x_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$; quindi $(N^\perp)^\perp = \ell^\infty \neq \overline{[N]} = c_0$. ∎

Proposizione 1.13 *Dato $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, si ha, $\forall y \in E'$,*

$$d(y, A^\perp) = \sup\Big\{\langle y, x\rangle \;\Big|\; x \in \overline{[A]}\,,\; \|x\| \le 1\Big\}.$$

Dim.: posto $X := \overline{[A]}$, da cui $A^\perp = X^\perp$, si ha che

$$d(y, A^\perp) = d(y, X^\perp) = \inf_{z \in X^\perp} \|y - z\|_* = \inf_{z \in E'} \{\|y - z\|_* + I_{X^\perp}(z)\} =$$

$$\inf_{z \in E'} \Big\{ \sup\Big\{\langle y - z, x\rangle \;\Big|\; x \in E, \; \|x\| \le 1\Big\} + \sup\{\langle z, x\rangle \mid x \in X\}\Big\} =$$

$$\inf_{z \in E'} \left\{ \sup_{x \in E} \Big\{\langle -z, x\rangle - \Big(I_{\overline{\Sigma(0,1)}}(x) - \langle y, x\rangle\Big)\Big\} + \sup_{x \in E}\{\langle z, x\rangle - I_X(x)\}\right\} =$$

$$\inf_{z \in E'} \{\varphi^*(-z) + \psi^*(z)\} = -\sup_{z \in E'} \{-\varphi^*(-z) - \psi^*(z)\}\;,$$

dove si è posto $\varphi(x) := I_{\overline{\Sigma(0,1)}}(x) - \langle y, x\rangle$, $\psi(x) := I_X(x)$. Per la **Proposizione 1.9**, ne segue che

$$d(y, A^\perp) = -\inf_{x \in E} \{\varphi(x) + \psi(x)\} = -\inf_{x \in X; \|x\| \le 1} \{-\langle y, x\rangle\} = \sup_{x \in \overline{[A]}; \|x\| \le 1} \langle y, x\rangle\,. \;\blacksquare$$

Si hanno inoltre le seguenti proprietà ([Br], **Proposizione II.13, Corollario II.14, Teorema II.15**):

Proposizione 1.14 *Se G, L sono sottospazi* chiusi *dello spazio di* Banach *E, allora:*

i) $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$; *ii)* $G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$;
iii) $(G \cap L)^\perp \supset \overline{G^\perp + L^\perp}$; *iv)* $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = \overline{G + L}$. ∎

Proposizione 1.15 *Se G, L sono sottospazi* chiusi *dello spazio di* Banach *E, sono equivalenti le proprietà:*

i) $G + L = \overline{G + L}$; *ii)* $G^\perp + L^\perp = \overline{G^\perp + L^\perp}$
iii) $G + L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$; *iv)* $G^\perp + L^\perp = (G \cap L)^\perp$. ∎

1.3.2 Operatori chiusi.

Richiamiamo alcune definizioni e proprietà relative ad operatori lineari *non necessariamente limitati* ([Br], **II.6**):

Definizione 1.7 *Siano E, F due spazi di* BANACH. *Un* **operatore lineare** *di E in F è un'applicazione lineare $A : D(A) \to F$, dove $D(A)$ è una varietà lineare contenuta in E, detta* **dominio** *di A. Si dice che A è* **limitato** *se $\exists c > 0 \ : \ \forall x \in D(A)$ risulti $\|Ax\| \leq c\|x\|$. Il* **nucleo** *$N(A)$ (o* **ker** *A) è l'insieme $N(A) := \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}$ $(\subset E)$; l'***immagine** *(o* **range***) $R(A)$ di A è l'insieme $R(A) := \{Ax \mid x \in D(A)\}$ $(\subset F)$; il* **grafico** *$G(A)$ di A è l'insieme $G(A) := \{[x; Ax] \mid x \in D(A)\}$ $(\subset E \times F)$. Se $G(A)$ è chiuso, l'operatore A si dice* **chiuso**. ■

OSSERVAZIONE **1.13** La limitatezza di A su $D(A)$ *non* implica, in generale, che esista un prolungamento lineare e continuo $\tilde{A}$ di A definito su *tutto*[7] E. Ad esempio, siano: E uno spazio di BANACH (anche riflessivo, purché non hilbertizzabile), F una sua varietà lineare e chiusa priva di supplementare topologico[8] ed A l'applicazione identica di F (considerato come sottospazio di E) in sè. Se A ammettesse un prolungamento lineare e continuo $\tilde{A} : E \to F$, si avrebbe intanto che $N := N(\tilde{A})$ sarebbe una varietà lineare e chiusa di E. Inoltre, $x \in F \cap N \iff 0 = \tilde{A}x = Ax = x$, cioè $F \cap N = \{0\}$; infine, $\forall x \in E$, $\tilde{A}(\tilde{A}x) = A(\tilde{A}x) = \tilde{A}x$, quindi $x = \tilde{A}x + (x - \tilde{A}x)$ con $\tilde{A}x \in F$ e $x - \tilde{A}x \in N$: cioè $E = F + N$. Ma ciò è assurdo, perché allora N sarebbe supplementare topologico di F in E. ■

OSSERVAZIONE **1.14** Se $D(A) = E$, *non* si può dedurre, in generale, che A sia limitato, (o, equivalentemente, chiuso). In effetti, se $\dim E = +\infty$, ed f è un funzionale lineare non continuo su E (si ricordi il **Lemma 1.1**), fissato $y_0 \in F \setminus \{0\}$ basta definire $A : E \to F$ come segue: $Ax := y_0 f(x)$. ■

OSSERVAZIONE **1.15** La chiusura o meno di un operatore lineare dipende anche dalla *scelta* del suo dominio. Ad esempio, posto $\Omega := \,]-1, 1[$, sia $E := F := L^2(\Omega)$, e sia A l'operatore di derivazione. Se si sceglie $D(A) := H^1(\Omega)$, è facile vedere che A è chiuso: infatti, se $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ è tale che $u_n \to u$ e $u'_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, quindi in $\mathcal{D}'(\Omega)$, si ha anche $u'_n \to u'$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, e dunque, per l'unicità del limite, $u' = v \in L^2(\Omega)$ (in particolare, $u \in H^1(\Omega)$). Se come dominio $D(A)$ si sceglie invece, ad esempio, $H^2(\Omega)$, allora A *non* è chiuso. In effetti, la successione $\{u_n\}$ così definita:

$$u_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t \leq 0; \\ \frac{n}{2}t^2 & \text{se } 0 < t < \frac{1}{n}; \\ t - \frac{1}{2n} & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

[7] cioè, un operatore lineare e continuo $\tilde{A} : E \to F$ tale che la sua restrizione a $D(A)$ coincida con A.

[8] si vedano la **Definizione 1.5** e le proprietà enunciate subito dopo tale definizione.

è in $H^2(\Omega)$, e si verifica senza difficoltà che, posto

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \\ t & \text{se } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

risulta $u_n \to u$ e $u'_n \to u'$ in $L^2(\Omega)$, mentre $u \notin H^2(\Omega)$. ∎

In generale, *non* è detto che la chiusura del grafico di un operatore lineare sia a sua volta grafico di un operatore. Si pone allora la seguente:

Definizione 1.8 *L'operatore lineare $A : E \to F$ di dominio $D(A)$ si dice* **prechiuso** *se esiste un operatore $\overline{A}$, detto* **chiusura** *di A, tale che $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.* ∎

Si vede facilmente che condizione necessaria e sufficiente perché A sia prechiuso è che, per ogni successione $\{x_n\}$, se risulta: $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ ed $\exists y$ tale che $Ax_n \to y$, allora ne viene che $y = 0$.

Posto $E := L^p(0,1)$ (con $p \geq 1$), ed $F := \mathbb{R}$, sia A l'operatore definito su $D(A) := C^0(\,[0,1]\,)$ come segue: $Ax := x(1)$. Considerando la successione $\{x_n\}$ data da $x_n(t) := t^n$, da quanto precede si conclude che A *non è prechiuso.*

1.3.3 Operatore aggiunto.

Definizione 1.9 *Dato un operatore lineare $A : E \to F$ con dominio $D(A)$* denso *in E, si pone*

$$D(A^*) := \{y \in F' \mid \exists c = c(y) \ : \ \forall x \in D(A) \quad |\langle y, Ax\rangle| \leq c\|x\|\} \ ,$$

e si definisce **aggiunto** *di A l'operatore lineare $A^* : F' \to E'$ di dominio $D(A^*)$ che verifica la* **relazione di reciprocità**:

$$\forall x \in D(A) \ , \ \forall y \in D(A^*) \ , \quad {}_{E'}\langle A^*y, x\rangle_E \ = \ {}_{F'}\langle y, Ax\rangle_F \ . \ ∎$$

Una proprietà fondamentale di A^* ([Br], **Proposizione II.16**):

Proposizione 1.16 *A^* è un operatore* chiuso. ∎

<u>Osservazione</u> **1.16** Il dominio di A^* dipende *in modo essenziale* da quello scelto per A. Ad esempio, posto $\Omega := \,]\,a,b\,[$, siano $E := F := L^2(\Omega)$, ed A_1 l'operatore di derivazione con $D(A_1) := H^1(\Omega)$; allora $y \in D(A_1^*)$ se e solo se $\exists y^* \in L^2(\Omega) \ : \ \forall x \in H^1(\Omega) \ \int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \int_a^b y^*(t)x(t)\,dt$. L'ultima uguaglianza, scritta $\forall x \in \mathcal{D}(\Omega)$, implica intanto che $-y^*$ è la derivata distribuzionale di y, quindi che $y \in H^1(\Omega)$. Ma allora, integrando per parti il primo membro dell'uguaglianza, si arriva alla relazione, che deve valere per ogni $x \in H^1(\Omega)$, $y(b)x(b) - y(a)x(a) = 0$, il che è possibile se e solo se $y(a) = y(b) = 0$; in conclusione, si ha $D(A_1^*) = H_0^1(\Omega)$.

Se invece A_2 indica ancora l'operatore di derivazione, ma con dominio $D(A_2) := H_0^1(\Omega)$, si controlla facilmente che $D(A_2^*) = H^1(\Omega)$.

Infine, se A_3 è sempre l'operatore di derivazione, questa volta con dominio $D(A_3) := H^1_\sim(\Omega) := \{x \in H^1(\Omega) \mid x(a) = x(b)\}$, si verifica, in modo analogo, che $D(A_3^*) = H^1_\sim(\Omega) = D(A_3)$. ∎

Se Y è uno spazio vettoriale, data la coppia ordinata $[a;b] \in Y \times Y$, poniamo $I([a;b]) := [a;b]$, $U([a;b]) := [b;a]$, $J([a;b]) := [-b;a]$. Valgono evidentemente le relazioni $U^2 = I$; $J^2 = -I$; $UJ = -JU$ (da cui si deduce anche: $JUJ = U$, $UJU = -J, \ldots$). Se E, F sono spazi normati ed $X \subset E \times F$, risulta[9] $J(X^\perp) = J(X)^\perp$ e $U(X^\perp) = U(X)^\perp$; inoltre, se $A : E \to F$ è un operatore lineare invertibile (con dominio $D(A) \subset E$), si ha $G(A^{-1}) = U(G(A))$.

Ricordiamo che (cfr. [Br], **II.6**), dato $A : E \to F$ con dominio $D(A)$ *denso* in E, risulta

$$J(G(A^*)) = G(A)^\perp\,,\ \textit{o, equivalentemente,}\ G(A^*) = (J(G(A)))^\perp\,.$$

<u>Osservazione</u> **1.17** Si noti però che, se $A : E \to F$ è un operatore lineare *generico*, cioé senza alcuna altra ipotesi, la posizione $G := (J(G(A)))^\perp$ definisce sì una varietà lineare e chiusa in $F' \times E'$, che però *non è detto* sia il grafico di un operatore: lo è se e solo se G non contiene alcuna coppia $[0;e']$ con $e' \neq 0$. Dato che $[0;e'] \in (J(G(A)))^\perp \iff \langle e', e\rangle = 0 \ \ \forall e \in D(A)$, ne viene che G è il grafico di un operatore (l'aggiunto di A) se e solo se $D(A)$ è *denso* in E. ∎

Possiamo ora dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 1.17 *Dati due spazi di* Banach *E ed F ed un operatore lineare $A : E \to F$ che sia* prechiuso *e con dominio $D(A)$* denso *in E, allora:*

i) si ha $(\overline{A})^* = A^*$; inoltre, se F è riflessivo, *allora $D(A^*)$ è* denso *in F';*

ii) se anche E è riflessivo, allora[10] *$A^{**} = \overline{A}$ (quindi, A* è chiuso se e solo se *$A = A^{**}$).*

Dim.: *i*): la prima proprietà è immediata: essendo $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$, risulta

$$J\left(G((\overline{A})^*)\right) = G(\overline{A})^\perp = \left(\overline{G(A)}\right)^\perp = G(A)^\perp = J(G(A^*)),$$

cioè $(\overline{A})^* = A^*$. Per la densità di $D(A^*)$, si veda [Br], **Teorema III.21**;

ii): si ha $G(A^{**}) = (J(G(A^*)))^\perp = \left(G(A)^\perp\right)^\perp = \overline{G(A)} = G(\overline{A})$; ne viene che $A^{**} = \overline{A}$. ∎

<u>Osservazione</u> **1.18** Se $D(A)$ è denso ma A *non è prechiuso*, oppure F *non è riflessivo*, può accadere che $D(A^*)$ *non* sia denso (nelle topologie *forte* o *debole*[11] di F'), come mostrano gli esempi seguenti:

i): sia $E := F := H := L^2(0,1)$ (identificato al suo duale), e, fissato x_0 in $H \setminus \{0\}$, si consideri l'operatore A da H in sè di dominio $D(A) := C^0([0,1])$

[9] si ponga ad esempio $Y := E \cup F \cup E' \cup F'$.
[10] identificando E ed F ai rispettivi biduali.
[11] lo è *sempre* nella topologia debole*.

così definito: $(Ax)(t) := x(1)x_0(t)$. Si ha che $D(A)$ è denso in H, ma A non è prechiuso. Inoltre, $y \in D(A^*) \iff \exists y^* \in L^2(0,1) : \forall x \in D(A)$ risulta

$$x(1)\int_0^1 y(t)x_0(t)\,dt = \int_0^1 y^*(t)x(t)\,dt.$$

In particolare, se $x(t) = t^n$ si deve avere

$$\int_0^1 y(t)x_0(t)\,dt = \int_0^1 t^n y^*(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,$$

quindi x_0 ($\neq 0$) è *ortogonale* a $D(A^*)$, che pertanto *non è denso in* H.

ii): siano $E := \ell^2$, $F := \ell^1$ (usuali identificazioni per i duali), ed A l'operatore dato da $A\{x_n\} := \{nx_n\}$ su $D(A) := \{\{x_n\} \in \ell^2 \mid \{nx_n\} \in \ell^1\}$. È ovvio che $D(A)$ è denso in ℓ^2 (contiene i vettori con componenti definitivamente nulle). Inoltre, A è chiuso: se $\{x^{(k)}\} \subset D(A)$ è tale che $x^{(k)} \to x$ in ℓ^2 e $Ax^{(k)} \to y$ in ℓ^1, si ha allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$, e $\lim_k (nx_n^{(k)}) = y_n$, da cui $y_n = nx_n$; quindi $x \in D(A)$ e $Ax = y$. D'altra parte, è immediato verificare che $D(A^*) = \{\{y_n\} \in \ell^\infty \mid \{ny_n\} \in \ell^2\}$; ne viene, di conseguenza, che $D(A^*) \subset c_0$, quindi $D(A^*)$ *non è denso* in ℓ^1. ∎

Valgono anche le seguenti proprietà:

Proposizione 1.18 *Se E, F sono due spazi di* Banach*, ed A è un operatore lineare* chiuso *da E in F con dominio* denso *in E, si ha che:*

i) $N(A) = R(A^*)^\perp$; $N(A^*) = R(A)^\perp$; $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$; $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$;

ii) $(R(A) = \overline{R(A)}) \iff (R(A^*) = \overline{R(A^*)}) \iff (R(A) = N(A^*)^\perp) \iff (R(A^*) = N(A)^\perp)$;

iii) se A è iniettivo *e $R(A)$ è* denso *in F, allora A^* è iniettivo, e* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;

iv) A è suriettivo se e solo se $N(A^*) = \{0\}$ *e* $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$;

v) A è suriettivo se e solo se $\exists c > 0 : \quad \forall y \in D(A^*) \quad \|y\|_{F'} \le c\|A^*y\|_{E'}$.

Dim.: le proprietà enunciate in *i*) sono conseguenze immediate della **Proposizione 1.14** (ponendo $G := G(A)$, $L := E \times \{0\}$; cfr. [Br], **Corollario II.17**); con le stesse posizioni, dalla **Proposizione 1.15** si ricava *ii*) (cfr. [Br], **Teorema II.18**); per dimostrare *iii*), basta osservare che $N(A^*) = \{0\}$ (da *i*)), e che

$$J\left(G((A^{-1})^*)\right) = G(A^{-1})^\perp = (U(G(A)))^\perp = U\left(G(A)^\perp\right) =$$

$$U\left(J(G(A^*))\right) = -J\left(U(G(A^*))\right) = J\left(U(G(A^*))\right) = J\left(G((A^*)^{-1})\right);$$

infine, per *iv*) e *v*) si veda il **Teorema II.19** di [Br]. ∎

<u>Osservazione</u> **1.19** Se E *non è riflessivo*, può accadere che $N(A)^\perp \neq \overline{R(A^*)}$, *anche se* A è *continuo*. Ad esempio, si ponga $E := \ell^1$, $F := \ell^2$,

ed $A : E \to F$ sia definito da $A\{x_n\} := \{x_n/n\}$. Poiché[12] $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$, si ha che $\|Ax\|_2 \le c\,\|x\|_1$ (con $c = (\sum_n n^{-2})^{1/2}$); quindi $A^* \in \mathcal{L}(\ell^2; \ell^1)$, e (verifica immediata) $A^*\{y_n\} = \{y_n/n\}\ \forall\{y_n\} \in \ell^2$. Di conseguenza, $N(A) = \{0\}$, da cui $N(A)^\perp = \ell^\infty$. Invece, se $y^* = \{y_n^*\} \in R(A^*)$ deve esistere $y = \{y_n\} \in \ell^2$ tale che $y_n^* = (y_n/n)$: ne viene che $R(A^*) \subset c_0$, quindi $\overline{R(A^*)} \neq \ell^\infty$. ∎

Ricordiamo inoltre che ([Br], **Teorema II.21**):

Proposizione 1.19 *Se $A : E \to F$ è un operatore lineare* chiuso *con dominio $D(A)$* denso*, si ha:*

$$(D(A) = E) \iff (A \text{ è limitato}) \iff (D(A^*) = F') \iff (A^* \text{ è limitato});$$

inoltre, in tal caso risulta

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E;F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F';E')}. \ ∎$$

Nel caso di uno spazio di Hilbert H, identificato al suo duale, ci sono altri notevoli tipi di operatori, di alcuni dei quali diamo almeno la definizione.

Definizione 1.10 *Sia A un operatore lineare da H in H; A si dice*
hermitiano *se, $\forall x, y$ in $D(A)$, risulta $(Ay, x) = (y, Ax)$.*
Se, inoltre, $D(A)$ è denso *in H, A si dice*
simmetrico *se $G(A) \subset G(A^*)$;*
autoaggiunto *se $G(A^*) = G(A)$.* ∎

Osservazione **1.20** *Non è detto* che un operatore *simmetrico* (cioé, hermitiano e con dominio denso) sia anche *autoaggiunto*: ad esempio, posto $\Omega :=]\,a, b\,[$, si definiscano $H := L^2(\Omega)$, ed $A := -d^2/dt^2$ con $D(A) := H_0^2(\Omega)$ (oppure $D(A) := H_0^k(\Omega)$ con $k > 2$, oppure $D(A) := \mathcal{D}(\Omega)$...). Il controllo che A è simmetrico è immediato. Tuttavia, A *non è autoaggiunto*: infatti, $y \in D(A^*)$ se e solo se $\exists y^* \in L^2(\Omega) : \forall x \in D(A)\ \ (y^*, x) = (y, -x'')$. In particolare, se $x \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $\langle y^*, x\rangle = \langle y, -x''\rangle = \langle -y'', x\rangle$, da cui $y'' = -y^*$; quindi, y e la sua derivata seconda (nel senso delle distribuzioni) sono in $L^2(\Omega)$. Ciò implica che anche $y' \in L^2(\Omega)$ (anzi, è *assolutamente continua* su $[\,a, b\,]$), quindi $y \in H^2(\Omega)$. (Basta osservare che, posto $Y(t) := \int_a^t y''(\tau)\,d\tau$, si ha intanto che Y è assolutamente continua, con $Y'(t) = y''(t)$ q.o. in $]\,a, b\,[$. Inoltre, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$\langle y' - Y, \varphi'\rangle = \langle -y'' + Y', \varphi\rangle = (-y'' + Y', \varphi) = 0\ ;$$

applicando il **Lemma VIII.1** di [Br], si conclude che $y' = Y + cost \in L^2(\Omega)$.)

D'altronde, è immediato verificare che *ogni* $y \in H^2(\Omega)$ soddisfa, per ogni $x \in D(A)$, $(-y'', x) = (y, -x'')$; in conclusione, $D(A^*) = H^2(\Omega)$ *contiene strettamente* $D(A)$, quindi A^* è un'*estensione propria* dell'operatore simmetrico A. D'altra parte, A^* *non* è simmetrico: $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$ sono tali che $x, y \in D(A^*)$, ma $(y, A^*x) = 0$ mentre $(A^*y, x) = b^2 - a^2$.

Se, con le notazioni dell'esempio precedente, si definisce $A_1 := -d^2/dt^2$, ma con dominio $D(A_1) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, si controlla subito che non solo A_1 è simmetrico, ma che $D(A_1^*) = D(A_1)$ e $A_1 = A_1^*$: cioè, con *questa* definizione del dominio, l'operatore *è autoaggiunto.* ∎

---

[12] $\|x\|_p$ (con $1 \le p \le +\infty$) indica la norma di x in ℓ^p.

L'estensione del risultato precedente al caso multidimensionale è un po' più delicata.
Dato un aperto Ω *arbitrario* di $\mathbb{R}^N$, e posto $H := L^2(\Omega)$, indicheremo nel seguito con A l'operatore non limitato $-\Delta : H \to H$, *con dominio definito da* $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$; si ha subito che

$$A \text{ è } \textit{simmetrico.}$$

Infatti risulta[13]

$$(\nabla u, \nabla v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle = (Au, v) \ \ \forall u \in D(A), \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

quindi (per l'immersione continua e la densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$)

$$(\nabla u, \nabla v) = (Au, v) \ \ \forall u \in D(A), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Scambiando tra loro u, v si ottiene

$$(\nabla v, \nabla u) = (\nabla u, \nabla v) = (Av, u) = (u, Av) \ \ \forall v \in D(A), \ \forall u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Ne viene che A è simmetrico, poiché $D(A)$ è *denso* in H, e

$$(Au, v) = (\nabla u, \nabla v) = (u, Av) \ \ \forall u, v \in D(A)\,;$$

si noti che risulta, $\forall u \in D(A), \ (Au, u) = (u, Au) = |\nabla u|^2 \geq 0$.
Resta da verificare *se A è anche autoaggiunto.*
Consideriamo il *problema di* DIRICHLET (con dato di DIRICHLET nullo)

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Una soluzione *forte* del problema è una funzione u tale che

$$u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \quad u + Au = f$$

(*non* è detto che una tale funzione esista); la soluzione *debole*, o *variazionale*, del problema è la funzione u tale che (cfr. [BR], **IX.5**)

$$u \in H_0^1(\Omega); \quad (u, v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(esistenza ed unicità della soluzione variazionale sono fornite dal Teorema di RIESZ).

È evidente che una (eventuale) soluzione forte è anche soluzione debole (da cui l'*unicità* della soluzione forte), e che la soluzione debole è anche soluzione forte *se e solo se* è in $H^2(\Omega)$. Prima di concludere, premettiamo il seguente risultato di natura generale:

Proposizione 1.20 *Sia A un operatore simmetrico in H:*
i) se $R(I + A) = H$, allora $A = A^*$;
ii) se $A = A^*$ ed inoltre $(Au, u) \geq 0 \ \ \forall u \in D(A)$, allora $R(I + A) = H$.

[13] per semplicità di notazione, indichiamo con $\langle \psi, \phi \rangle$ il valore assunto da $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ su $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o da $\psi \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^N$ su $\phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$; $(\cdot, \cdot)$ indica *anche* il prodotto scalare in $[L^2(\Omega)]^N$.

Dim.. *i*): basta mostrare che $D(A^*) \subset D(A)$. Sia infatti $v \in D(A^*)$; dato che $R(I + A) = H$, esiste $u \in D(A)$ tale che $(I + A)u = (I + A)^*v$. Poiché A è simmetrico, $v - u \in D(A^*)$, e $(I + A)^*(v - u) = (I + A)^*v - (I + A)^*u = (I + A)^*v - (I + A)u = 0$, quindi $v - u \in N(I + A)^*$. Per la **Proposizione 1.18**, *i*), si ha $N(I + A)^* = R(I + A)^\perp = \{0\}$, quindi $v = u \in D(A)$.

ii): risulta $|(I + A)^*u|\,|u| \geq ((I + A)^*u, u) = |u|^2 + (Au, u) \geq |u|^2$, da cui $|u| \leq |(I + A)^*u|$; per la **Proposizione 1.18**, *v*), che $R(I + A) = H$. ∎

Dalla **Proposizione 1.20** discende il seguente

Corollario 1.2 *L'operatore* $-\Delta$ *con dominio* $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ *è autoaggiunto in* $L^2(\Omega)$ *se e solo se* Ω *è un aperto per il quale vale il seguente* risultato di regolarità:[14]

$\forall f \in L^2(\Omega)$*, la soluzione* debole *del problema di* DIRICHLET *(con dato di* DIRICHLET *nullo) relativa all'equazione* $u - \Delta u = f$ *è in* $H^2(\Omega)$ *(quindi è soluzione* forte *del problema).* ∎

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.21** Anche nel caso di un aperto *generico*, la soluzione variazionale si può comunque caratterizzare tramite un operatore *autoaggiunto* A_1: si ponga infatti $D(A_1) := \{u \in H^1_0(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, e sia A_1 l'operatore $-\Delta$ di dominio $D(A_1)$. Si ha allora il seguente risultato:

Proposizione 1.21 *Sia* Ω *un aperto (qualsiasi) di* $\mathbb{R}^N$*. L'operatore* A_1 *è* autoaggiunto*; inoltre,* $\forall f \in L^2(\Omega)$*,* u *è la soluzione variazionale relativa ad* f *se e solo se verifica*

$$u \in D(A_1); \quad u + A_1 u = f\,.$$

Dim.: la relazione che definisce la soluzione variazionale u, scritta per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, fornisce $u - \Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, quindi $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$, da cui $u \in D(A_1)$ e $u + A_1 u = f$.

Reciprocamente, se $u \in D(A_1)$ e $u + A_1 u = f$, si ha, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(f, \varphi) = (u + A_1 u, \varphi) = \langle u - \Delta u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = (u, \varphi) + (\nabla u, \nabla\varphi)\,.$$

Per la densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1_0(\Omega)$, ne viene che u è la soluzione variazionale.

L'operatore A_1 è *simmetrico* (basta ripetere la dimostrazione della simmetria di A data in precedenza, sostituendo A_1 ad A); poiché dalla prima parte della dimostrazione scende che $R(I + A_1) = H$, la **Proposizione 1.20** permette di concludere che A_1 è *autoaggiunto.* ∎

<u>OSSERVAZIONE</u> **1.22** Nella **Proposizione 1.20**, *ii*), l'ipotesi "$(Au, u) \geq 0$ *non può essere omessa*, neanche quando A è *limitato*. Si ponga infatti $H := L^2(a, b)$, ed $(Au)(t) := tu(t)$; A è lineare e continuo ($\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|a|, |b|\}$), e $R(I + A) = \{v \in L^2(a, b) \mid v(t)(1 + t)^{-1} \in L^2(a, b)\}$. Se $a \leq -1 \leq b$, la funzione $t \mapsto v(t) \equiv 1$ non è in $R(I + A)$, che quindi non coincide con H. ∎

---

[14] si veda [BR], **IX.6** e **Complementi al Capitolo 9**.

1.3.4 Operatori suriettivi.

Dalla **Proposizione 1.15** discende la seguente caratterizzazione delle *immagini* di A e di A^* (cfr. [Br], **Teorema II.18**):

Proposizione 1.22 *Sia $A : E \to F$ un operatore chiuso con dominio denso in E. Le seguenti proprietà si equivalgono:*
i) $\overline{R(A)} = R(A)$*;*
ii) $\overline{R(A^*)} = R(A^*)$*;*
iii) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$*;*
iv) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$. ∎

È facile dedurne le seguenti proprietà, che risultano utilissime nello studio di problemi di esistenza per equazioni a derivate parziali ([Br], **Teorema II.19**):

Proposizione 1.23 *Sia $A : E \to F$ un operatore chiuso con dominio denso in E. Le seguenti proprietà si equivalgono:*
i) $R(A) = F$*;*
ii) $N(A^*) = \{0\}$ *e* $\overline{R(A^*)} = R(A^*)$*;*
iii) $\exists c > 0 : \ \forall y \in D(A^*), \quad \|y\|_{E'} \leq c\,\|A^*y\|_{F'}$. ∎

Un risultato del tutto analogo vale per l'aggiunto A^* ([Br], **Teorema II.20**):

Proposizione 1.24 *Sia $A : E \to F$ un operatore chiuso con dominio denso in E. Le seguenti proprietà si equivalgono:*
i) $R(A^*) = E'$*;*
ii) $N(A) = \{0\}$ *e* $\overline{R(A)} = R(A)$*;*
iii) $\exists c > 0 : \ \forall x \in D(A), \quad \|x\|_{E} \leq c\,\|Ax\|_{F}$. ∎

OSSERVAZIONE **1.23** In [Br] (**Capitolo II**, OSSERVAZIONE 22) si trova un esempio molto semplice (l'operatore $A : \ell^2 \to \ell^2$ definito come segue: se $x = \{x_n\} \in \ell^2$, $(Ax)_n := x_n/n$) che mostra come, anche nel caso hilbertiano, l'iniettività di A^* *non* implica la suriettività di A. Ciò chiarisce l'importanza dei risultati precedenti, nel caso di spazi a dimensione *infinita*. ∎

Per completezza, ricordiamo infine il **Teorema II.21** di [Br]:

Proposizione 1.25 *Sia $A : E \to F$ un operatore chiuso con dominio denso in E. Le seguenti proprietà si equivalgono:*
i) $D(A) = E$*;*
ii) $D(A^*) = F'$*;*
iii) $A \in \mathcal{L}(E, F)$*;*
iv) $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$.
In queste condizioni, si ha inoltre che $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. ∎

Capitolo 2

OPERATORI MONOTONI.

2.1 Operatori monotoni lineari in H.

L'argomento è trattato in [Br], **Capitolo VII**; ne richiamiamo le proprietà principali, fornendo alcuni complementi.

Siano H uno spazio di Hilbert ed A un operatore lineare (in generale, *non limitato*) da H in sè, con dominio $D(A)$.

Definizione 2.1 *i) A è* **monotono** *se* $(Ax, x) \geq 0 \ \ \forall x \in D(A)$;
ii) A è **monotono massimale** *se è monotono, ed* $R(I + A) = H$. ■

<u>Osservazione</u> **2.1** Indichiamo con $\mathcal{M}_\ell(H)$ l'insieme degli operatori monotoni in H; è evidente che la relazione $A \preceq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} G(A) \subset G(B)$ è una relazione d'ordine (parziale) in $\mathcal{M}_\ell(H)$ (e che $(\mathcal{M}_\ell(H), \preceq)$ è induttivo). Mostriamo, a chiarimento della terminologia adottata, che se A è massimale secondo la **Definizione 2.1**, allora è un elemento massimale di $(\mathcal{M}_\ell(H), \preceq)$. Infatti, sia $B \in (\mathcal{M}_\ell(H), \preceq)$ tale che $A \preceq B$; poiché $R(I + A) = H$, ne viene che $\forall y \in D(B) \ \ \exists x \in D(A)$ tale che $x + Ax = x + Bx = y + By$; allora $y - x \in N(I + B) = \{0\}$, dunque $y = x \in D(A)$, da cui $B = A$. ■

Valgono le seguenti proprietà ([Br], **Proposizione VII.1**):

Proposizione 2.1 *Se A è monotono massimale, si ha che:*
i) $D(A)$ è denso in H;
ii) A è chiuso;
iii) $\forall \lambda > 0$, l'applicazione $I + \lambda A$ è una biiezione *di $D(A)$ su H; inoltre,* $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. ■

Definiamo ora due importanti famiglie di operatori associate all'operatore *monotono massimale A.*

Definizione 2.2 *Fissato l'operatore monotono massimale A, $\forall \lambda > 0$*
i) il **risolvente** *J_λ di A è definito da* $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$;
*ii) l'***approssimante di** Yosida *A_λ di A è definita da* $A_\lambda := \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$. ■

Le principali proprietà di J_λ ed A_λ (con $\lambda > 0$) sono le seguenti (si veda [Br], **Proposizione VII.2**):

Proposizione 2.2 *i)* $\forall x \in H$, $\lim_{\lambda\to 0+} J_\lambda x = x$; *inoltre,* $\forall x \in D(A)$, $\lim_{\lambda\to 0+} A_\lambda x = Ax$;

ii) $\forall x \in H$, $(A_\lambda x, x) \geq 0$, *e* $|A_\lambda x| \leq \dfrac{|x|}{\lambda}$;

iii) $\forall x \in H$, $A_\lambda x = A(J_\lambda x)$; $\forall x \in D(A)$, $A_\lambda x = J_\lambda(Ax)$. ∎

Inoltre, vale la seguente

Proposizione 2.3 *Sia A un operatore lineare; le seguenti proprietà si equivalgono:*

i) A è monotono massimale;

ii) A è chiuso, di dominio $D(A)$ denso in H, monotono e tale che anche A^* è monotono;

iii) A è chiuso, di dominio denso, e A^* è monotono massimale.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: è sufficiente mostrare che A^* è monotono (le altre proprietà sono contenute nella **Proposizione 2.1**). Per questo, basta osservare che, detta A_λ l'approssimante di Yosida di A, risulta, $\forall y \in D(A^*)$,

$$0 \leq (y, A_\lambda y) = (y, AJ_\lambda y) = (A^* y, J_\lambda y) \to (A^* y, y)\ .$$

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: sappiamo (**Proposizioni 1.16** e **1.17**) che A^* è chiuso, con dominio $D(A^*)$ denso in H. Mostriamo che $R(I + A^*)$ è denso e chiuso in H, quindi coincide con H. Poiché anche $I + A$ è chiuso e con dominio denso, ed inoltre si ha $N(I + A) = \{0\}$, ne viene intanto che $R(I + A^*)$ *è denso*, per la **Proposizione 1.18**, *i)*. Inoltre, $R(I + A^*)$ *è chiuso*: infatti, se $\{z_n\} \subset R(I + A^*)$ è tale che $z_n \to z \in H$, allora $\exists \{y_n\} \subset D(A^*)$ con $z_n = y_n + A^* y_n$, e risulta, $\forall x \in D(A)$, $(y_n + A^* y_n, x) = (y_n, x + Ax) \to (z, x)$. Poiché $|z_n|^2 = |y_n|^2 + |A^* y_n|^2 + 2(A^* y_n, y_n) \geq |y_n|^2$, si può estrarre da $\{y_n\}$ una sottosuccessione $\{y_{n_k}\}$ tale che $y_{n_k} \rightharpoonup y \in H$. Quindi, $\forall x \in D(A)$, si ha $(y_{n_k}, x + Ax) \to (y, x + Ax) = (z, x)$, cioè $(y, Ax) = (z - y, x)$, e questo implica che $y \in D(A^*)$ e $A^* y = z - y$, cioè $z \in R(I + A^*)$.

iii) $\Rightarrow$ *i)*: basta applicare i risultati precedenti (in particolare, *i)* $\Rightarrow$ *iii)*) ad A^*, ricordando che (**Proposizione 1.17**, *ii)*) $A^{**} = A$. ∎

Si ha la seguente conseguenza (si confronti con il **Corollario 1.2**):

Corollario 2.1 *Un operatore lineare monotono e simmetrico è massimale se e solo se è autoaggiunto.* ∎

2.2 Operatori monotoni multivoci.

Vediamo ora alcune notevoli generalizzazioni delle definizioni e delle proprietà precedenti. Gli argomenti svolti in questo e nei successivi Paragrafi sono tratti, in gran parte, da: H. Brezis: "*Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973; per alcune delle questioni trattate si possono inoltre vedere, ad esempio: il testo di I. Ekeland, R. Temam citato nel Paragrafo **1.4**; J. P. Aubin, I. Ekeland: "*Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, 1984; i testi delle conferenze di E. Asplund, M. G. Crandall, G. Minty, R. T. Rockafeller in "*Theory and applications of monotone operators*, (A. Ghizzetti, Ed.), Oderisi, 1969.

Definizione 2.3 *Siano E, F due spazi di* Banach*;*

i) un **operatore (multivoco)** *A da E in F è un'applicazione di E in $\mathfrak{P}(F)$; se, in particolare, $F = E'$, si dirà che E è un* **operatore in** *E;*

ii) **dominio** *(o* **dominio effettivo***) $D(A)$,* **immagine** *(o* **range***) $R(A)$,* **nucleo** *$N(A)$ (o* **ker** *A) e* **grafico** *$G(A)$ di un operatore A sono, rispettivamente:*

$$D(A) := \{x \in E \mid Ax \neq \emptyset\} \quad ; \quad R(A) := \bigcup_{x \in E} Ax \quad ;$$
$$G(A) := \{ [\![x; y]\!] \mid x \in D(A) \ , \ y \in Ax\} \, ;$$

iii) A è detto **univoco** *se, $\forall x \in E$, Ax contiene* al più *un elemento.* ■

Sarà comodo *identificare* A con il suo *grafico*, che indicheremo quindi con la *stessa* lettera A (ciò non comporta possibilità di equivoci).

Definizione 2.4 *Se A, B sono operatori da E in F, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora:*

i) $A^{-1} := \{ [\![y; x]\!] \in F \times E \mid [\![x; y]\!] \in A\} = \{ [\![y; x]\!] \in F \times E \mid y \in Ax\}$ (ovviamente, $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$, e $(A^{-1})^{-1} = A$);

ii) $\lambda A + \mu B := \{ [\![x; \lambda y_1 + \mu y_2]\!] \mid y_1 \in Ax \ , \ y_2 \in Bx\}$ (è sottinteso che $D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$);

iii) $A \preceq B$ significa $A \subset B$ (cioè, $\forall x \in E$, $Ax \subset Bx$).[1] ■

Definizione 2.5 *Un operatore A in E si dice* **monotono** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2, \quad \langle y_1 - y_2 \, , \, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \, . \ ■$$

<u>Osservazione</u> **2.2** *i*) Se A è monotono, è immediato verificare che lo sono anche i seguenti operatori: A^{-1} (da F in E) ; λA ($\forall \lambda \geq 0$) ; la chiusura di A in $E_s \times E'_{w^*}$, nonché la chiusura di A in $E_w \times E'_s$.

ii) Se A, B sono monotoni, lo è $A + B$ (quindi anche $\lambda A + \mu B$ $\forall \lambda, \mu \geq 0$).

iii) Se A è lineare in uno spazio di Hilbert H identificato al suo duale, la definizione di monotonia ora data coincide con quella del Paragrafo precedente. ■

---

[1] Con questa relazione d'ordine, l'insieme degli operatori da E in F è evidentemente *induttivo*.

<u>Esempi</u>.

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ un'applicazione non decrescente. Posto, $\forall x \in \mathbb{R}$, $A_f\, x := \big[f(x-0), f(x+0)\big] \cap \mathbb{R}$, si ha che A_f è un operatore monotono in $\mathbb{R}$ (dimostrazione immediata). Inversamente, dato un operatore monotono A in $\mathbb{R}$, esiste un'applicazione non decrescente $f : D(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ (in generale, *non unica*) tale che $A \subset A_f$ (*non necessariamente* $A = A_f$). *Ad esempio*, si può scegliere, $\forall x \in D(A)$, $f(x) := \inf\{y \,|\, y \in Ax\}$.

ii) L'operatore P_K di **proiezione** sul convesso chiuso $K \neq \emptyset$ dello spazio di Hilbert H è *univoco* e *monotono*: si veda [Br], **Teorema V.2** per l'univocità di P_K, nonché per la caratterizzazione

$$\forall x \in H \;:\; \Big((y = P_K x) \Longleftrightarrow (\forall k \in K\;,\; (y-x, y-k) \leq 0)\Big)\,.$$

Quindi, $\forall x_1, x_2 \in H$ e $\forall k \in K$ si ha

$$(P_K x_1 - x_1, P_K x_1 - k) \leq 0 \quad \text{e} \quad (P_K x_2 - x_2, P_K x_2 - k) \leq 0\,.$$

Scegliendo $k := P_K x_2$ nella prima e $k := P_K x_1$ nella seconda disequazione, si ottiene $(P_K x_1 - x_1 - P_K x_2 + x_2, P_K x_1 - P_K x_2) \leq 0$, da cui

$$0 \leq |P_K x_1 - P_K x_2|^2 \leq (P_K x_1 - P_K x_2, x_1 - x_2)\,.$$

iii) Sia J un **operatore di contrazione in senso largo** (o **operatore non espansivo**) in H, cioè tale che $|Jx_1 - Jx_2| \leq |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in D(J)$ (è ovvio che J è *univoco*). Allora l'operatore $I - J$ è monotono: infatti, $\forall x_1, x_2 \in D(J)$,

$$(x_1 - Jx_1 - x_2 + Jx_2\,,\, x_1 - x_2) = |x_1 - x_2|^2 - (Jx_1 - Jx_2\,,\, x_1 - x_2) \geq$$

$$|x_1 - x_2|^2 - |Jx_1 - Jx_2|.|x_1 - x_2| \geq 0\,.$$

iv) Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di classe C^1, e fissato $p > 1$, sia $E := W_0^{1,p}(\Omega)$ (cosicché $E' = W^{-1,q}(\Omega)$), e definiamo

$$Au := -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

(**"laplaciano non lineare**, o **"p-laplaciano**). Si verifica facilmente che A è un'applicazione (univoca; non lineare se $p \neq 2$) da E in E': in effetti, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha $\partial u/\partial x_i \in L^p(\Omega)$, quindi

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^q(\Omega) \quad \left(\text{perchè} \;\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)^q dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)\;;$$

(inoltre, risulta evidentemente $\|Au\|_* \leq \|u\|^{p-1}$). L'operatore A così definito è monotono, poiché la funzione $x \mapsto |x|^{p-2}x$ è non decrescente.

<u>UN'ESTENSIONE</u>.

Due spazi vettoriali (reali) X, X' si dicono **in dualità** se esiste un'applicazione $\big[x;x'\big] \mapsto \langle x', x\rangle$ di $X \times X'$ in $\mathbb{R}$, che sia *bilineare* (cioè tale che $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ risulti:

$$\langle \alpha y_1 + \beta y_2, x\rangle = \alpha\langle y_1, x\rangle + \beta\langle y_2, x\rangle \ \forall x \in X,\ \forall y_1, y_2 \in X',$$

$$\langle y, \alpha x_1 + \beta x_2\rangle = \alpha\langle y, x_1\rangle + \beta\langle y, x_2\rangle \ \ \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall y \in X' \ \ ),$$

e tale che:

$$i)\ \forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists y \in X' \ :\ \langle y, x\rangle \neq 0\,;$$

$$ii)\ \forall y \in X' \setminus \{0\} \quad \exists x \in X \ :\ \langle y, x\rangle \neq 0\,.$$

Definizione 2.6 *i) Un* **operatore (multivoco)** *A (in X) è un'applicazione di X in $\mathfrak{P}(X')$;*

ii) le definizioni di **dominio** *$D(A)$,* **immagine** *$R(A)$ e* **grafico** *$G(A)$ di un operatore A in X sono come nella* **Definizione 2.3***, ii) (con E sostituito da X);*

iii) un operatore A in X si dice **monotono** *se, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$, $\forall y_1 \in Ax_1$, $\forall y_2 \in Ax_2$, risulta*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0\,. \ \blacksquare$$

(La **Definizione 2.5** è un caso (*molto!*) particolare della **Definizione 2.6**).

Un'importante caratterizzazione, *nel caso degli spazi di* HILBERT, è fornita dalla

Proposizione 2.4 *A è monotono in H se e solo se*

$$\forall(x_1, x_2 \in D(A),\ y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2,\ \lambda > 0),\ \textit{si ha}$$
$$|x_1 - x_2| \leq |(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|\,.$$

Dim.: Si osservi che

$$|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2|y_1 - y_2|^2\,.$$

Quindi,

$$A \textit{ monotono} \Longrightarrow |(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|^2 \geq |x_1 - x_2|^2\,,$$

da cui la disuguaglianza voluta. Reciprocamente, se vale la disuguaglianza si ha, $\forall\lambda > 0$,

$$2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2|y_1 - y_2|^2 \geq 0\,;$$

dividendo per λ e facendo tendere λ a zero, si ricava la monotonia di A. $\blacksquare$

Ne deriva il seguente *risultato di unicità e dipendenza continua*: se A è monotono in H, allora, $\forall\lambda > 0$ e $\forall z \in H$, l'$\ll$*equazione*$\gg$ $z \in x + \lambda Ax$ (nell'incognita x) ha al più una soluzione; inoltre, se $z_1 \in x_1 + \lambda Ax_1$ e $z_2 \in x_2 + \lambda Ax_2$, allora $|x_1 - x_2| \leq |z_1 - z_2|$.

Anche nel caso ora trattato si può allora porre la

Definizione 2.7 *Se A è monotono in H e $\lambda > 0$, il* **risolvente** *J_λ di A è l'operatore* **(univoco)** *$J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$, definito su $D(J) := R(I + \lambda A)$.* ∎

Dalla proposizione precedente segue il seguente

Corollario 2.2 *A è monotono in H se e solo se, $\forall \lambda > 0$, il suo risolvente J_λ è non espansivo.* ∎

<u>UN'ALTRA ESTENSIONE</u>.

Definizione 2.8 *Un'applicazione A di E in $\mathfrak{P}(E)$ è detta* **operatore accretivo** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A),\ \forall y_1 \in Ax_1,\ \forall y_2 \in Ax_2,\ \forall \lambda > 0,$$

$$\text{risulta } \ \|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \,. \ \blacksquare$$

Grazie alla **Proposizione 2.4**, la **Definizione 2.5**, nel caso di uno spazio di HILBERT H identificato al suo duale, è un caso particolare di questa definizione, dovuta a T. KATO. (Il corollario si adatta banalmente).

2.3 Il sottodifferenziale.

2.3.1 Richiami sui differenziali di FRÉCHET e di GÂTEAU.

Richiamiamo brevemente le definizioni (ed alcune proprietà) del differenziale *forte* (o differenziale di FRÉCHET), e del differenziale *debole* (o differenziale di GÂTEAU) di un'applicazione tra spazi normati.

<u>Differenziale di FRÉCHET</u>.

Dati due spazi normati E, F, un aperto $\Omega \subset E$ ed un'applicazione $\Phi : \Omega \to F$, si dice che Φ è **differenziabile secondo FRÉCHET nel punto** $x_0 \in \Omega$ se esiste un operatore lineare e continuo da E in F, indicato con $\Phi'(x_0)$ e detto **derivata di FRÉCHET di Φ in** x_0, tale che:

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)h = o(h) \quad \text{per } h \to 0 \,;$$

(cioè: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\|h\|_E < \delta \Longrightarrow \|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E\,).$$

Alcune proprietà (immediate):

i) se Φ è differenziabile secondo FRÉCHET in x_0, allora è continua in x_0;
ii) la derivata di FRÉCHET di Φ in x_0, se esiste, è unica;

iii) la derivata di un'applicazione costante è, $\forall x_0$, l'operatore nullo; se Φ è un operatore lineare e continuo da E in F, allora Φ è derivabile $\forall x_0 \in E$, e $\Phi'(x_0) = \Phi$;

iv) se Φ e Ψ sono differenziabili secondo FRÉCHET in x_0, lo è anche $\lambda\Phi + \mu\Psi$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e risulta $(\lambda\Phi + \mu\Psi)'(x_0) = \lambda\Phi'(x_0) + \mu\Psi'(x_0)$.

Inoltre, vale anche un teorema di tipo "derivata di funzione composta. Siano E_1, E_2, E_3 tre spazi normati, Ω_1 un intorno di $x_0 \in E_1$, Φ un'applicazione (continua) di Ω_1 in E_2, $y_0 := \Phi(x_0)$, Ω_2 un intorno di y_0 contenente $\Phi(\Omega_1)$, Ψ un'applicazione (continua) di Ω_2 in E_3. Allora, se Φ è differenziabile in x_0 e Ψ è differenziabile in y_0, l'applicazione $\Xi := \Psi \circ \Phi$ è differenziabile in x_0, e $\Xi'(x_0) = \Psi'(y_0)\Phi'(x_0)$. In effetti, basta osservare che si ha

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)h + o(h) \quad ; \quad \Psi(y_0 + k) = \Psi(y_0) + \Psi'(y_0)k + o(k)$$

per verificare che

$$\Xi(x_0 + h) = \Psi(\Phi(x_0) + \Phi'(x_0)h + o(h)) = \Psi(y_0 + (\Phi'(x_0)h + o(h))) =$$
$$\Psi(y_0) + \Psi'(y_0)(\Phi'(x_0)h + o(h)) + o(\Phi'(x_0)h + o(h)) =$$
$$\Xi(x_0) + \Psi'(y_0)\Phi'(x_0)h + o(h). \ \blacksquare$$

Differenziale di GÂTEAU.

La **derivata** $D\Phi(x_0, h)$ **di** GÂTEAU **di** Φ **in** x_0**, nella direzione** $h \neq 0$, è invece definita come il limite in norma (se esiste) per $t \to 0+$ del rapporto

$$\frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} \, .$$

In altri termini, si richiede che

$$\lim_{t \to 0+} \left\| \frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} - D\Phi(x_0, h) \right\|_F = 0 \, .$$

Si noti che, in generale, $D\Phi(x_0, h)$ *non* è necessariamente lineare in h. Tuttavia, valgono le seguenti proprietà, di verifica immediata (naturalmente, nell'ipotesi che la derivata $D\Phi(x_0, h)$ esista):

i) la derivata di GÂTEAU è unica;

ii) $D\Phi(x_0, \lambda h) = \lambda D\Phi(x_0, h) \quad \forall \lambda > 0$;

iii) $\forall y \in F'$, esiste $\frac{d}{dt}\langle y, \Phi(x_0 + th)\rangle \Big|_{t=0}$, ed è uguale a $\langle y, D\Phi(x_0, h)\rangle$,.

Se $D\Phi(x_0, h)$ è lineare e continua in h, cosicché $D\Phi(x_0, h) = \nabla\Phi(x_0)h$ con $\nabla\Phi(x_0) \in \mathcal{L}(E; F)$, si dice che Φ **è differenziabile secondo** GÂTEAU, e $\nabla\Phi(x_0)$ si chiama **differenziale di** GÂTEAU di Φ in x_0. È noto (si pensi al caso $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$...) che la derivabilità debole non implica quella forte; ma, anche in questo caso, vale il viceversa: se, in x_0, Φ è differenziabile secondo FRÉCHET, allora lo è anche secondo GÂTEAU, e $\Phi'(x_0) = \nabla\Phi(x_0)$. In effetti, poiché, per $t \to 0$,

$$\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0) = \Phi'(x_0)th + o(th) = t\Phi'(x_0)h + o(th)\,,$$

ne viene che

$$\frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} - \Phi'(x_0)h = \frac{o(th)}{t} = o(1) \quad (t \to 0)\,,$$

qualunque sia $h \neq 0$ fissato. ∎

2.3.2 Il sottodifferenziale.

In tutto questo Sottoparagrafo, φ indicherà un'applicazione *propria* definita da E in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definizione 2.9 *i) $y \in E'$ si dice* **sottogradiente** *di φ nel punto x se*

$$\varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x\rangle \quad \forall z \in E\,;$$

ii) l'insieme dei sottogradienti di φ nel punto x si indica con $\partial\varphi(x)$ (può essere vuoto);

iii) l'operatore (multivoco) in E definito da $\partial\varphi : x \mapsto \partial\varphi(x)$ si chiama **sottodifferenziale** *di φ.* ∎

È chiara la rilevanza della nozione di sottodifferenziale nei problemi di minimo, poiché

$$\varphi(x) = \min_{z\in E} \varphi(z) \quad \textit{se e solo se} \quad 0 \in \partial\varphi(x)\,.$$

Alcune conseguenze immediate della definizione:

Proposizione 2.5 *i) Se $\varphi(x_0) = +\infty$, allora $\partial\varphi(x_0) = \emptyset$;*

ii) $\partial\varphi(x)$ è convesso, e chiuso nella topologia debole di E' (quindi, anche in quella debole ed in quella forte);*

iii) se $D(\partial\varphi) \neq \emptyset$, allora φ^* è propria, e $\forall x \in D(\partial\varphi)$ si ha che $y \in \partial\varphi(x)$ se e solo se ($\varphi^*(y) < +\infty$ e) $\varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle y, x\rangle$ (da cui, ovviamente, $\varphi^{**}(x) = \varphi(x)$). In generale, risulta $\partial\varphi \subset \partial\varphi^{**}$;

iv) se φ è differenziabile secondo GÂTEAU *in x_0, con differenziale $\nabla\varphi(x_0)$, allora $\partial\varphi(x_0)$ è vuoto oppure ridotto a $\{\nabla\varphi(x_0)\}$.*

Dim.: *i)* La disuguaglianza che definisce un sottogradiente in x_0 non può essere verificata da nessun $y \in E'$ (si scelga $z \in E$ tale che $\varphi(z) < +\infty$).

ii) Si osservi che

$$\partial\varphi(x) = \bigcap_{z\in E} \{y \mid \langle y, z - x\rangle \leq \varphi(z) - \varphi(x)\}\,,$$

e che, per *ogni* $z \in E$, l'insieme $\{y \mid \langle y, z-x\rangle \leq \varphi(z)-\varphi(x)\}$ è convesso e chiuso in ${E'}_{w^*}$.

iii) Per ipotesi, esistono $x \in E$ ed $y \in E'$ tali che $\forall z \in E$ risulti $\varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z-x\rangle$, cioè $\langle y, z\rangle - \varphi(z) \leq \langle y, x\rangle - \varphi(x)$; pertanto, passando all'estremo superiore al variare di $z \in E$, si ha $\varphi^*(y) \leq \langle y, x\rangle - \varphi(x) < +\infty$. poiché, d'altra parte, $\langle y, x\rangle - \varphi(x) \leq \varphi^*(y)$, ne viene che $\varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle y, x\rangle$. Inoltre risulta, $\forall z \in E$, $\varphi^{**}(z) \geq \langle y, z\rangle - \varphi^*(y) = \langle y, z\rangle - \langle y, x\rangle + \varphi(x) = \varphi(x) + \langle y, z-x\rangle = \varphi^{**}(x) + \langle y, z-x\rangle$, quindi $y \in \partial\varphi^{**}(x)$.

iv) Sia φ differenziabile secondo Gâteau nel punto x_0, e sia $y \in \partial\varphi(x_0)$. Fissati ad arbitrio $x \in E$ e $t \in \mathbb{R}$, si ha dalla definizione (con $z := x_0 + tx$),

$$\varphi(x_0 + tx) \geq \varphi(x_0) + t\langle y, x\rangle \ .$$

Quindi, per $t > 0$ si ha

$$\frac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t} \geq \langle y, x\rangle \ ;$$

passando al limite per $t \to 0+$ ne viene che $\langle \nabla\varphi(x_0), x\rangle \geq \langle y, x\rangle$. La disuguaglianza deve valere anche con $-x$ sostituito ad x, il che fornisce $\langle \nabla\varphi(x_0), x\rangle \leq \langle y, x\rangle$. In definitiva, deve essere $\langle \nabla\varphi(x_0), x\rangle = \langle y, x\rangle$; per l'arbitrarietà di x, ne viene che $y = \nabla\varphi(x_0)$. ∎

Un primo *fondamentale* collegamento con il Paragrafo precedente:

Proposizione 2.6 *$\partial\varphi$ è un operatore monotono.*

Dim.: siano $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$. Dalla **Definizione 2.9** si ha allora, in particolare,

$$\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1\rangle \ ,$$

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle \ ,$$

da cui, sommando, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$. ∎

Nel caso *convesso* valgono ulteriori proprietà, tra cui le seguenti:

Proposizione 2.7 *Sia $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa:*

i) se φ è continua in x_0, allora $\partial\varphi(x_0) \neq \emptyset$ (quindi, se φ è inoltre differenziabile secondo Gâteau *in x_0, con differenziale $\nabla\varphi(x_0)$, allora $\partial\varphi(x_0) = \{\nabla\varphi(x_0)\}$); inoltre, $\partial\varphi(x_0)$ è compatto in ${E'}_{w^*}$;*

ii) se E è riflessivo (ed identificato al suo biduale), e φ è s.c.i., si ha

$$\partial\varphi^*(y) = \{x \in E \mid \varphi^*(y) + \varphi(x) = \langle y, x\rangle\} \ ;$$

quindi, $x \in \partial\varphi^*(y) \Longleftrightarrow y \in \partial\varphi(x)$, o, in altri termini, $\partial\varphi^* = (\partial\varphi)^{-1}$.

Dim.: *i)* $\forall \lambda > 0$, il punto $\big[x_0; \varphi(x_0) + \lambda\big]$ è *interno* ad epi φ; quindi, posto $A := \mathrm{int}(\mathrm{epi}\ \varphi)$, si ha che A è un *convesso aperto, non vuoto*, disgiunto da $\big[x_0; \varphi(x_0)\big]$. Per il teorema di HAHN-BANACH, $\exists y \in E'$, $\exists c, \alpha \in \mathbb{R}$ tali che $[y; c] \neq [0; 0]$ e $\langle y, z\rangle + c\mu \geq \alpha \geq \langle y, x_0\rangle + c\varphi(x_0) \quad \forall [z; \mu] \in A$, quindi anche $\forall [z; \mu] \in \overline{A} = \overline{\mathrm{epi}\ \varphi}$ (si ricordi la **Proposizione 1.10**). Se si sceglie $z := x_0$, si ha $\langle y, x_0\rangle + c\mu \geq \alpha \geq \langle y, x_0\rangle + c\varphi(x_0) \quad \forall \mu \geq \varphi(x_0)$, da cui $c \geq 0$. Ma non può essere $c = 0$ (altrimenti sarebbe $\langle y, z\rangle \geq \langle y, x_0\rangle\ \forall z \in \mathrm{dom}\,\varphi$, assurdo perché, essendo x_0 *interno* a $\mathrm{dom}\,\varphi$, $\exists \varrho > 0$ tale che $\Sigma(x_0, \varrho) \subset \mathrm{dom}\,\varphi$, e ciò implica, $\forall w \in E$ con $\|w\| = 1$, (ponendo ad esempio $z = x_0 \pm \frac{1}{2}\varrho w$) che $\langle y, w\rangle = 0$, cioè $y = 0$). Quindi, $c > 0$, e allora

$$\Big\langle -\frac{y}{c}, z\Big\rangle - \varphi(z) \leq \Big\langle -\frac{y}{c}, x_0\Big\rangle - \varphi(x_0) \quad \forall z \in \mathrm{dom}\,\varphi\ ,$$

cioè, $\forall z \in \mathrm{dom}\,\varphi$ o, equivalentemente, $\forall z \in E$,

$$\varphi(z) \geq \varphi(x_0) + \Big\langle -\frac{y}{c}, z - x_0\Big\rangle\,,$$

cosicché

$$-\frac{y}{c} \in \partial\varphi(x_0)\ .$$

Per dimostrare la compattezza di $\partial\varphi(x_0)$ in E'_{w^*}, è sufficiente dimostrarne la limitatezza.[2] Per questo, sia intanto $\delta > 0$ tale che $\forall w \in E$ con $\|w\| \leq \delta$ risulti $|\varphi(x_0 + w) - \varphi(x_0)| < 1$, e sia $y \in \partial\varphi(x_0)$. Si ha allora $\varphi(x_0 + w) \geq \varphi(x_0) + \langle y, w\rangle$, da cui $\langle y, w\rangle < 1$, quindi $\Big|\langle y, \frac{w}{\delta}\rangle\Big| < \frac{1}{\delta}$, cioè $||y||_* \leq \frac{1}{\delta}$.

ii) Evidente, per la **Proposizione 2.5**, *iii)* e per il teorema di FENCHEL-MOREAU. ∎

<u>OSSERVAZIONE</u> **2.3** Se $\partial\varphi(x_0)$ è ridotto ad un punto, *non è detto* (anche nel caso hilbertiano) che φ sia differenziabile in x_0. Ad esempio, posto

$$E := \ell^2, \quad K := \left\{ \{x_n\} \in \ell^2 \quad \Big| \quad |x_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \right\},$$

si ha che K è un convesso chiuso di ℓ^2 contenente l'origine; detta φ la sua funzione indicatrice (che quindi è convessa, s.c.i. e propria), risulta

$$(y \in \partial\varphi(0)) \Longleftrightarrow \big(\forall z \in \ell^2,\ \varphi(z) \geq (y, z)\big) \Longleftrightarrow (\forall z \in K,\ 0 = (y, z))\,.$$

poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $\dfrac{e^{(n)}}{n^2} \in K$, ne viene che $y = 0$, cioè $\partial\varphi(0) = \{0\}$. D'altra parte, posto $h := \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(th) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(th)}{t} = +\infty,$$

(dato che, $\forall t \neq 0$, $\varphi(th) = +\infty$). ∎

[2] Si ricordi il **Teorema III.15** di [BR].

ESEMPI.

Riprendiamo gli esempi del Sottoparagrafo 1.2.3, di cui manteniamo la numerazione e le notazioni; si farà costante uso, anche senza richiamarla esplicitamente, della **Proposizione 2.5**.

ALCUNI ESEMPI CON $E = \mathbb{R}$.

• **1.** $\varphi_{a,b}(x) := ax + b$.
È ovvio che $\partial\varphi_{a,b}(x) = \{a\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, mentre

$$\partial\varphi^*_{a,b}(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } y = a, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

• **2.** $\varphi_{a,b}(x) := I_{]a,b[}(x); \quad \psi_{a,b}(x) := I_{[a,b]}(x); \quad \chi_{\alpha,\beta}(x) := \alpha|x| + \beta$.
È immediata la verifica che:

$$\partial\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } a < x < b, \\ \emptyset & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$\partial\psi_{a,b}(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x < a \text{ o } x > b, \\ ]-\infty, 0] & \text{se } x = a, \\ \{0\} & \text{se } a < x < b, \\ [0, +\infty[& \text{se } x = b; \end{cases}$$

mentre risulta, $\forall \beta \in \mathbb{R}$,

per $\alpha < 0$, $\partial\chi_{\alpha,\beta}(x) = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
per $\alpha = 0$, $\partial\chi_{0,\beta}(x) = \{0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

$$\text{per } \alpha > 0, \quad \partial\chi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \{-\alpha\} & \text{se } x < 0, \\ [-\alpha, \alpha] & \text{se } x = 0, \\ \{\alpha\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

• **3.** $\varphi_a(x) := I_{\{a\}}(x)$.
Allora

$$\partial\varphi_a(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \neq a, \\ \mathbb{R} & \text{se } x = a, \end{cases}$$

(e $\partial\varphi^*_a(y) = \{a\} \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

• **4.** Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si ponga

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si ha ovviamente che

$$\text{per } \alpha > 0, \quad \partial\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x = 0, \\ \{x\} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Per $\alpha < 0$, si ha che $y \in \partial\varphi_\alpha(0) \Longleftrightarrow \varphi_\alpha(z) \geq \alpha + yz \quad \forall z \in \mathbb{R}$, disequazione verificata se e solo se $y \in \left[-\sqrt{-2\alpha}, \sqrt{-2\alpha}\ \right]$; per $x \neq 0$, per la **Proposizione 2.5**, *iv)*, $y \in \partial\varphi_\alpha(x) \implies y = x$, quindi $\partial\varphi_\alpha(x) \neq \emptyset$ se e solo se $\varphi_\alpha(z) \geq xz - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}$. La disequazione è soddisfatta se $z \neq 0$; per $z = 0$, lo è se e solo se $|x| \geq \sqrt{-2\alpha}$. In conclusione, se $\alpha < 0$ risulta

$$\partial\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } |x| \geq \sqrt{-2\alpha}, \\ \emptyset & \text{se } x \in \left[-\sqrt{-2\alpha}, \sqrt{-2\alpha}\ \right] \setminus \{0\}, \\ \left[-\sqrt{-2\alpha}, \sqrt{-2\alpha}\ \right] & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

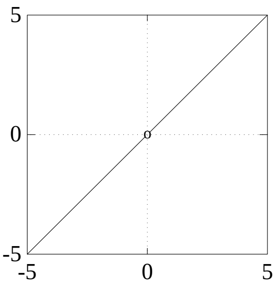
Si osservi inoltre che (verifica immediata)

$$\partial\varphi_\alpha^{**}(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } |x| \geq \sqrt{-2\alpha}, \\ \{\sqrt{-2\alpha}\ \operatorname{sign} x\} & \text{se } x \in \left[-\sqrt{-2\alpha}, \sqrt{-2\alpha}\ \right] \setminus \{0\}, \\ \left[-\sqrt{-2\alpha}, \sqrt{-2\alpha}\ \right] & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

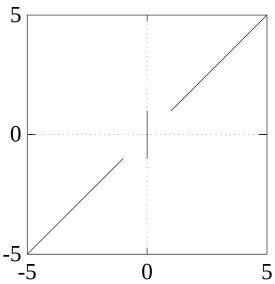
Infine, per $\alpha = 0$ si ha

$$\partial\varphi_0(x) = \{x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

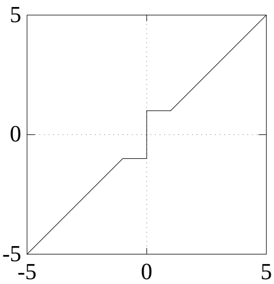
Alcuni esempi (nel primo dei quali, α è un *qualunque* numero > 0):



$\partial\varphi_\alpha(x) \quad (\alpha > 0)$



$\partial\varphi_{-.5}(x)$



$\partial\varphi_{-.5}^{**}(x)$

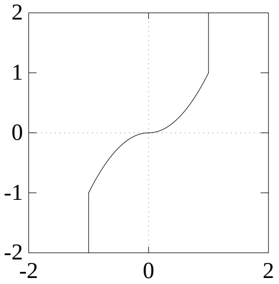
• **5.** $\varphi_p(x) := |x|^p/p \quad$ (con $p > 0$). È immediato verificare che: se $p > 1$, $\partial\varphi_p(x) = \{|x|^{p-1}\operatorname{sign} x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; se $0 < p < 1$, $\partial\varphi_p(0) = \{0\}$, mentre $\forall x \neq 0$ si ha $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$. (Il caso $p = 1$ rientra nell'Esempio **2**).

• **6.** Fissato $p > 0$, sia

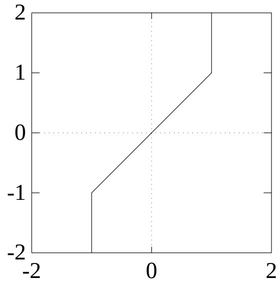
$$\varphi_p(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}|x|^p & \text{se } |x| \leq 1, \\ +\infty & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

È evidente che, $\forall x$ con $|x| > 1$, risulta $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$. Inoltre:

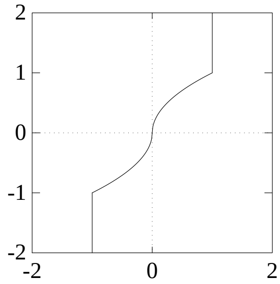
<u>$p > 1$</u>: per $|x| < 1$, si ha $\partial\varphi_p(x) = \{|x|^{p-1}\ \operatorname{sign} x\}$; per $x = 1$, è facile verificare (per la convessità di φ_p, ed osservando che $\varphi_p'(1 - 0) = 1$)) che $\partial\varphi_p(1) = [1, +\infty[$. Analogamente si vede che $\partial\varphi_p(-1) =]-\infty, -1]$. Alcuni esempi:



$\partial\varphi_3(x)$



$\partial\varphi_2(x)$

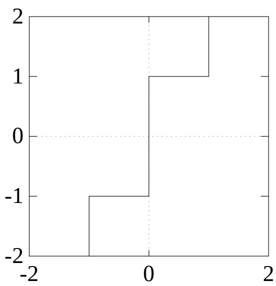


$\partial\varphi_{1.5}(x)$

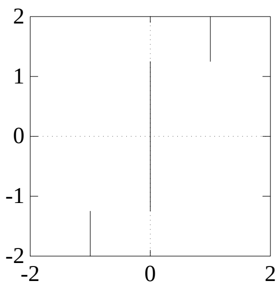
<u>$p=1$</u>: per $x=0$, $y \in \partial\varphi_1(0) \iff |z| \geq yz \quad \forall z \in [-1,1]$, da cui deriva subito che $\partial\varphi_1(0) = [-1,1]$. Si controlla immediatamente che $\partial\varphi_1(-1) =]-\infty,-1]$ e $\partial\varphi_1(1) = [1,+\infty[$. È poi ovvio che per $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ risulta $\partial\varphi_1(x) = \{\operatorname{sign} x\}$.

<u>$0<p<1$</u>: è immediato verificare che $\partial\varphi_p(0) = \left[-\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right]$, mentre $\partial\varphi_p(1) = \left[\frac{1}{p},+\infty\right[$ e $\partial\varphi_1(-1) = \left]-\infty,-\frac{1}{p}\right]$. Infine, quando $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ si ha che $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$: infatti, se $\partial\varphi_p()$ non fosse vuoto, per la **Proposizione 2.5** dovrebbe coincidere con $\{|x|^{p-1}\operatorname{sign} x\}$, mentre è facile vedere che $|x|^{p-1}\operatorname{sign} x$ *non* è sottogradiente di φ_p in x. Si controlla senza difficoltà che, inoltre, $\partial\varphi_p^{**}(x) = \partial\varphi_p(x)$ se $x \in \{-1,0,1\}$, mentre $\partial\varphi_p^{**} = \left\{\frac{1}{p}\operatorname{sign} x\right\}$ se $0<|x|<1$.

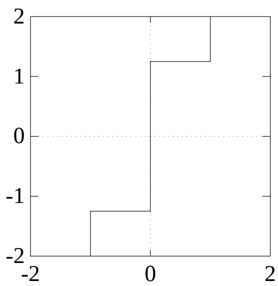
Esempi:



$\partial\varphi_1(x)$



$\partial\varphi_{.8}(x)$



$\partial\varphi_{.8}^{**}(x)$

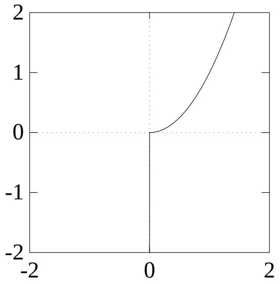
- **7.** Fissato $p>0$, si ponga

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} \frac{1}{p}x^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

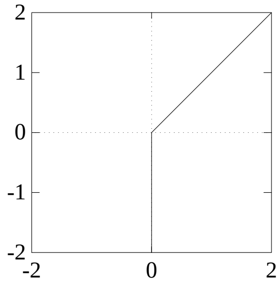
Per $x<0$, è ovvio che $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$. Inoltre:

<u>$p>1$</u>: è evidente che $\partial\varphi_p(x) = \{x^{p-1}\} \quad \forall x>0$, e che $\partial\varphi_p(0) =]-\infty,0]$.

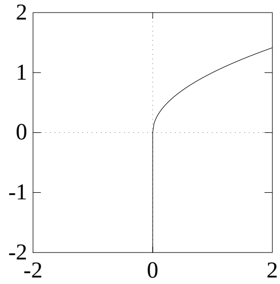
Esempi:



$\partial\varphi_3(x)$



$\partial\varphi_2(x)$



$\partial\varphi_{1.5}(x)$

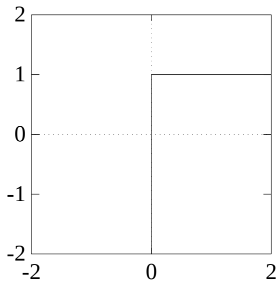
È poi chiaro che, per $\underline{p = 1}$,

$$\partial\varphi_1(x) = \begin{cases} \,]-\infty, 1] & \text{se } x = 0, \\ \{1\} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

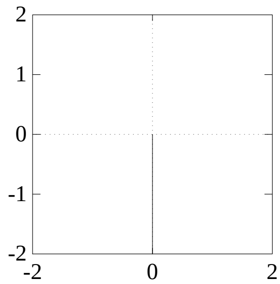
mentre, per $\underline{0 < p < 1}$,

$$\partial\varphi_p(x) = \begin{cases} \,]-\infty, 0] & \text{se } x = 0, \\ \emptyset & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esempi (il secondo vale $\forall p \in \,]0, 1[$):



$\partial\varphi_1(x)$



$\partial\varphi_p(x)$

- **8.** Fissato $p > 0$, sia

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} -\frac{1}{p}x^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per $x < 0$, è ovvio che $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$. Inoltre:

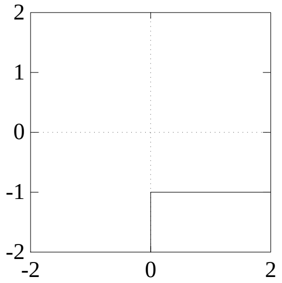
$\underline{p > 1}$: è evidente che $\partial\varphi_p(x) = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

$\underline{p = 1}$:

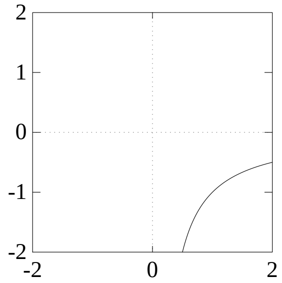
$$\partial\varphi_1(x) = \begin{cases} \,]-\infty, -1] & \text{se } x = 0, \\ \{-1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$\underline{0 < p < 1}$: $\partial\varphi_p(x) = \{-x^{p-1}\} \quad \forall x > 0$, mentre $\partial\varphi_p(0) = \emptyset$.

Esempi (il secondo vale $\forall p \in \,]0, 1[\,$):



$\partial\varphi_1(x)$



$\partial\varphi_p(x)$

Alcuni esempi con E spazio normato.

In alcuni degli esempi che seguono, sarà utile anche la

Proposizione 2.8 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, propria, s.c.i. e* pari*, e sia E uno spazio normato. Posto, $\forall x \in E$, $\varphi(x) := f(\|x\|)$, si ha che $y \in \partial\varphi(x)$ se e solo se valgono* entrambe *le proprietà: $\|y\|_* \in \partial f(\|x\|)$ e $\langle y, x\rangle = \|y\|_* \|x\|$; in altri termini, risulta*

$$\partial\varphi(x) = \{y \in E' \mid \varphi(x) + \varphi^*(y) = f(\|x\|) + f^*(\|y\|_*) = \langle y, x\rangle = \|y\|_* \|x\|\} .$$

Dim.: Dalla **Proposizione 2.5**, *iii)* si ha che $y \in \partial\varphi(x)$ se e solo se $\varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle y, x\rangle$; quindi, per definizione di φ e grazie alla **Proposizione 1.7**, se e solo se $f(\|x\|) + f^*(\|y\|_*) = \langle y, x\rangle$. Poiché però, per definizione di f^*, si ha $f(\|x\|) + f^*(\|y\|_*) \geq \|y\|_* \|x\| \quad \forall x \in E$, $\forall y \in E'$, l'uguaglianza $f(\|x\|) + f^*(\|y\|_*) = \langle y, x\rangle$ è verificata se e solo se $\langle y, x\rangle = \|y\|_* \|x\| = f(\|x\|) + f^*(\|y\|_*)$. ■

• **9.** Fissato $p > 0$, si ponga $f_p(t) := |t|^p/p$ e $\varphi_p(x) := f_p(\|x\|)$. Evidentemente,

$$\forall p > 0 \ \text{ si ha che } \ 0 \in \partial\varphi_p(0) .$$

Inoltre:

$p > 1$: poiché $y \in \partial\varphi_p(x) \Rightarrow \|y\|_* \in \partial f_p(\|x\|) = \{\|x\|^{p-1}\}$, ne viene che

$$\partial\varphi_p(x) = \left\{ y \in E' \;\middle|\; \frac{1}{p}\|x\|^p + \frac{1}{q}\|y\|_*^q = \|x\|^p = \langle y, x\rangle = \|y\|_* \|x\| \right\} ;$$

in particolare, per $p = 2$ si ha quindi che $\partial\varphi_2$ è l'**applicazione di dualità**, che manda $x \in E$ nell'insieme

$$\{y \in E' \mid \langle y, x\rangle = \|x\|^2 = \|y\|_*^2\} .$$

<u>OSSERVAZIONE</u> **2.4** L'insieme $\partial\varphi_2(x)$ può *non* essere ridotto ad un punto (ed allora $\varphi_2(x)$ *certamente non è differenziabile*). Ad esempio, si scelgano $E := L^1(-1,1)$ ed $x(t) := \chi_{[0,1]}(t)$;[3] se $f(t)$ è una qualunque funzione in $L^\infty(-1,1)$ con $\|f\|_* \le 1$, posto $y(t) := x(t) + f(t)\chi_{[-1,0]}(t)$ si ha evidentemente che $y \in \partial\varphi_2(x)$.

In uno spazio di HILBERT H (identificato al suo duale), la funzione $\varphi_2(x) := \frac{1}{2}|x|^2$ è invece differenziabile secondo FRÉCHET $\forall x_0 \in H$, con differenziale $\varphi_2'(x_0) = x_0$ $(\in H' = H)$: infatti,

$$\tfrac{1}{2}|x_0+h|^2 - \tfrac{1}{2}|x_0|^2 = \tfrac{1}{2}|x_0|^2 + (x_0,h) + \tfrac{1}{2}|h|^2 - \tfrac{1}{2}|x_0|^2 = (x_0,h) + \tfrac{1}{2}|h|^2$$

$$= (x_0,h) + o(h)\,.$$

Se ne deduce, dal teorema di derivazione delle funzioni composte, che per $x_0 \in H \setminus \{0\}$ la funzione φ_p è differenziabile secondo FRÉCHET, con differenziale $\varphi_p'(x_0) = x_0|x_0|^{p-2}$, per ogni $p > 0$; questo, tra l'altro, fornisce un esempio in cui la condizione $\|y\|_* \in \partial f(\|x\|)$ *non implica* che $y \in \partial\varphi(x)$. (Indicazioni per il caso, molto più complesso, degli spazi di BANACH si trovano, ad esempio, in [BR], **Complementi al capitolo 3**). ■

<u>$p=1$</u>: è evidente che $\partial\varphi_1(0) = \overline{\Sigma_*(0,1)}$, mentre, per $x \neq 0$,

$$\partial\varphi_1(x) = \left\{ y \in E' \;\middle|\; \|x\| + I_{\overline{\Sigma_*(0,1)}}(y) = \langle y,x\rangle = \|y\|_*\,\|x\| \right\} \;;$$

se ne deduce immediatamente che

$$\textit{se } x \neq 0, \quad \partial\varphi_1(x) = \{ y \in E' \mid \|y\|_* = 1 \text{ e } \langle y,x\rangle = \|x\| \ \} \ .$$

<u>OSSERVAZIONE</u> **2.5** Anche $\partial\varphi_1(x)$ può *non* essere ridotto ad un solo punto (si veda l'esempio nell'OSSERVAZIONE precedente). Invece, come si è visto, nel caso hilbertiano risulta, per $x \neq 0$, $\partial\varphi_1(x) = \left\{\dfrac{x}{|x|}\right\}$, risultato facile da ottenere anche direttamente: basta osservare che se $y \in \partial\varphi_1(x)$ allora

$$\left| y - \frac{x}{|x|} \right|^2 = |y|^2 - \frac{2}{|x|}(y,x) + 1 = 0 \ . \ ■$$

<u>$0 < p < 1$</u>: si controlla immediatamente che

$$\partial\varphi_p(0) = \{0\}, \text{ mentre, } \forall x \neq 0,\ \partial\varphi_p(x) = \emptyset\,.$$

[3] se $A \subset B$, si indica con χ_A la **funzione caratteristica** di A (in B), definita da

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

• **10.** Fissato $p > 0$, e posto $\varphi_p(x) := f_p(\|x\|)$, dove

$$f_p(t) := \begin{cases} \frac{1}{p}\,|t|^p & \text{se } |t| \leq 1, \\ +\infty & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

per la **Proposizione 2.5**, *i)* si ha intanto che

$$\forall p > 0,\ \textit{se}\ \|x\| > 1\ \textit{allora}\ \partial\varphi_p(x) = \emptyset\,.$$

$\underline{p \geq 1}$: per gli x tali che $\|x\| < 1$ valgono i risultati dell'esercizio precedente (la verifica è immediata).

$\underline{0 < p < 1}$: si vede subito che $\partial\varphi_p(0) = \left\{y \in E' \mid \|y\|_* \leq \frac{1}{p}\right\}$, mentre, per $0 < \|x\| < 1$, si ha $\partial\varphi_p(x) = \emptyset$.

Resta quindi da esaminare soltanto il caso $\|x\| = 1$. Si hanno i seguenti risultati:

$\underline{p \geq 1}$: se $y \in \partial\varphi_p(x)$, si ha che $\|y\|_* \in \partial f_p(1)$, quindi $\|y\|_* \geq 1$; di conseguenza, $\varphi_p^*(y) = \|y\|_* - \dfrac{1}{p}$, ed è immediato concludere che

$$\textit{se}\ \|x\| = 1,\ \textit{allora}\ \partial\varphi_p(x) = \{y \in E' \mid \|y\|_* = \langle y, x\rangle \geq 1\}\,.$$

Nel caso hilbertiano, $\partial\varphi_p(x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 1\}$.

$\underline{0 < p < 1}$: si verifica subito che

$$\textit{se}\ \|x\| = 1,\ \textit{allora}\ \partial\varphi_p(x) = \left\{y \in E' \;\middle|\; \|y\|_* = \langle y, x\rangle \geq \frac{1}{p}\right\}\,.$$

Nel caso hilbertiano, $\partial\varphi_p(x) = \left\{\lambda x \mid \lambda \geq \frac{1}{p}\right\}$.

• **11.** Fissato $p > 0$, e posto

$$\varphi_p(x) := \begin{cases} \frac{1}{p}\|x\|^p & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è ovvio che $\partial\varphi_p(0) = \emptyset$, mentre per $x \neq 0$ valgono i risultati dell'esempio **9.** visto più sopra.

• **12.** Se $\varphi := I_K$, dove K è un sottoinsieme non vuoto di E, ovviamente, $y \in \partial\varphi(x)$ se e solo se

$$(\forall z \in E,\ I_K(z) \geq I_K(x) + \langle y, z - x\rangle) \Longleftrightarrow (\forall k \in K,\ 0 \geq I_K(x) + \langle y, k - x\rangle)\,.$$

Si ritrova intanto (cfr. **Proposizione 2.5**, *i)*) che

$$\textit{se}\ x \notin K,\ \textit{allora}\ \partial I_K(x) = \emptyset\ ;$$

mentre

$$\textit{se}\ x \in K,\ \textit{allora}\ \partial I_K(x) = \{y \in E' \mid \forall k \in K,\ \langle y, k - x\rangle \leq 0\}\,.$$

$\partial I_K(x)$ è un *cono convesso, chiuso nella topologia debole** , detto il **cono normale a K nel punto** x. Si vede facilmente che

$$\textit{se}\ x \in \operatorname{int} K,\ \textit{allora}\ \partial I_K(x) = \{0\}$$

(perché $\Sigma(x, \varepsilon) \subset K$ per un opportuno $\varepsilon > 0$). Inoltre,

$$\textit{se}\ K\ \textit{è un sottospazio di}\ E,\ \textit{allora}\ \partial I_K(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin K, \\ K^\perp & \text{se } x \in K. \end{cases} \blacksquare$$

2.4 Operatori monotoni massimali.

Indichiamo con $(\mathcal{M}_m(E), \preceq)$ l'insieme degli operatori (*multivoci*) monotoni in E, munito della relazione d'ordine $A \preceq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \subset B$, e poniamo la seguente

Definizione 2.10 *Un operatore monotono* **massimale** *in E è un elemento massimale di $(\mathcal{M}_m(E), \preceq)$.* ■

Una formulazione *equivalente* (e, spesso, più comoda) deriva dalla

Proposizione 2.9 *Se A è un operatore monotono in E, le condizioni seguenti si equivalgono:*

i) A è massimale;

ii) se $[x; y] \in E \times E'$ è tale che $\forall [\xi; \eta] \in A$ risulta $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$, allora $[x; y] \in A$.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: sia $[x; y] \in E \times E'$ tale che $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0 \;\; \forall [\xi; \eta] \in A$, e poniamo $B := A \cup \{ [x; y] \}$; è evidente che B è monotono, e che $A \preceq B$; per la massimalità di A, segue che $[x, y] \in A$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: sia B un operatore monotono tale che $A \preceq B$; fissata ad arbitrio $[x; y] \in B$, risulta $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0 \;\; \forall [\xi, \eta] \in B$, quindi, in particolare, $\forall [\xi, \eta] \in A$. Ne viene che deve essere $[x, y] \in A$, cioé che A è massimale. ■

<u>Osservazione</u> **2.6** Se A è monotono massimale, allora:

i) $\forall x \in E$, Ax è *convesso* e w^*-*chiuso*: basta osservare che

$$Ax = \bigcap_{[\xi;\eta] \in A} \{ y \mid \langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0 \} \, ;$$

ii) anche A^{-1} e λA $(\forall \lambda > 0)$ sono monotoni massimali. Invece, se A e B sono monotoni massimali, *non è detto* che lo sia $A + B$ (addirittura, $D(A+B)$ potrebbe essere *vuoto*).

iii) A è *chiuso* in $E \times E'_{w^*}$ (perché la chiusura di A in $E \times E'_{w^*}$ contiene A, ed è un operatore monotono : si veda l'<u>Osservazione</u> **2.2**, *i)*). ■

Più in generale, vale il seguente risultato:

Proposizione 2.10 *Sia A monotono massimale; se $[x_n; y_n] \in A$ è tale che $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y$, e $\limsup_n \langle y_n, x_n \rangle \leq \langle y, x \rangle$, allora anche $[x; y] \in A$; inoltre, esiste il $\lim_n \langle y_n, x_n \rangle$, ed è uguale a $\langle y, x \rangle$.*

Dim.: $\langle \eta - y_n, \xi - x_n \rangle \geq 0 \; \forall [\xi; \eta] \in A$, da cui $\langle y, x \rangle \geq \limsup_n \langle y_n, x_n \rangle \geq \limsup_n \{ \langle \eta, x_n \rangle + \langle y_n - \eta, \xi \rangle \} = \langle \eta, x \rangle + \langle y - \eta, \xi \rangle$, cioè $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$, quindi $[x; y] \in A$. Allora $\langle y - y_n, x - x_n \rangle \geq 0$, cioè $\langle y_n, x_n \rangle \geq \langle y, x_n \rangle + \langle y_n, x \rangle - \langle y, x \rangle$, e, infine, $\liminf_n \langle y_n, x_n \rangle \geq \langle y, x \rangle \geq \limsup_n \langle y_n, x_n \rangle$, da cui la tesi. ■

Nel seguito degli appunti, ci limiteremo a studiare il caso particolare in cui

A è un operatore in uno spazio di HILBERT *H (identificato al suo duale).*

Si ha allora la seguente caratterizzazione:

Proposizione 2.11 *Le proprietà seguenti si equivalgono:*

i) $\forall \lambda > 0$, *il* risolvente $J_\lambda := (I+\lambda A)^{-1}$ *di A è un* operatore non espansivo *definito su* tutto *H;*

ii) A è monotono e $R(I + A) = H$;

iii) A è monotono massimale.

Dim.: $i) \Longleftrightarrow ii)$: si ricordi il **Corollario 2.2**;

$ii) \Rightarrow iii)$: se B è un'estensione monotona di A, allora $\forall x \in D(B)$ e $\forall y \in Bx$ devono esistere $x' \in D(A)$ ed $y' \in Ax'$ tali che $x' + y' = x + y$. Ma allora $x' \in D(B)$, $y' \in Bx'$, e, per la monotonia di B, $0 \leq (y' - y, x' - x) = -|x' - x|^2 = -|y' - y|^2 \leq 0$, da cui $x = x' \in D(A)$ e $y = y' \in Ax$.

$iii) \Rightarrow i)$: la dimostrazione è piuttosto elaborata: si veda, ad esempio, il testo di J. P. AUBIN, I. EKELAND citato nel Sottoparagrafo 1.2.1. ∎

ESEMPI DI OPERATORI MONOTONI MASSIMALI.

i) Un primo fondamentale esempio, che fornisce un collegamento con il Sottoparagrafo 2.3.2, è dato dalla seguente

Proposizione 2.12 *Se $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, propria e s.c.i., allora $\partial\varphi$ è monotono massimale.*

Dim.: sappiamo già (**Proposizione 2.6**) che $\partial\varphi$ è monotono. Grazie alla **Proposizione 2.11**, è sufficiente dimostrare che, per ogni fissato $y_0 \in H$, $\exists x_0 \in H$ tale che $y_0 \in x_0 + \partial\varphi(x_0)$. Consideriamo allora l'applicazione $x \mapsto \psi(x) := \varphi(x) + \frac{1}{2}|x - y_0|^2$, che è convessa, propria e s.c.i.. poiché $\operatorname{dom}\varphi^* \neq \emptyset$, fissato $z \in H$ tale che $\varphi^*(z) < +\infty$ si ha, per definizione, che $\varphi^*(z) \geq (z, x) - \varphi(x) \quad \forall x \in H$, cioè $\varphi(x) \geq (z, x) - \varphi^*(z)$, e, in definitiva, $\psi(x) \geq \frac{1}{2}|x - y_0|^2 + (z, x) - \varphi^*(z) \geq \frac{1}{2}|x - y_0|^2 - |z||x| - \varphi^*(z)$, da cui si deduce che $\lim_{|x|\to+\infty} \psi(x) = +\infty$. Pertanto, $\psi(x)$ ammette *minimo* in un punto $x_0 \in H$, e ciò implica (si veda, qui di seguito, il **Lemma 2.1**) che $y_0 - x_0 \in \partial\varphi(x_0)$. ∎

Lemma 2.1 *Siano: φ una funzione convessa, propria, s.c.i., definita da H in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; y_0 un elemento fissato in H; λ un numero > 0. Posto $\psi(x) := \varphi(x) + \dfrac{1}{2\lambda}|x - y_0|^2$, si ha che*

$$x_0 \in H \text{ è un punto di minimo per } \psi(x) \text{ se e solo se } \frac{y_0 - x_0}{\lambda} \in \partial\varphi(x_0)\,.$$

Dim.: se $\frac{y_0 - x_0}{\lambda} \in \partial\varphi(x_0)$, si ha $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \left(\frac{y_0 - x_0}{\lambda}, x - x_0\right)$ $\forall x \in H$, da cui $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2\lambda}|x - y_0|^2 \geq \varphi(x_0) + \frac{1}{\lambda}(y_0 - x_0, x - x_0) + \frac{1}{2\lambda}|x - y_0|^2 = \psi(x_0) - \frac{1}{2\lambda}|x_0 - y_0|^2 + \frac{1}{\lambda}(y_0 - x_0, x - x_0) + \frac{1}{2\lambda}|x - y_0|^2 = \psi(x_0) + \frac{|x - x_0|^2}{2\lambda} \geq \psi(x_0)$, quindi x_0 è un punto di minimo.
Reciprocamente, se x_0 è punto di minimo, $\forall x \in H$ e $\forall t \in [0, 1]$, posto $x_t := (1 - t)x_0 + tx$, si ha $\psi(x_0) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2\lambda}|x_0 - y_0|^2 \leq \psi(x_t) = \varphi(x_t) + \frac{1}{2\lambda}|x_t - y_0|^2 = \varphi((1 - t)x_0 + tx) + \frac{1}{2\lambda}|(1 - t)x_0 + tx - y_0|^2 \leq (1 - t)\varphi(x_0) + t\varphi(x) + \frac{1}{2\lambda}|(1 - t)x_0 + tx - y_0|^2$.
Quindi, $t\{\varphi(x_0) - \varphi(x)\} \leq \frac{1}{2\lambda}\left\{|(1 - t)x_0 + tx - y_0|^2 - |x_0 - y_0|^2\right\} = \frac{1}{2\lambda}\left\{t^2|x - x_0|^2 + 2t(x_0 - y_0, x - x_0)\right\}$. Dividendo per t e facendo tendere t a zero, si ha $\varphi(x_0) - \varphi(x) \leq \frac{1}{\lambda}(x_0 - y_0, x - x_0)$, cioè $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \left(\frac{y_0 - x_0}{\lambda}, x - x_0\right)$, da cui $\frac{y_0 - x_0}{\lambda} \in \partial\varphi(x_0)$. ∎

ii) Per introdurre un'altra categoria di operatori monotoni massimali, poniamo la seguente

Definizione 2.11 *Un operatore A monotono* univoco *con $D(A) = H$ si dice* **emicontinuo** *se: $\forall x, y \in H$, si ha che $A(x + ty)$ tende* debolmente *ad Ax quando $t \to 0$.* ∎

Vale il seguente risultato:

Proposizione 2.13 *A emicontinuo $\Longrightarrow$ A massimale.*

Dim.: sia $[x; y] \in H \times H$ tale che $\forall \xi \in H$ si abbia $(A\xi - y, \xi - x) \geq 0$. Allora, $\forall z \in H$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, posto $\xi := x + tz$ si ha che $(A(x + tz) - y, tz) \geq 0$, quindi $(A(x + tz) - y, z) = 0$ e, passando al limite per $t \to 0$, $(Ax - y, z) = 0$, da cui, per l'arbitrarietà di z, $Ax = y$. ∎

Fissato un operatore monotono massimale A in H, ed indicato con J_λ, $(\lambda > 0)$ il suo risolvente, si verificano facilmente le seguenti proprietà:

Proposizione 2.14 *i)* $\forall \lambda, \mu > 0$ *e* $\forall x \in H$,

$$J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x\right) \ ;$$

ii) $\overline{D(A)}$ *è convesso; inoltre,* $\forall x \in H$,

$$\lim_{\lambda \to 0+} J_\lambda x = P_{\overline{D(A)}}(x)$$

$\Big(P_{\overline{D(A)}}$ *è l'* operatore di proiezione *sul convesso chiuso* $\overline{D(A)}\Big)$.

Dim.: *i*) Basta osservare che risulta $y = J_\lambda x \iff \left[y; \dfrac{x-y}{\lambda}\right] \in A \iff \left[y; \frac{\mu}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x\right] \in I + \mu A$.

ii) Definiamo $C := \overline{\mathrm{conv} D(A)}$. Fissato $x \in H$, poniamo $x_\lambda := J_\lambda x$, cosicché $\frac{x - x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$, quindi, $\forall\, [\xi; \eta] \in A$,

$$\left(\frac{x - x_\lambda}{\lambda} - \eta\ ,\ x_\lambda - \xi\right) \geq 0\ ,$$

da cui $|x_\lambda|^2 \leq (x, x_\lambda - \xi) + (x_\lambda, \xi) - \lambda(\eta, x_\lambda - \xi)$. Si deduce che $\{x_\lambda\}$ è limitata per $\lambda \to 0+$. Scelta una successione $\{\lambda_n\}$ decrescente a zero tale che $x_{\lambda_n} \rightharpoonup x_0$ $(\in C)$, risulta allora che $|x_0|^2 \leq (x, x_0 - \xi) + (x_0, \xi)$ $\forall \xi \in D(A)$, quindi anche $\forall \xi \in C$. Ma allora, $\forall \xi \in C$, si ha $(x - x_0, \xi - x_0) \leq 0$, il che significa $x_0 = P_C(x)$. Perciò, x_0 è indipendente dalla successione $\{\lambda_n\}$ scelta, quindi, per $\lambda \to 0+$, $x_\lambda \rightharpoonup P_C(x)$. Ma $\limsup_{\lambda \to 0+} |x_\lambda|^2 \leq (x, x_0 - \xi) + (x_0, \xi)$ $\forall \xi \in D(A)$, dunque anche $\forall \xi \in C$. In particolare, (per $\xi = x_0$), si ha $\limsup_{\lambda \to 0+} |x_\lambda|^2 \leq |x_0|^2$, e ciò dimostra che la convergenza è nella topologia *forte* di H. Infine, $\forall x \in C$ si ha che $x_\lambda \to x = P_C(x)$, e di conseguenza, poiché $x_\lambda \in D(A)$, ne viene che $C = \overline{D(A)}$. ■

Definizione 2.12 *i) $\forall x \in D(A)$, si pone $A^0 x := P_{Ax}(0)$; quindi, $A^0 x$ è il* **vettore di norma minima** *tra quelli di Ax.*[4]

*ii) $\forall \lambda > 0$, l'***approssimante di** *Yosida A_λ di A è ancora definita da $A_\lambda := \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$.* ■

Naturalmente, non tutte le proprietà del caso lineare (si veda la **Proposizione 2.2**) si estendono al caso degli operatori multivoci; però, ad esempio, valgono i seguenti risultati:

Proposizione 2.15 *i) L'operatore (monotono ed univoco) A_λ verifica, $\forall x \in H$, la relazione $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$; inoltre, A_λ è lipschitziano (quindi monotono massimale), con costante di* Lipschitz $\leq \dfrac{1}{\lambda}$;

ii) $\forall \lambda, \mu > 0$, si ha $(A_\mu)_\lambda = A_{\lambda+\mu}$;

iii) $\forall x \in D(A)$, risulta $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$; inoltre, $\forall x \in H$ l'applicazione $\lambda \mapsto |A_\lambda x|$ è non decrescente per $\lambda \searrow 0$ (cioè, $|A_{\lambda+\mu} x| \leq |A_\lambda x|$ $\forall \mu > 0$);

iv) per $\lambda \searrow 0$, $\{A_\lambda x\}$ è limitata se e solo se $x \in D(A)$, ed in questo caso $A_\lambda x \to A^0 x$.

Dim.: *i*) Per definizione di J_λ, si ha, $\forall x \in H$, $x \in J_\lambda x + \lambda A J_\lambda x$, quindi $A_\lambda x = \dfrac{x - J_\lambda x}{\lambda} \in AJ_\lambda x$. La monotonia di A_λ discende da quella di λA_λ (che è l'identità meno una contrazione; si ricordi l'Esempio *iii*) del Paragrafo **2.2**). Ancora, dalle disuguaglianze

$$|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|\, |x_1 - x_2| \geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) =$$

[4] Per l'Osservazione **2.6**, i), in questo caso Ax è *chiuso*.

$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq \lambda |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|^2$
si deduce intanto che $|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2| \leq \dfrac{1}{\lambda}|x_1 - x_2|$; la massimalità di A_λ discende dalla **Proposizione 2.13**.

ii) Si ha: $[x; y] \in A_\lambda \iff J_\lambda x = x - \lambda y \iff x \in (I + \lambda A)(x - \lambda y) = x - \lambda y + \lambda A(x - \lambda y) \iff y \in A(x - \lambda y) \iff [x - \lambda y; y] \in A$. Di conseguenza, $[x; y] \in (A_\mu)_\lambda \iff [x - \lambda y - \mu y; y] \in A \iff [x - (\lambda + \mu)y; y] \in A \iff [x; y] \in A_{\lambda+\mu}$.

iii) Se $x \in D(A)$, risulta $(A^0 x - A_\lambda x, x - J_\lambda x) \geq 0$ (perché $A^0 x \in Ax$, $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, ed A è monotono), quindi $0 \leq (A^0 x - A_\lambda x, \lambda A_\lambda x)$, da cui $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$. Fissati $x \in H$ e $\mu > 0$, sempre dalla monotonia di A e dal punto *i)* risulta

$$\begin{gathered} 0 \leq (A_\lambda x - A_{\lambda+\mu} x, J_\lambda x - J_{\lambda+\mu} x) = \\ (A_\lambda x - A_{\lambda+\mu} x, -\lambda A_\lambda x + (\lambda + \mu) A_{\lambda+\mu} x) = \\ -\lambda |A_\lambda x - A_{\lambda+\mu} x|^2 + \mu\,(A_\lambda x - A_{\lambda+\mu} x, A_{\lambda+\mu} x) = \\ -\lambda |A_\lambda x - A_{\lambda+\mu} x|^2 - \mu |A_{\lambda+\mu} x|^2 + \mu\,(A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x)\ . \end{gathered}$$

Ne viene, in particolare, che

$$|A_{\lambda+\mu} x|^2 \leq (A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x) \leq |A_\lambda x|\ |A_\lambda x|\ ,$$

da cui il risultato.

iv) La disuguaglianza precedente implica inoltre che

$$|A_{\lambda+\mu} x - A_\lambda x|^2 = |A_{\lambda+\mu} x|^2 - 2(A_{\lambda+\mu} x, A_\lambda x) + |A_\lambda x|^2 \leq |A_\lambda x|^2 - |A_{\lambda+\mu} x|^2\ .$$

Se $\{|A_\lambda x|\}$ è limitata è convergente (perché monotona), dunque di Cauchy; ma allora, per l'ultima disuguaglianza scritta, anche $\{A_\lambda x\}$ è di Cauchy; detto $y \in H$ il suo limite, poiché $J_\lambda x = x - \lambda A_\lambda x$ ne viene che $J_\lambda x \to x$. Dato che A è chiuso, che $J_\lambda x \in D(A)$ e che $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, si conclude che $x \in D(A)$ e $y \in Ax$. poiché $x \in D(A)$, si ha (punto *iii)*) $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$, e, di conseguenza, $|y| \leq |A^0 x|$, il che comporta $y = A^0 x$.
Infine, se $x \in D(A)$, $\{A_\lambda x|\}$ è limitata, perché, come si è visto, $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$; ciò conclude la dimostrazione. ∎

2.5 Condizioni per la suriettività.

Una condizione necessaria e sufficiente per la suriettività di un operatore monotono massimale, sostanzialmente del tipo "maggiorazioni a priori" (per il caso lineare, si veda la **Proposizione 1.18**, *v)*), verrà fornita più avanti; diamo ora alcune definizioni e risultati preliminari:

Definizione 2.13 *L'operatore B su H si dice:*

i) **limitato in un intorno di** $x_0 \in H$ *se esiste un intorno V di x_0 tale che $\bigcup_{x\in V} Bx$ sia limitato;*

ii) **limitato localmente** *se $\forall x_0 \in \overline{D(B)}$ esiste un intorno di x_0 in cui B è limitato;*

iii) **limitato** *se l'immagine tramite B di ogni limitato di H è limitata.* ∎

Proposizione 2.16 *Se A è monotono massimale ed A^{-1} è limitato, allora A è suriettivo.*

Dim.: sia y un elemento arbitrario di H: mostriamo che $y \in R(A)$. Fissato $[x_0; y_0] \in A$, consideriamo, $\forall \varepsilon > 0$, $x_0 + \frac{y}{\varepsilon}$. poiché $I + \frac{A}{\varepsilon}$ è suriettiva, $\exists x_\varepsilon \in D(A): \quad x_0 + \frac{y}{\varepsilon} \in x_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Ax_\varepsilon$, cioè $z_\varepsilon := y + \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon) \in Ax_\varepsilon$. Per la monotonia di A, si ha intanto $(y_0 - z_\varepsilon, x_0 - x_\varepsilon) \geq 0$, quindi $(y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y) \geq 0$, da cui $0 \leq (y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y_0 + y_0 - y) = -|y_0 - z_\varepsilon|^2 + (y_0 - z_\varepsilon, y_0 - y) \leq |y_0 - z_\varepsilon|\{|y_0 - y| - |y_0 - z_\varepsilon|\}$, e di conseguenza $|z_\varepsilon| \leq |y_0 - z_\varepsilon| + |y_0| \leq |y_0 - y| + |y_0| \leq c$. Dato che $x_\varepsilon \in A^{-1} z_\varepsilon$, ne viene che $\{x_\varepsilon\}$ è limitata, quindi $z_\varepsilon \to y$; per la compattezza debole di H e la chiusura di A in $H_w \times H_s$, si conclude facilmente che $y \in R(A)$. ∎

Corollario 2.3 *Sia A monotono massimale. Se è verificata una delle seguenti proprietà, allora A^{-1} è limitato, quindi A è suriettivo:*

i) $D(A)$ è limitato;

ii) $\displaystyle\lim_{\substack{x \in D(A) \\ |x| \to +\infty}} |A^0 x| = +\infty$;

iii) A è coercivo, *nel senso che:*

$$\exists x_0 \in H \ : \ \lim_{\substack{x \in D(A) \\ |x| \to +\infty}} \frac{(A^0 x, x - x_0)}{|x|} = +\infty \, .$$

Dim.: *i)* Ovvio, perché $\forall H_0 \subset H$ si ha $A^{-1}(H_0) \subset D(A)$, che è limitato.

ii) Se A^{-1} non fosse limitato, esisterebbero $c > 0$, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tali che $|x_n| \leq c$, $y_n \in A^{-1} x_n$ (quindi $y_n \in D(A)$), e $|y_n| \to +\infty$. Ma allora $x_n \in Ay_n$, quindi $c \geq |x_n| \geq |A^0 y_n|$, e $|A^0 y_n|$ non potrebbe tendere a $+\infty$.

iii) Mostriamo che *iii)*$\Longrightarrow$*ii)*: in effetti, se *ii)* non è verificata devono esistere $\{x_n\} \subset D(A)$ e $c > 0$ tali che $|x_n| > n$ e $|A^0 x_n| \leq c$. Ma allora, $\forall x_0 \in H$,

$$\frac{(A^0 x_n, x_n - x_0)}{|x_n|} \leq c \frac{|x_n - x_0|}{|x_n|} \leq c(1 + |x_0|) \, ,$$

e quindi non può valere la *iii)*. ∎

Alcuni altri risultati preliminari:

Lemma 2.2 *Sia $\{H_n\}$ una successione crescente di sottoinsiemi di H, sia H_0 la loro unione, e si ponga $C_0 := \operatorname{conv} H_0$, $C_n := \operatorname{conv} H_n$. Se $\operatorname{int} C_0 \neq \emptyset$, allora $\operatorname{int} C_0 = \bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}$.*

Dim.: si ricordi (**Proposizione 1.10**) che se C è un convesso con interno non vuoto, allora $\overline{C} = \overline{\operatorname{int} C}$. Si osservi che, essendo $\{H_n\}$ crescente, si ha $C_0 = \bigcup_n C_n$, quindi $\operatorname{int} C_0 \subset C_0 \subset \bigcup_n \overline{C_n} \subset \overline{C_0} = \overline{\operatorname{int} C_0}$. Applicando il Lemma di Baire ([Br], **Lemma II.1**) all'aperto non vuoto $\operatorname{int} C_0$ ed alla successione (di *chiusi* nella topologia relativa di $\operatorname{int} C_0$) $\{\overline{C_n} \cap (\operatorname{int} C_0)\}$, si vede che $\exists \bar{n}$ tale che $\operatorname{int} \overline{C_{\bar{n}}} \neq \emptyset$. Ma allora si ha $\operatorname{int} \overline{C_n} \neq \emptyset \quad \forall n \geq \bar{n}$, quindi, per tali n, $\overline{C_n} = \overline{\operatorname{int} \overline{C_n}}$ (poiché anche $\overline{C_n}$ è convesso, con interno non vuoto).

Dalle inclusioni scritte in precedenza si ha intanto: $\overline{\operatorname{int} C_0} \subset \overline{C_0} \subset \overline{\bigcup_n \overline{C_n}} \subset \overline{\operatorname{int} C_0}$, per cui

$$\overline{\operatorname{int} C_0} = \overline{C_0} = \overline{\bigcup_n \overline{C_n}} = \overline{\bigcup_n \overline{\operatorname{int} \overline{C_n}}} = \overline{\bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}}\ ;$$

l'ultima uguaglianza segue dalle inclusioni $\bigcup_n \overline{\operatorname{int} \overline{C_n}} \subset \overline{\bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}}$, da cui $\overline{\bigcup_n \overline{\operatorname{int} \overline{C_n}}} \subset \overline{\overline{\bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}}} \subset \overline{\bigcup_n \overline{\operatorname{int} \overline{C_n}}}$. D'altronde,

se A è aperto e convesso, allora $A = \operatorname{int} \overline{A}$.

Per dimostrarlo, basta verificare che $(x_0 \in \operatorname{int} \overline{A}) \Longrightarrow (x_0 \in A)$. Infatti, se $x_0 \in \operatorname{int} \overline{A}$ allora esiste $\varrho > 0$ tale che la sfera V di centro x_0 e raggio ϱ è contenuta in $\overline{A}$, e certamente $\exists y \in V \cap A$. Ma allora anche $2x_0 - y \in V$, quindi il segmento $\{x \mid (1-t)(2x_0 - y) + ty\ ,\ 0 < t \leq 1\}$ è contenuto in A, da cui, per $t = \frac{1}{2}$, $x_0 \in A$. Quindi, dalla relazione $\overline{\operatorname{int} C_0} = \overline{\bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}}$ si deduce $\operatorname{int} C_0 = \operatorname{int} \overline{(\operatorname{int} C_0)} = \operatorname{int} \overline{\left(\bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}\right)} = \bigcup_n \operatorname{int} \overline{C_n}$. ∎

Proposizione 2.17 *Sia B un operatore monotono massimale tale che* $\operatorname{int}\ (\operatorname{conv} D(B)) \neq \emptyset$. *Allora:* $\operatorname{int} D(B)$ *è convesso;* $\operatorname{int} D(B) = \operatorname{int} \overline{D(B)} \neq \emptyset$, *e B è limitato nell'intorno di ogni punto interno a $D(B)$.*

Dim.: poniamo $B_n := \{\,[x; y] \in B \mid |x| \leq n \text{ e } |y| \leq n\}$. Evidentemente, $D(B) = \bigcup_n D(B_n)$, quindi, per il lemma precedente, $\operatorname{int}\ (\operatorname{conv} D(B))= \bigcup_n \operatorname{int}\ \overline{(\operatorname{conv} D(B_n))}$. Facciamo vedere che B è limitato nell'intorno di ogni punto $x_0 \in \operatorname{int}\ \overline{(\operatorname{conv} D(B_n))}$. Sia $\varrho > 0$ tale che $\{x \,|\, |x - x_0| < \varrho\} \subset \overline{\operatorname{conv} D(B_n)}$; allora B è limitato in $\{x \,|\, |x - x_0| < \frac{\varrho}{2}\}$. In effetti, fissato $[x; y] \in B$ con $|x - x_0| < \frac{\varrho}{2}$, si ha, $\forall [\xi; \eta] \in B_n$, $(\eta - y, \xi - x) \geq 0$, e dunque $(y, \xi - x) \leq (\eta, \xi - x) \leq |\eta||\xi - x| \leq 2n^2$. Quindi, risulta anche $(y, \xi - x) \leq 2n^2\ \ \forall \xi \in \overline{\operatorname{conv} D(B_n)}$, in particolare per ogni ξ tale che $|\xi - x| < \frac{\varrho}{2}$. Se $y \neq 0$, scegliendo $\xi = x + \lambda \frac{y}{|y|}$ con $0 < \lambda < \frac{\varrho}{2}$, si ha $|y| \leq \frac{2n^2}{\lambda}$, da cui, per $\lambda \to \frac{\varrho}{2}-$, $|y| \leq \frac{4n^2}{\varrho}$. D'altronde, $\operatorname{int}(\operatorname{conv} D(B)) \subset D(B)$: infatti, poiché $\overline{D(B)}$ è convesso (**Proposizione 2.14**, *ii)*), ne viene $\operatorname{int}\ (\operatorname{conv} D(B)) \subset \overline{D(B)}$. Fissato $x_0 \in \operatorname{int}\ (\operatorname{conv} D(B))$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(B)$ tale che $x_n \to x_0$. poiché B^0 è limitato nell'intorno di x_0, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $B^0 x_{n_k}$ converge debolmente ad y, e allora (per la chiusura di B in $H_s \times H_w$), $x_0 \in D(B)$. Da ciò risulta che $\operatorname{int} D(B) = \operatorname{int}\ (\operatorname{conv} D(B)\,)$ è convesso, e B è limitato localmente su $\operatorname{int} D(B)$. Si ha infine che, poiché $\operatorname{int} D(B) \subset D(B) \subset \operatorname{conv} D(B)$, da cui $\overline{\operatorname{int} D(B)} \subset \overline{D(B)} \subset \overline{\operatorname{conv} D(B)} = \overline{\operatorname{int}(\operatorname{conv} D(B))} = \overline{\operatorname{int} D(B)}$ $\Big($quindi $\overline{D(B)} = \overline{\operatorname{int} D(B)}\Big)$, risulta $\operatorname{int} \overline{D(B)} = \operatorname{int}\ \overline{(\operatorname{int} D(B))} = \operatorname{int} D(B)$ (perché $\operatorname{int} D(B)$ è aperto e convesso), dunque $\operatorname{int} D(B) = \operatorname{int}\ \overline{(\operatorname{int} D(B))}$. ∎

<u>Osservazione</u> **2.7** La proposizione precedente implica che se B è monotono massimale, allora è limitato su ogni compatto $K \subset \operatorname{int} D(B)$. In particolare, se H ha dimensione *finita* e B è definito *ovunque*, allora *se B è monotono*

massimale, è limitato. In dimensione infinita, ciò non è vero. Ad esempio, sia $H := \ell^2$, e si ponga $(Bx)_n := |x_n|^{n-1}x_n$. È evidente che:

- B è (univoco e) monotono: immediato, perché la funzione (da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) $t \mapsto |t|^{n-1}t$ è crescente;
- B è definito dappertutto: se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, quindi $x_n^{2n} \le x_n^2$ definitivamente, da cui $|Bx|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{2n} < +\infty$;
- B è monotono massimale: se $[x; y] \in \ell^2 \times \ell^2$ è tale che $\forall \xi \in \ell^2$ si ha $(y - B\xi, x - \xi) \ge 0$, fissati $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, e posto $\xi = x - \lambda e^{(k)}$, risulta $0 \le \lambda(y - B\xi, e^{(k)}) = \lambda \left\{y_k - |x_k - \lambda|^{k-1}(x_k - \lambda)\right\}$. Se $\lambda > 0$, ne viene $y_k \ge |x_k - \lambda|^{k-1}(x_k - \lambda)$, da cui, per $\lambda \to 0+$, $y_k \ge |x_k|^{k-1}x_k$; se $\lambda < 0$, risulta $y_k \le |x_k - \lambda|^{k-1}(x_k - \lambda)$, e, al limite per $\lambda \to 0-$, $y_k \le |x_k|^{k-1}x_k$, da cui, in definitiva, $y = Bx$;
- B è limitato su $\overline{\Sigma(0, 1)}$: se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \le 1$, si ha $x_n^2 \le 1 \quad \forall n$, quindi $x_n^{2n} \le x_n^2$, da cui $|Bx| \le |x|$;
- se $\varrho > 1$, B non è limitato su $\overline{\Sigma(0, \varrho)}$: basta osservare che $\varrho e^{(n)} \in \overline{\Sigma(0, \varrho)}$, mentre $|B(\varrho e^{(n)})| = \varrho^n \to +\infty$. ■

Possiamo ora fornire la caratterizzazione della suriettività di un operatore monotono massimale:

Proposizione 2.18 *Sia A un operatore monotono massimale. Allora*

$$(A \text{ è suriettivo}) \Longleftrightarrow (A^{-1} \text{ è limitato localmente}).$$

Dim.: *i*) L'implicazione (A suriettivo) $\Longrightarrow$ (A^{-1} limitato localmente) è fornita dalla **Proposizione 2.17**, con $B := A^{-1}$.

ii) Facciamo ora vedere che (A^{-1} *limitato localmente*) $\Longrightarrow$ (A *suriettivo*): per questo, mostriamo che $R(A)$ è *aperto* e *chiuso.*

$R(A)$ è *chiuso.* In effetti, sia $y_0 \in \overline{R(A)} = \overline{D(A^{-1})}$; allora $\exists\{y_n\}$ in $D(A^{-1})$ tale che $y_n \to y_0$. Posto $x_n := (A^{-1})^0 y_n$, dall'ipotesi di locale limitatezza di A^{-1} (quindi di $(A^{-1})^0$) si ha che $\{x_n\}$ è limitata, dunque ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ debolmente convergente a x_0. Ma allora, poiché $y_{n_k} \to y_0$ e $(A^{-1})^0 y_{n_k} = x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, le proprietà di chiusura di $(A^{-1})^0$ implicano che $y_0 \in D(A^{-1}) = R(A)$.

$R(A)$ è *aperto.* Infatti, fissato $[x_0; y_0] \in A$, esiste $\varrho > 0$ tale che A^{-1} è limitato nella sfera $V := \Sigma(y_0, \varrho)$; mostriamo che $V \subset R(A)$. Fissati $y \in V$ ed $\varepsilon > 0$, consideriamo $x_0 + \frac{y}{\varepsilon}$; procedendo come nella dimostrazione della **Proposizione 2.16** (e con le stesse notazioni), si controlla che $\{x_\varepsilon\}$ è limitata, quindi $z_\varepsilon \to y$, dunque $y \in \overline{R(A)}$, che, come abbiamo visto, coincide con $R(A)$. ■

2.6 Operatori ciclicamente monotoni.

Cominciamo con un'osservazione: se φ è una funzione convessa propria su H, fissati ad arbitrio una "*sequenza ciclica*" $\{x_0, x_1, ..., x_n = x_0\} \subset D(\partial\varphi)$

ed n elementi $y_1, y_2, ..., y_n$ tali che $y_i \in \partial\varphi(x_i)$ $(i = 1, ..., n)$, risulta per definizione $\varphi(x_{i-1}) \geq \varphi(x_i) + (y_i, x_{i-1} - x_i)$ $(i = 1, ..., n)$, quindi, sommando le n disuguaglianze precedenti, $\sum_{i=1}^n (y_i, x_{i-1} - x_i) \leq 0$.

Poniamo allora la seguente

Definizione 2.14 *A è* **monotono ciclicamente** *se per ogni sequenza ciclica $\{x_0, x_1, ..., x_n = x_0\} \subset D(A)$ e per ogni $y_i \in Ax_i$ $(i = 1, ..., n)$ si ha* $\sum_{i=1}^n (y_i, x_i - x_{i-1}) \geq 0$. ■

La definizione precedente è *più restrittiva* della monotonia (che, d'altra parte, ne è il caso particolare con $n = 2$): infatti, equivale a richiedere che risulti (posto $y_0 := y_n$),

$$\sum_{i=1}^n (y_i, x_i - x_{i-1}) \geq 0 \geq \sum_{i=1}^n (y_{i-1}, x_i - x_{i-1})\,;$$

in effetti, basta osservare che, posto $x'_i := x_{n-i}$ ed $y'_i := y_{n-i}$, anche la sequenza $\{x'_0, x'_1, ..., x'_n\}$ è ciclica, ed $y'_i \in Ax'_i$, cosicché risulta

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (y'_i, x'_i - x'_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (y_{n-i}, x_{n-i} - x_{n-i+1})\,,$$

da cui, ponendo $j := n - i + 1$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (y_{j-1}, x_{j-1} - x_j) = -\sum_{i=1}^n (y_{i-1}, x_i - x_{i-1})\,.$$

Dalla semplice *monotonia* di A si ricava invece *soltanto* la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^n (y_i, x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n (y_{i-1}, x_i - x_{i-1})\,,$$

senza ulteriori precisazioni.

L'esempio iniziale è di particolare rilevanza, come mostra il seguente risultato:

Proposizione 2.19 *Le proprietà seguenti si equivalgono:*

i) A è monotono ciclicamente;

ii) esiste una funzione $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, propria e s.c.i. tale che $A \subset \partial\varphi$.

Dim.: l'implicazione *ii)* $\Rightarrow$ *i)* è ovvia.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Sia $[x_0; y_0] \in A$ (se $D(A) = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare). Per ogni $x \in H$, poniamo $\varphi(x) :=$

$$\sup \left\{ (y_n, x - x_n) + \sum_{i=1}^n (y_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \;\middle|\; [x_i; y_i] \in A \;\; (i = 1, \ldots, n) \right\}.$$

Dato che φ è l'estremo superiore di una famiglia di funzioni affini continue, è chiaro che è convessa e s.c.i.. Posto $x_{n+1} := x_0$, si ha poi che $\varphi(x_0) = \sup \sum_{i=1}^{n+1} (y_{i-1}, x_i - x_{i-1})\} \leq 0$, perché $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = x_0\}$ è una sequenza ciclica in $D(A)$ (anzi, $\varphi(x_0) = 0$: si scelgano $n = 1$, $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$), dunque φ è propria.
Sia ora $[x; y] \in A$, e mostriamo che $[x; y] \in \partial\varphi$ (il che conclude la dimostrazione). Fissati ad arbitrio $[x_1; y_1], ..., [x_n; y_n] \in A$, $\xi \in H$, e considerati i punti $[x_1; y_1], ..., [x_n; y_n], [x_{n+1}; y_{n+1}] := [x; y]$, si ha, per definizione, $\varphi(\xi) \geq (y, \xi - x) + (y_n, x - x_n) + ... + (y_0, x_1 - x_0)$, cioè $\varphi(\xi) - (y, \xi - x) \geq (y_n, x - x_n) + ... + (y_0, x_1 - x_0)$, da cui, per l'arbitrarietà dei punti $[x_i; y_i]$, $\varphi(\xi) - (y, \xi - x) \geq \varphi(x)$, il che significa $[x; y] \in \partial\varphi$. ■

Un ulteriore importante risultato è il seguente:

Proposizione 2.20 *Sia φ una funzione convessa, propria, s.c.i., e $A := \partial\varphi$. Anche l'approssimante di* Yosida *A_λ di A è monotona ciclicamente.*

Dim.: Infatti, se $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ è ciclica, risulta $\sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, x_i - x_{i-1}) =$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, x_i - J_\lambda x_i + J_\lambda x_i - J_\lambda x_{i-1} + J_\lambda x_{i-1} - x_{i-1}) =$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, A_\lambda x_i - A_\lambda x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, J_\lambda x_i - J_\lambda x_{i-1}) \geq$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, A_\lambda x_i - A_\lambda x_{i-1})$$

(perché $A_\lambda x_i \in \partial\varphi(J_\lambda x_i)$, e $\partial\varphi$ è monotono ciclicamente). Posto $z_i = A_\lambda x_i$, si ha che $\{z_0, z_1, ..., z_n\}$ è ciclica, e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, A_\lambda x_i - A_\lambda x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (z_i, z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} (z_i, z_{i-1}) =$$

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |z_{i-1}|^2 - \sum_{i=1}^{n} (z_i, z_{i-1}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |z_i - z_{i-1}|^2 \geq 0 \, ,$$

dunque, in definitiva, $\sum_{i=1}^{n} (A_\lambda x_i, x_i - x_{i-1}) \geq 0$. ■

È possibile precisare la funzione φ_λ tale che $A_\lambda = \partial\varphi_\lambda$; vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 2.21 *Siano φ una funzione convessa, propria, s.c.i., ed $A := \partial\varphi$; allora*

i) $D(A) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)} = \overline{D(A)}$.

Inoltre, posto, $\forall x \in H$ e $\forall \lambda > 0$, $\varphi_\lambda(x) := \min_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |y - x|^2 + \varphi(y) \right\}$, si ha che:

ii) $\forall x \in H,\ \varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}|A_\lambda x|^2 + \varphi(J_\lambda x)$;

iii) φ_λ *è convessa, differenziabile secondo* FRÉCHET, *con differenziale* A_λ. *Inoltre,* $\forall x \in H$ *si ha che* $\varphi_\lambda(x) \nearrow \varphi(x)$ *quando* $\lambda \searrow 0$.

Dim.: *ii)* Per il **Lemma 2.1**, il minimo della funzione $y \mapsto \frac{1}{2\lambda}|y-x|^2+\varphi(y)$ è assunto nel punto y_0 tale che $\frac{x-y_0}{\lambda} \in \partial\varphi(y_0) = Ay_0$, ossia $x \in y_0 + \lambda A y_0$, da cui $y_0 = J_\lambda x$. Pertanto, $\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}|x - J_\lambda x|^2 + \varphi(J_\lambda x)$, e ne segue che $\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}|A_\lambda x|^2 + \varphi(J_\lambda x)$.

iii) Fissati $x, y \in H$, risulta $\varphi(J_\lambda y) - \varphi(J_\lambda x) \geq (A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x)$ (perché $A_\lambda x \in AJ_\lambda x = \partial\varphi(J_\lambda x)$), da cui $\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\{|A_\lambda y|^2 - |A_\lambda x|^2\} + \varphi(J_\lambda y) - \varphi(J_\lambda x) \geq \frac{\lambda}{2}\{|A_\lambda y|^2 - |A_\lambda x|^2\} + (A_\lambda x, y - \lambda A_\lambda y - x + \lambda A_\lambda x) = \frac{\lambda}{2}\{|A_\lambda y|^2 - |A_\lambda x|^2 + 2(A_\lambda x, A_\lambda x - A_\lambda y)\} + (A_\lambda x, y - x))$. Di conseguenza, $\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) - (A_\lambda x, y - x) \geq \frac{\lambda}{2}|A_\lambda y - A_\lambda x|^2 \geq 0$. Scambiando tra loro x ed y, si ottiene facilmente che risulta $\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) - (A_\lambda x, y - x) \leq -\frac{\lambda}{2}|A_\lambda x - A_\lambda y|^2 + (A_\lambda y - A_\lambda x, y - x) \leq (A_\lambda y - A_\lambda x, y - x) \leq \frac{1}{\lambda}|y - x|^2$. In conclusione, si ha $|\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) - (A_\lambda x, y - x)| \leq \frac{1}{\lambda}|y - x|^2$, quindi φ_λ è differenziabile secondo FRÉCHET, con differenziale A_λ.Per verificare la convessità di φ_λ, fissati $x, y \in H$ si ponga $f(t) := \varphi_\lambda(tx + (1-t)y)$ $(t \in \mathbb{R})$; poiché $f'(t) = (A_\lambda(tx + (1-t)y), x - y)$, si controlla facilmente che f' è crescente, quindi f è convessa. In particolare, si ha allora, $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) \leq tf(1) + (1-t)f(0)$, cioè $\varphi_\lambda(tx + (1-t)y) \leq t\varphi_\lambda(x) + (1-t)\varphi_\lambda(y)$. Dalla definizione stessa, risulta poi che quando λ decresce φ_λ cresce, e che $\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x)$. Per la *ii)*, si ha $\varphi_\lambda(x) \geq \varphi(J_\lambda x)$; se $x \in \overline{D(A)}$, ricordando che allora $J_\lambda x \to x$ per $\lambda \to 0+$ ed utilizzando la semicontinuità inferiore di φ, si ottiene

$$\varphi(x) \leq \liminf_{\lambda\to 0+} \varphi(J_\lambda x) \leq \liminf_{\lambda\to 0+} \varphi_\lambda(x) \leq \limsup_{\lambda\to 0+} \varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x)\ .$$

Se poi $x \notin \overline{D(A)}$, si ha $\lambda|A_\lambda x|^2 = |A_\lambda x||x - J_\lambda x| \ \to +\infty$ $\Big($evidente, perché $|A_\lambda x| \to +\infty$ e $|x - J_\lambda x| \geq d\left(x, \overline{D(A)}\right)\Big)$, dunque $\varphi_\lambda(x) \to +\infty = \varphi(x)$. In ogni caso, si ha quindi $\varphi_\lambda(x) \nearrow \varphi(x)$; ne viene altresì che $D(\varphi) \subset \overline{D(A)}$, da cui segue facilmente la *i)*. ■

<u>OSSERVAZIONE</u> **2.8** Dal risultato precedente, si deduce che se φ_1, φ_2 sono funzioni convesse, proprie, s.c.i. tali che $\partial\varphi_1 = \partial\varphi_2$, allora $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in H, \varphi_1(x) = \varphi_2(x) + c$. Infatti, si ha che $(\partial\varphi_1)_\lambda = (\partial\varphi_2)_\lambda$, il che (per la differenziabilità di $(\varphi_1)_\lambda$ e $(\varphi_2)_\lambda$) implica l'esistenza di una costante c_λ tale che $(\varphi_1)_\lambda(x) = (\varphi_2)_\lambda(x) + c_\lambda\ \forall x \in H$. Ma allora $c_\lambda = (\varphi_1)_\lambda(x) - (\varphi_2)_\lambda(x)$ tende a $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = c \quad \forall x \in D(\partial\varphi_1) = D(\partial\varphi_2)$, e di conseguenza, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + c$. ■

In taluni casi, nel calcolo del risolvente e dell'approssimante di YOSIDA, possono essere utili i risultati seguenti, di facile dimostrazione.

Lemma 2.3 *Sia $\widetilde{\varphi} : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, propria, s.c.i., $\widetilde{A}$ il suo sottodifferenziale (le altre notazioni sono autoesplicative).*

α) Fissato $c \in \mathbb{R}$, si ponga $A^c := c\widetilde{A}$; si ha

$$A^c = \partial\varphi^c, \quad \textit{dove} \quad \varphi^c(x) := c\widetilde{\varphi}(x); \qquad J^c_\lambda = \widetilde{J}_{c\lambda};$$

$$A^c_\lambda = c\widetilde{A}_{c\lambda} = (\varphi^c_\lambda)\,', \quad \textit{dove} \quad \varphi^c_\lambda(x) := c\widetilde{\varphi}_{c\lambda}(x)\,.$$

β) Fissato $x_0 \in H$, sia $A^{(x_0)}x := \widetilde{A}(x - x_0)$. Si ha allora che

$$A^{(x_0)} = \partial\varphi^{(x_0)}, \quad \textit{dove} \quad \varphi^{(x_0)}(x) := \widetilde{\varphi}(x - x_0)\,;$$

$$J^{(x_0)}_\lambda x = x_0 + \widetilde{J}_\lambda(x - x_0);$$

$$A^{(x_0)}_\lambda x = \widetilde{A}_\lambda(x - x_0) = (\varphi^{(x_0)}_\lambda)\,', \quad \textit{dove} \quad \varphi^{(x_0)}_\lambda(x) := \widetilde{\varphi}_\lambda(x - x_0)\,.$$

γ) Fissato $y_0 \in H$, sia $A^{[y_0]}x := y_0 + \widetilde{A}x$; allora,

$$A^{[y_0]} = \partial\varphi^{[y_0]}, \quad \textit{dove} \quad \varphi^{[y_0]}(x) := (y_0, x) + \widetilde{\varphi}(x)\,;$$

$$J^{[y_0]}_\lambda x = \widetilde{J}_\lambda(x - \lambda y_0);$$

$$A^{[y_0]}_\lambda x = y_0 + \widetilde{A}_\lambda(x - \lambda y_0) = (\varphi^{[y_0]}_\lambda(x))\,', \quad \textit{dove}$$

$$\varphi^{[y_0]}_\lambda(x) := (y_0, x) - \frac{\lambda}{2}|y_0|^2 + \widetilde{\varphi}_\lambda(x - \lambda y_0)\,.$$

δ) In conclusione, dai risultati precedenti si ricava che, fissati $x_0, y_0 \in H$ e $c \in \mathbb{R}$, posto per semplicità $A^\flat x := \widetilde{A}^{c,(x_0),[y_0]}x = y_0 + c\widetilde{A}(x - x_0)$ (ed indicando in modo analogo le quantità riferite ad $A^\flat$), si ha

$$A^\flat = \partial\varphi^\flat, \quad \textit{dove} \quad \varphi^\flat(x) := (y_0, x) + c\widetilde{\varphi}(x - x_0)\,;$$

$$J^\flat_\lambda x = x_0 + \widetilde{J}_{c\lambda}(x - x_0 - \lambda y_0);$$

$$A^\flat_\lambda x = y_0 + c\widetilde{A}_{c\lambda}(x - x_0 - \lambda y_0) = \big(\varphi^\flat_\lambda(x)\big)', \quad \textit{dove}$$

$$\varphi^\flat_\lambda(x) := (y_0, x) - \frac{\lambda}{2}|y_0|^2 + c\widetilde{\varphi}_{c\lambda}(x - x_0 - \lambda y_0)\,. \ \blacksquare$$

<u>ALCUNI ESEMPI CON</u> $H = \mathbb{R}$.

Premettiamo la seguente osservazione. Se A è monotono massimale in $\mathbb{R}$, per la **Proposizione 2.14**, *ii)*, si ha che $\overline{D(A)}$ è convesso, quindi $\exists a, b$ con $-\infty \le a \le b \le +\infty$ tali che $\overline{D(A)} = [a, b] \cap \mathbb{R}$. Ne viene facilmente che $\operatorname{int}(\operatorname{conv} D(A)) = \,]\,a, b\,[$ (se $D(A)$ è ridotto ad un punto, il risultato è ovvio; altrimenti, basta applicare la **Proposizione 2.17**). Si ha poi che:

- l'applicazione $x \mapsto A^0(x)$ $(x \in D(A))$ è non decrescente; $\forall x \in \,]\,a, b\,[$, si ha $Ax = [A^0(x-), A^0(x+)]$; se $a \in D(A)$, allora $Aa = \,]-\infty, A^0(a+)]$, e se $b \in D(A)$, allora $Ab = [A^o(b-), +\infty\,[$;

• esiste una funzione φ (determinata a meno di una costante additiva arbitraria) convessa, propria, s.c.i., tale che $A = \partial\varphi$; precisamente, fissato $x_0 \in D(A)$, risulta

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} A^0(s)\,ds & \text{se } x \in [a,b] \\ +\infty & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases},$$

dove $\varphi(x_0)$ è un numero fissato ad arbitrio.

Dai risultati precedenti risulta che

ogni operatore monotono massimale in $\mathbb{R}$ è monotono ciclicamente.

Segue qualche esempio, in cui, assegnato un operatore massimale monotono A, determineremo: una funzione convessa, propria, s.c.i. φ tale che $A = \partial\varphi$; il risolvente J_λ di A; l'approssimante di Yosida A_λ di A; la funzione convessa e differenziabile φ_λ con differenziale A_λ definita nella **Proposizione 2.21**, cosicché $\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\,|A_\lambda(x)|^2 + \varphi(J_\lambda x)$. Ciò consentirà di mettere in evidenza le relazioni tra A ed A_λ, e tra φ e φ_λ.

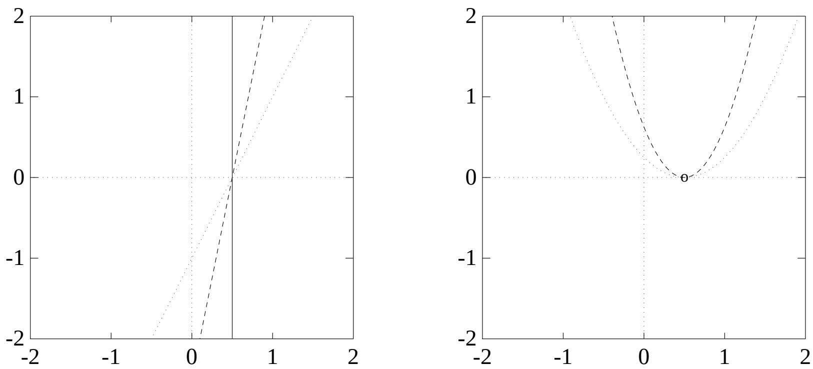
1. Supponiamo che A sia una retta; è opportuno distinguere il caso di una retta verticale dagli altri casi.

i) Retta verticale. Cominciamo dal caso particolare $\widetilde{A} := \{0\} \times \mathbb{R}$. È immediato verificare che $\widetilde{A} = \partial\widetilde{\varphi}$, dove $\widetilde{\varphi} := I_{\{0\}}$; $\widetilde{J}_\lambda x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $\widetilde{A}_\lambda x = \frac{x}{\lambda} = \widetilde{\varphi}'_\lambda(x)$, dove $\widetilde{\varphi}_\lambda(x) := \frac{x^2}{2\lambda}$. Il caso generale, in cui $A := \{x_0\} \times \mathbb{R}$, si tratta allo stesso modo direttamente (oppure, si può ricorrere al **Lemma 2.3**, osservando che $A = \widetilde{A}^{(x_0)}$); si ottiene:

$$A = \partial\varphi(x), \quad \text{dove} \quad \varphi := I_{\{x_0\}};$$

$$A_\lambda x = \frac{x - x_0}{\lambda} = \varphi'_\lambda(x), \quad \text{dove} \quad \varphi_\lambda(x) := \frac{(x - x_0)^2}{2\lambda}.$$

Un esempio ($x_0 = .5$; le linee a puntini corrispondono a $\lambda = .5$, quelle a trattini a $\lambda = .2$); nella prima figura i grafici di A (linea continua) ed A_λ, nella seconda di φ e φ_λ:



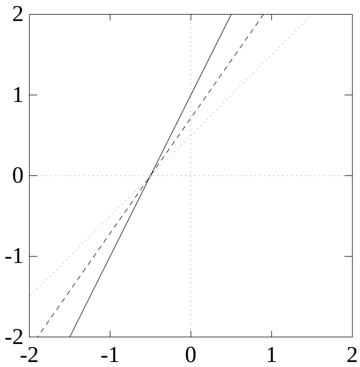
$\varphi_{1.5}(x)$ $\varphi^*_{1.5}(y)$

ii) Retta obliqua. Nel caso particolare $\widetilde{A} := I$, si ha subito che $\widetilde{A} = \partial\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\,'$, dove $\widetilde{\varphi}(x) := \frac{x^2}{2}$; $\widetilde{J}_\lambda = \frac{I}{1+\lambda}$; $\widetilde{A}_\lambda = \widetilde{J}_\lambda = \widetilde{\varphi}\,'_\lambda$, dove $\widetilde{\varphi}_\lambda(x) := \frac{x^2}{2(1+\lambda)}$. Nel caso generale, in cui $Ax := ax+b$, con $a \geq 0$, si può utilizzare il **Lemma 2.3**, osservando che $A = \widetilde{A}^{a,(0),[b]}$, oppure procedere direttamente; si verifica che

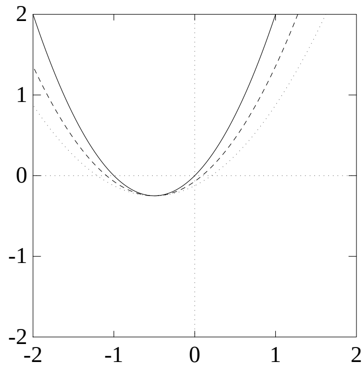
$$A = \partial\varphi = \varphi\,', \quad \text{dove} \quad \varphi(x) := \frac{a}{2}x^2 + bx;$$

$$A_\lambda x = \frac{ax+b}{1+a\lambda} = \varphi\,'_\lambda(x), \quad \text{dove} \quad \varphi_\lambda(x) := \frac{ax^2+2bx}{2(1+a\lambda)}.$$

Un esempio ($a = 2,\ b = 1$; linee a puntini per $\lambda = .5$, a tratti per $\lambda = .2$; nella prima figura i grafici di A ed A_λ, nella seconda di φ e φ_λ):



$\varphi_{1.5}(x)$



$\varphi^*_{1.5}(y)$

2. Sia $\widetilde{A}$ l'**operatore di** Heaviside, così definito:

$$\widetilde{A}x := \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0, \\ [0,1] & \text{se } x = 0, \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

È immediato verificare che $\widetilde{A} = \partial\widetilde{\varphi}$, dove $\widetilde{\varphi}(x) := x^+$, e che

$$\widetilde{J}_\lambda x = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0, \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq \lambda, \\ x-\lambda & \text{se } x > \lambda, \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \widetilde{A}_\lambda x = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{x}{\lambda} & \text{se } 0 < x \leq \lambda, \\ 1 & \text{se } x > \lambda. \end{cases}$$

Di conseguenza, $\widetilde{A}_\lambda = \widetilde{\varphi}\,'_\lambda$, dove

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2\lambda} & \text{se } 0 < x \leq \lambda, \\ x - \frac{\lambda}{2} & \text{se } x > \lambda. \end{cases}$$

Più in generale, fissati $\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, si ponga

$$Ax := \begin{cases} \{\alpha\} & \text{se } x \leq x_0, \\ [\alpha,\beta] & \text{se } x = x_0, \\ \{\beta\} & \text{se } x > x_0. \end{cases}$$

Direttamente, o dal **Lemma 2.3**, osservando che $A = \widetilde{A}^{\beta-\alpha,(x_0),[\alpha]}$, si ottiene che $A = \partial\varphi$, dove

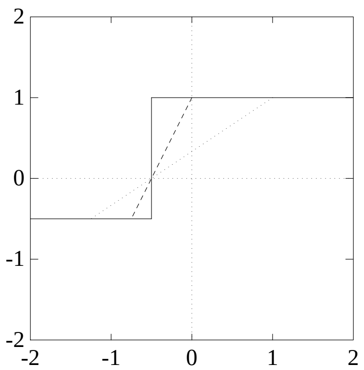
$$\varphi(x) := \begin{cases} \alpha(x - x_0) & \text{se } x \le x_0, \\ \beta(x - x_0) & \text{se } x > x_0; \end{cases}$$

inoltre,

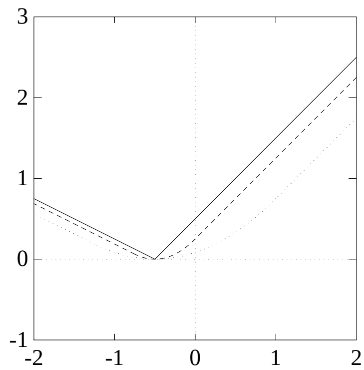
$$A_\lambda x = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \le x_0 + \alpha\lambda, \\ \dfrac{x - x_0}{\lambda} & \text{se } x_0 + \alpha\lambda < x \le x_0 + \beta\lambda, \\ \beta & \text{se } x > x_0 + \beta\lambda; \end{cases}$$

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha\left(x - \dfrac{\alpha\lambda}{2}\right) & \text{se } x \le x_0 + \alpha\lambda, \\ \alpha x_0 + \dfrac{(x - x_0)^2}{2\lambda} & \text{se } x_0 + \alpha\lambda < x \le x_0 + \beta\lambda, \\ \beta\left(x - \dfrac{\beta\lambda}{2}\right) - (\beta - \alpha)x_0 & \text{se } x > x_0 + \beta\lambda. \end{cases}$$

Un esempio ($\alpha = -.5$, $\beta = 1$, $x_0 = 1$; a puntini $\lambda = 1.5$, a tratti $\lambda = .5$; nella prima figura A ed A_λ, nella seconda φ e φ_λ);



$\varphi_{1.5}(x)$



$\varphi^*_{1.5}(y)$

3. Fissato $r > 0$, si ponga

$${}_rA\ x := \begin{cases} \emptyset & \text{se } |x| > r, \\ ]-\infty, 0] & \text{se } x = -r, \\ \{0\} & \text{se } |x| < r, \\ [0, +\infty[& \text{se } x = r\,. \end{cases}$$

Allora (${}_rJ_\lambda$ ed ${}_rA_\lambda$ indicano il risolvente e l'approssimante di Yosida di ${}_rA$)

$$y + \lambda\ {}_rA\ y = \begin{cases} \emptyset & \text{se } |y| > r, \\ ]-\infty, -1] & \text{se } y = -r, \\ y & \text{se } |y| < r, \\ [1, +\infty[& \text{se } y = r, \end{cases}$$

quindi

$$ {}_rJ_\lambda\, x = \begin{cases} x & \text{se } |x| \le r, \\ \dfrac{rx}{|x|} & \text{se } |x| > r, \end{cases} $$

mentre

$$ {}_rA_\lambda\, x = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \le r, \\ \dfrac{x-r}{\lambda} & \text{se } x > r, \\ \dfrac{x+r}{\lambda} & \text{se } x < -r. \end{cases} $$

Inoltre, ${}_rA = \partial\, {}_r\varphi$ e ${}_rA_\lambda = ({}_r\varphi_\lambda)'$, dove

$$ {}_r\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \le r, \\ +\infty & \text{se } |x| > r, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad {}_r\varphi_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \le r, \\ \dfrac{(x-r)^2}{2\lambda} & \text{se } x > r, \\ \dfrac{(x+r)^2}{2\lambda} & \text{se } x < -r. \end{cases} $$

In generale, fissati $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si ponga

$$ Ax := \begin{cases} \emptyset & \text{se } x < a \text{ oppure } x > b, \\ ]-\infty, a] & \text{se } x = a, \\ \{y_0\} & \text{se } a \le x \le b, \\ [b, +\infty[& \text{se } x = b. \end{cases} $$

Osservato cha $A = ({}_rA)^{c,(x_0),[y_0]}$, con $r := \dfrac{(b-a)}{2}$, $c := 1$, $x_0 := \dfrac{a+b}{2}$, dai risultati appena visti e dal **Lemma 2.3** si deduce che $A = \partial\varphi$, dove

$$ \varphi(x) := \begin{cases} y_0 x & \text{se } a \le x \le b, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} $$

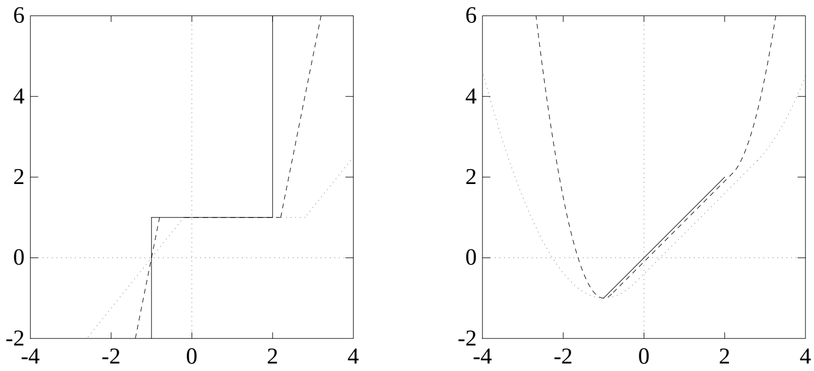
Inoltre,

$$ A_\lambda x = \begin{cases} \dfrac{x-a}{\lambda} & \text{se } x < a + \lambda y_0, \\ y_0 & \text{se } a + \lambda y_0 \le x \le b + \lambda y_0, \\ \dfrac{x-b}{\lambda} & \text{se } x > b + \lambda y_0, \end{cases} $$

mentre

$$ \varphi_\lambda(x) = \begin{cases} a y_0 + \dfrac{(x-a)^2}{2\lambda} & \text{se } x < a + \lambda y_0, \\ y_0 \left(x - \dfrac{y_0 \lambda}{2} \right) & \text{se } a + \lambda y_0 \le x \le b + \lambda y_0, \\ b y_0 + \dfrac{(x-b)^2}{2\lambda} & \text{se } x > b + \lambda y_0. \end{cases} $$

Un esempio ($a = -1$, $b = 2$, $y_0 = 1$; linee a punti per $\lambda = .8$, a tratti per $\lambda = .2$):



$\varphi_{1.5}(x)$ $\qquad$ $\varphi^*_{1.5}(y)$

<u>UN ESEMPIO CON H = SPAZIO DI HILBERT</u>.

Riprendiamo l'ESEMPIO **12** del Sottoparagrafo 1.2.3, con l'ulteriore ipotesi che K sia *convesso* e *chiuso*. Detto J_λ il risolvente di $A := \partial I_K$, risulta $x = J_\lambda y \iff y \in x + \lambda \partial I_K(x) \iff \dfrac{y-x}{\lambda} \in \partial I_K(x)$, e ciò equivale a richiedere che:

$$x \in K \ ; \ \textit{inoltre}, \forall v \in K \ , \ (y - x, v - x) \leq 0 \ .$$

In altri termini, il risolvente di ∂I_K non è altro che l'operatore di proiezione P_K su K. Di conseguenza, l'approssimante di YOSIDA A_λ di A è data in questo caso da $A_\lambda x = \dfrac{1}{\lambda}(x - P_K x)$.

Su questa osservazione si basa un metodo di risoluzione di disequazioni variazionali del tipo

(**PB1**) $\qquad$ *cercare* $x \in K$ *tale che* $(Bx, v - x) \geq (f, v - x) \ \ \forall v \in K$.

Mostriamo intanto che il problema precedente equivale a

(**PB2**) $\qquad$ *cercare* $x \in H$ *tale che* $f \in Bx + \partial I_K(x)$.

In effetti, se x è soluzione di (**PB1**) si ha, per definizione,

$$I_K(v) \geq I_K(x) + (f - Bx, v - x) \ \ \forall v \in H \, ,$$

cioè x verifica (**PB2**). Reciprocamente, sia x soluzione di (**PB2**); allora si ha intanto che $x \in K$ (altrimenti, $\partial I_K(x) = \emptyset$; si veda la **Proposizione**

2.5, *i)*). Quindi, $\forall x \in H$ risulta, per definizione di sottodifferenziale, $I_K(v) \geq (f - Bx, v - x)$, da cui ovviamente si ricava che x verifica (**PB1**).

L'*equazione approssimante* di (**PB2**), cioè $Bx_\lambda + A_\lambda x_\lambda = f$, per quanto visto sopra si scrive $Bu_\lambda + \frac{1}{\lambda}(x_\lambda - P_K x_\lambda) = f$, e (naturalmente, in opportune ipotesi su B), dà una funzione u_λ che *approssima* la soluzione di (**PB1**). ∎

Capitolo 3

PROBLEMI DI EVOLUZIONE

I problemi di CAUCHY-DIRICHLET (rispettivamente, CAUCHY-NEUMANN) per l'equazione del calore sono classicamente formulati nel modo seguente. Fissati $T > 0$, un aperto Ω "regolare di $\mathbb{R}^N$, con frontiera $\Gamma := \partial\Omega$, delle funzioni "regolari $f : \overline{\Omega} \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $g_D, g_N : \Gamma \times [0, T] \to \mathbb{R}$, cercare una funzione "regolare $u : \overline{\Omega} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta\, u(x,t) = f(x,t) & \text{in } \Omega \times \,]\,0, T\,[\,, \\[2ex] u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \text{ (condizione } \textit{iniziale}\text{, o di CAUCHY),} \end{cases}$$

ed inoltre *una* delle seguenti richieste:

$$u(x,t) = g_D(x,t) \qquad \text{su } \Gamma \times \,]\,0, T\,[\, \text{ (condizione di DIRICHLET),}$$

oppure, ν essendo la normale esterna a Γ,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \nabla u(x,t).\nu = g_N(x,t) \quad \text{su } \Gamma \times \,]\,0, T\,[\, \text{ (condizione di NEUMANN).}$$

In questo Capitolo esporremo alcune generalizzazioni (limitate per motivi di tempo ad impostazioni *astratte* in ambito *hilbertiano*) della formulazione classica, considerando, in adatti spazi funzionali, il problema di CAUCHY

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & \text{in }]\,0, T\,[\,, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

dove A è un (*opportuno*) operatore (non necessariamente lineare: si veda il **Sottoparagrafo 3.3.2**). Verranno illustrati sia (brevemente) il *metodo variazionale* di LIONS, per un'esposizione ben più esauriente del quale si rimanda ad esempio a: J. L. LIONS "*Equations differentielles opérationelles et problèmes aux limites*, Grund. Math. Wissenschaft **111**, Springer-Verlag (1961); J. L. LIONS, E. MAGENES "Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod (1968); sia il metodo introdotto da HILLE e YOSIDA, per il quale si veda il testo di H. BREZIS citato all'inizio del **Paragrafo 2.2**.

Alcune definizioni e proprietà di spazi di funzioni a valori vettoriali che saranno utilizzati in questo Capitolo sono esposte nel prossimo Paragrafo.

3.1 Funzioni a valori vettoriali.

Dati uno spazio mensurale $(S, \mathcal{M}, \mu)$ (con $\mu \geq 0$), ed uno spazio di BANACH E (di duale E'); enunceremo (molto concisamente) qualche risultato relativo ad applicazioni $f : S \to E$. Per una trattazione più esauriente rimandiamo, ad esempio, a E. HILLE, R. S. PHILLIPS, "*Functional Analysis and Semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXXI, 1957; N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, "*Linear Operators*, Interscience, 1958; K. YOSIDA, "*Functional Analysis*, Springer, 1965. Molto del materiale qui riportato è tratto dalla nota, non pubblicata, di G. GILARDI, "*Equazioni paraboliche astratte: impostazione variazionale*, nella quale vengono altresì dimostrate proprietà che qui saranno solo enunciate.

3.1.1 Integrazione.

Poniamo intanto le seguenti definizioni:

Definizione 3.1 *f è una* **funzione a scala** *se $f(S)$ è un insieme* finito*; se, inoltre, $\forall x \in E$ risulta $f^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{M}$, f è detta* **misurabile***; se, di più, $\forall x \in E \setminus \{0\}$ si ha $\mu(f^{-1}(\{x\})) < +\infty$, f è detta* **integrabile***, e si pone*[1]

$$\int_S f \, d\mu := \sum_{x \in E \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(\{x\}))\, x = \sum_{x \in f(S) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(\{x\}))\, x \,. \blacksquare$$

Nel caso generale di una funzione da S in E, ma non necessariamente a scala, la definizione si estende nel modo seguente:

Definizione 3.2 *f è* **misurabile** *se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni a scala misurabili tale che $f_n(s) \to f(s)$* q.o. *in S.* $\blacksquare$

Vale il seguente fondamentale risultato:

Teorema 3.1 (di PETTIS) *f è misurabile se e solo se è:*

i) q.o. a valori separabili *(cioè, $\exists N \subset S$ con $\mu(N) = 0$ tale che $f(S \setminus N)$ è separabile);*

ii) debolmente misurabile*: $\forall y \in E'$ la funzione $s \mapsto \langle y, f(s) \rangle$ è misurabile.* $\blacksquare$

La definizione di integrale può ora essere formulata come segue:

Definizione 3.3 *f è* **integrabile** *se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni a scala integrabili da S in E tale che:*

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $s \mapsto \|f_n(s) - f(s)\|$ è integrabile;

ii) $\lim_n \int_S \|f_n(s) - f(s)\| \, d\mu = 0$. $\blacksquare$

---

[1] in altri termini, si adotta la convenzione che $0 \,.\, f^{-1}(\{0\}) := 0$ *anche quando* $f^{-1}(\{0\}) = +\infty$.

In queste condizioni, si può dimostrare che la successione $\left\{\int_S f_n\,d\mu\right\}$ converge in E ad un limite *indipendente* dalla successione $\{f_n\}$ verificante *i)* e *ii)*; ciò permette di porre la seguente

Definizione 3.4 *Se f è integrabile, ed $\{f_n\}$ è una successione di funzioni a scala che verifica i) e ii) della* **Definizione 3.3**, *si pone*

$$\int_S f\,d\mu := \lim_n \int_S f_n\,d\mu\,. \ \blacksquare$$

Risultati fondamentali sono contenuti nei seguenti teoremi:

Teorema 3.2 (di Bochner) *f è integrabile se e solo se è misurabile e la funzione $s \mapsto \|f(s)\|$ è integrabile su S.* $\blacksquare$

Teorema 3.3 (di Lebesgue) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili; se*

i) $\exists f : S \to E$ *tale che* $f_n(s) \to f(s)$ q.o. *in S;*

ii) $\exists \varphi : S \to \mathbb{R}$, *integrabile e tale che,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(s)\| \leq \varphi(s)$ q.o. *in S,*

allora f è integrabile, e $\lim_n \int_S \|f_n - f\|\,d\mu = 0$. $\blacksquare$

Analogamente al caso scalare, la dimostrazione del teorema di Lebesgue si basa sulla seguente generalizzazione del lemma di Fatou:

Lemma 3.1 *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni integrabili tali che,* q.o., $f_n(s) \rightharpoonup f(s)$, *ed esiste c tale che* $\int_S \|f_n\|\,d\mu \leq c \quad \forall n$, *allora f è integrabile, e risulta* $\int_S \|f\|\,d\mu \leq \liminf_n \int_S \|f_n\|\,d\mu$. $\blacksquare$

Possiamo ora definire spazi di tipo L^p a valori in E, che generalizzano quelli del caso scalare[2]

Definizione 3.5 *Dato* $p \in [1, +\infty[$, *si pone*

$$i)\ L^p(S;E) := \Big\{ f \text{ è misurabile};\ \ s \mapsto \|f(s)\|^p \text{ è integrabile} \Big\},$$

$$\text{con norma definita da}\ \ \|f\|_{L^p(S;E)} := \left\{ \int_S \|f(s)\|^p\,d\mu \right\}^{1/p} ;$$

$$ii)\ L^\infty(S;E) := \Big\{ f \text{ è misurabile};\ \ s \mapsto \|f(s)\| \text{ è essenzialmente limitata} \Big\},$$

$$\text{con norma definita da}\ \ \|f\|_{L^\infty(S;E)} := \sup \operatorname{ess}_S \|f(s)\|\,. \ \blacksquare$$

Si può dimostrare che *se E* è *riflessivo*, μ è *σ-finita* e $p \in\ ]1, +\infty[$, è possibile identificare il duale di $L^p(S;E)$ a $L^q(S;E')$.

[2] anche in questo caso, si tratta ovviamente di spazi i cui elementi sono *classi di equivalenza* di funzioni: si identificano funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla.

<u>UN'APPLICAZIONE</u>.

Sia A un operatore, in generale multivoco, in H (cfr. **Definizione 2.3**); si può definire un operatore $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H} := L^2(S; H)$ (identificato al suo duale) ponendo [3]

$$\mathcal{A} := \{\,[u; v] \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid v(s) \in A(u(s)) \ \text{ q.o. } in\ S\}.$$

Vale allora la seguente

Proposizione 3.1 *i) $\mathcal{A}$ è monotono se e solo se lo è A;*

ii) se A è monotono massimale, e $\mu(S) < +\infty$, oppure $0 \in A\,0$, allora anche $\mathcal{A}$ è monotono massimale. ■

Dim. *i*) Supponiamo che A sia monotono; $\forall\,[u_1; v_1]\,,\,[u_2; v_2]\, \in \mathcal{A}$ risulta allora

$$(v_1 - v_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{H}} = \int_S (v_1(s) - v_2(s), u_1(s) - u_2(s))_H \, d\mu \geq 0\ ,$$

quindi $\mathcal{A}$ è monotono.

Reciprocamente, sia $\mathcal{A}$ monotono in $\mathcal{H}$, e si fissi $[\xi; \eta] \in A$, inoltre, si scelga $S_0 \in \mathcal{M}$ con $0 < \mu(S_0) < +\infty$, e si ponga $\chi := \chi_{S_0}$. Per $i = 1, 2$, fissati ad arbitrio $[\xi_i; \eta_i] \in A$, si ha che, posto $u_i := \xi_i\chi + \xi(1-\chi); v_i := \eta_i\chi + \eta(1-\chi)]$, le funzioni a scala $u_i, v_i \in \mathcal{H}$, ed inoltre $[u_i; v_i] \in \mathcal{A}$, dunque $(v_1 - v_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{H}} \geq 0$. poiché però

$$(v_1 - v_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{H}} = \int_S (\eta_1 - \eta_2, \xi_1 - \xi_2)_H\ \chi(s)\, d\mu = \mu(S_0)(\eta_1 - \eta_2, \xi_1 - \xi_2)_H\ ,$$

ne viene che anche A è monotono.

ii): fissato ad arbitrio $v \in \mathcal{H}$, poniamo $u(s) := (I + A)^{-1}v(s)$ e $u_0 := (I + A)^{-1}0$; poiché $|u(s)| \leq |u(s) - u_0| + |u_0| = |(I + A)^{-1}v(s) - (I + A)^{-1}0| + |u_0| \leq |v(s)| + |u_0|$, se ne deduce che $u \in \mathcal{H}$, quindi che $v \in u + \mathcal{A}u$, dunque che $\mathcal{A}$ è massimale, *almeno* se è verificata una delle condizioni seguenti:

$$\mu(S) < +\infty, \quad \text{oppure} \quad 0 \in A\,0.\ ■$$

3.1.2 Continuità. Derivabilità puntuale.

Ci limitiamo, in questo e nei successivi due Sottoparagrafi, al caso in cui $S = [0, T]$ (oppure $S = [0, +\infty\,[$), $\mathcal{M}$ è la famiglia degli insiemi misurabili secondo LEBESGUE di S, e μ è la misura di LEBESGUE in S; per semplicità, esamineremo soltanto il caso di funzioni da S in W, dove W è uno spazio di HILBERT separabile, identificato al suo duale (anche se *alcune* delle proprietà che verranno enunciate potrebbero essere estese al caso di *opportuni* spazi di BANACH).

[3] la definizione si può adattare al caso di un operatore da E in $\mathfrak{P}(F)$, ed a spazi di tipo L^p a valori vettoriali, con p non necessariamente uguale a 2.

La definizione di *continuità* (forte) nel punto $t_0 \in S$ (da cui anche quella di continuità in S) si formula in perfetta analogia al caso scalare (ad esempio, se t_0 è interno ad S, si richiede che $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$) [4]; ciò permette di defire lo spazio (di BANACH) delle funzioni (fortemente) continue in $[0, T]$ a valori in W, che si indica con $C^0([0, T]; W)$ e viene munito della norma $\|f\|_{C^0([0,T];W)} := \max_{0\le t\le T} |u(t)|$. Si dimostra (verifica immediata) che

Proposizione 3.2 *Se W_1, W_2 sono spazi di* HILBERT *tali che $W_1 \subset W_2$ con immersione continua, si ha $C^0([0, T]; W_1) \subset C^0([0, T]; W_2)$, con immersione continua.* ■

Anche la nozione di *derivata* (forte) *puntuale* si estende senza problemi: ad esempio, si dirà che f è (fortemente) derivabile in $t_0 \in]0, T[$ se esiste nella topologia forte di W il $\lim_{h\to 0} [(f(t_0 + h) - f(t_0))/h]$[5], indicato con $f'(t_0)$. Per induzione, si definiscono poi le derivate successive $f''(t), \ldots, f^{(k)}, \ldots$; con $C^k([0, T]; W)$ si indica lo spazio di BANACH delle funzioni che sono continue su $[0, T]$ assieme alle loro derivate fino all'ordine k, e lo si munisce della norma

$$\|f\|_{C^k([0,T];W)} := \sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_{C^0([0,T];W)}\,.$$

Infine, indichiamo con $C^\infty([0, T]; W)$ lo *spazio vettoriale*

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k([0, T]; W),$$

e con $\mathcal{D}(0, T; W)$ lo *spazio vettoriale*

$$\{f \in C^\infty([0, T]; W) \mid \exists\varepsilon = \varepsilon(f) > 0 : \ f(t) = 0 \ \forall t \in [0, \varepsilon] \cup [T - \varepsilon, T]\}.$$

Un risultato importante è contenuto nella seguente

Proposizione 3.3 $\forall p \in [1, +\infty[$, *$\mathcal{D}(0, T; W)$ è* denso *in $L^p(0, T; W)$.* ■

Non ci sono poi difficoltà ad estendere le definizioni precedenti agli *spazi vettoriali* $C^k([0, +\infty[; W)$, $C^\infty([0, +\infty[; W)$, $\mathcal{D}(0, +\infty; W)$.

3.1.3 Derivata generalizzata. Spazi di Sobolev a valori vettoriali.

In molti problemi, serve una nozione *più generale* di derivata. Premettiamo il seguente risultato:

[4] a volte può essere utile considerare la continuità *debole* nel punto t_0 o nell'intervallo $[0, T]$, (oppure $[0, +\infty[$) definite in modo ovvio.

[5] se tale limite esiste nella topologia *debole*, si dirà che f ha derivata *debole* in t_0.

Proposizione 3.4 *Se $f, g \in L^1(0,T;W)$, le condizioni seguenti si equivalgono:*

i) $\exists f_0 \in W \ : \ f(t) = f_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau$ q.o. *in* $]0,T[$;

ii) $\int_0^T (g(t), \varphi(t))\, dt = -\int_0^T (f(t), \varphi'(t))\, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T;W)$;

iii) $\int_0^T (g(t), z)\psi(t)\, dt = -\int_0^T (f(t), z)\psi'(t)\, dt \quad \forall z \in W,\ \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$. ■

Siamo ora in grado di dare la definizione di *derivata generalizzata*:

Definizione 3.6 *Se $f, g \in L^1(0,T;W)$ verificano le condizioni della proposizione precedente, diciamo che g è* la derivata di f in $L^1(0,T;W)$ *(o* derivata generalizzata*, o* derivata nel senso delle distribuzioni *di f), ed usiamo la notazione $f' := g$ (il che è lecito, grazie all'osservazione che segue).* ■

<u>Osservazione</u> **3.1** Se $f \in C^1([0,T];W)$, f' coincide q.o. con la derivata *puntuale* di f; la derivata di f in $L^1(0,T;W)$ è quindi effettivamente una *generalizzazione* della derivata usuale. ■

Vale inoltre la seguente notevole

Proposizione 3.5 *Se $f \in L^1(0,T;W)$ ammette derivata generalizzata in $L^1(0,T;W)$, allora $f \in C^0([0,T];W)$, ed $\exists c = c(T)$:*

$$\|f\|_{C^0(0,T;W)} \le c \left(\|f\|_{L^1(0,T;W)} + \|f'\|_{L^1(0,T;W)}\right) . \blacksquare$$

Possiamo ora definire gli spazi di Sobolev a valori vettoriali:

Definizione 3.7 *Si pone $H^0(0,T;W) := L^2(0,T;W)$, e, se $k \in \mathbb{N}$,*

$$H^k(0,T;W) := \left\{ f \in L^2(0,T;W) \mid f^{(i)} \in L^2(0,T;W), \quad i = 1, \dots, k \right\} . \blacksquare$$

Si dimostra che, munito del prodotto scalare

$$(f,g)_{H^k(0,T;W)} := \sum_{i=0}^{k} \left(f^{(i)}, g^{(i)}\right)_{L^2(0,T;W)} ,$$

Proposizione 3.6 *i) $H^k(0,T;W)$ è uno spazio di* Hilbert*;*

ii) $H^k(0,T;W) \subset C^{k-1}([0,T];W)$ con immersione continua;

iii) $C^\infty([0,T];W)$ è denso in $H^k(0,T;W)$. ■

3.1.4 Variazione totale; assoluta continuità.

Premettiamo la seguente

Definizione 3.8 *Si pone*

$$W^{1,p}(0,T;W) := \left\{ f \in L^p(0,T;W) \;\middle|\; f' \in L^p(0,T;W) \right\},$$

con norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(0,T;W)} := \left\{ \|f\|^p_{L^p(0,T;W)} + \|f'\|^p_{L^p(0,T;W)} \right\}^{1/p}. \;\blacksquare$$

Nel caso scalare, si ha che $f \in W^{1,p}(0,T)$ se e solo se
i) f è assolutamente continua, e $f' \in L^p(0,T)$;
o, equivalentemente,
ii) f è continua, e la sua derivata nel senso delle distribuzioni è in $L^p(0,T)$.
È naturale chiedersi se risultati analoghi valgono nel caso vettoriale. Cominciamo a porre la seguente definizione:

Definizione 3.9 *La* **variazione totale** *di* $f : [0,T] \to W$ *è definita da*

$$V(f;T) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\; 0 = t_0 < t_1 < \dots t_n = T \right\}.$$

Si dice che f *è a* **variazione limitata** *su* $[0,T]$ *se* $V(f;T) < +\infty$*; lo spazio delle funzioni a variazione limitata si indica con* $BV(0,T;W)$. $\blacksquare$

Vale il seguente risultato:

Proposizione 3.7 *Se* $f \in BV(0,T;W)$*, allora:*
i) $f \in L^\infty(0,T;W)$*;*
ii) $\forall t_0 \in [0,T[$*,* $\exists \lim_{t\to t_0+} f(t)$*;* $\forall t_0 \in]0,T]$*,* $\exists \lim_{t\to t_0-} f(t)$*;*
iii) $\forall h \in]0,T[$*, risulta*

$$\int_0^{T-h} |f(t+h) - f(t)|\, dt \le h\, V(f;T)\,. \;\blacksquare$$

<u>Osservazione</u> **3.2** È ben noto che se $f \in BV(0,T;\mathbb{R})$ allora, *q.o.* in $]0,T[$, esiste $f'(t)$; un risultato analogo vale più in generale per funzioni in $BV(0,T;W)$, ma *solo* nel caso in cui la derivata sia intesa *in senso debole*:

Proposizione 3.8 *Se* $f \in BV(0,T;W)$*, allora esiste un'unica funzione* $f'_w \in L^1(0,T;W)$ *tale che,* q.o. in $]0,T[$*,*

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \to f'_w(t) \text{ in } H_w \text{ per } h \to 0\,.$$

Inoltre,

$$\int_0^T |f'_w(t)|\, dt \le V(f;T)\,; \quad |f'_w(t)| \le \frac{d}{dt} V(f;T) \;\text{ q.o. in } [0,T]\,. \;\blacksquare$$

Anche la definizione di funzione *assolutamente continua* si estende al caso vettoriale:

Definizione 3.10 $f : [0,T] \to W$ *è* **assolutamente continua** *se* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: *per ogni successione* $\{]\alpha_n, \beta_n[\}$ *di intervalli disgiunti in* $[0,T]$ *con* $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \delta$, *risulta* $\sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| < \varepsilon$. *Lo spazio delle funzioni assolutamente continue da* $[0,T]$ *in* W *si indica con* $AC(0,T;W)$. ∎

È evidente che $AC(0,T;W) \subset BV(0,T;W)$; inoltre, se $f \in AC(0,T;W)$ la funzione $t \mapsto V(f;t)$ è in $AC(0,T;\mathbb{R})$, e si ha

$$V(f;t) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} V(f;\tau)\, d\tau\,;$$

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V(f;t)\, dt \quad se\ 0 \le t_1 \le t_2 \le T\,.$$

Reciprocamente, se $\exists \varphi \in L^1(0,T;\mathbb{R})$: $|f(t_1) - f(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt$ quando $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, allora $f \in AC(0,T;W)$, ed inoltre $\frac{d}{dt}V(f;t) \le \varphi(t)$ *q.o.* in $]0,T[$. ∎

Le relazioni tra derivabilità della funzione $t \mapsto V(f;t)$ ed appartenenza di f a $W^{1,1}(0,T;W)$ sono piuttosto complesse; ci limitiamo a citare il seguente risultato:

Proposizione 3.9 *i)* $\forall p \in [1,+\infty]$ *si ha che se* $f \in AC(0,T;W)$ *allora,* q.o. *in* $]0,T[$, *esiste la derivata* $f'(t)$ *di* $f(t)$, *e* $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, d\tau$;

ii) se $f \in BV(0,T;W)$, *si ha* $f \in W^{1,1}(0,T;W) \iff \int_0^T |f'(t)|\, dt = V(f;T)$. ∎

<u>Osservazione</u> **3.3** La maggior parte delle definizioni e dei risultati richiamati in questo e nei due precedenti Sottoparagrafi si possono estendere al caso in cui W sia uno spazio di Banach, **purché** riflessivo, ma **non** nel caso generale. Ad esempio, si consideri la funzione $t \mapsto f(t)$ cosí definita da $[0,1]$ in $L^1(0,1)$: $f(t)(x) := 0$ se $0 \le x \le t$, $f(t)(x) := 1$ se $t < x \le 1$. È evidente che $f \in BV(0,1;L^1(0,1))$. Tuttavia, in nessun punto $t_0 \in]0,1[$ esiste la derivata debole $f'_w(t_0)$: altrimenti, si dovrebbe avere, in particolare, che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$

$$_{\mathcal{D}'}\langle f'_w(t_0), \varphi \rangle_{\mathcal{D}} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_0^1 \left(f(t_0+h)(x) - f(t_0)(x) \right) \varphi(x)\, dx =$$

$$- \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \varphi(x)\, dx = -\varphi(t_0) =_{\mathcal{D}'} \langle -\delta_{t_0}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}},$$

da cui $f'_w(t_0) = -\delta_{t_0}$[6], assurdo. ∎

[6] δ_{t_0} è la misura unitaria concentrata nel punto t_0.

3.2 Il metodo di Lions.

Diamo ora qualche cenno alla *formulazione variazionale* del problema di evoluzione che stiamo considerando.

3.2.1 Terna hilbertiana.

Ricordiamo anzitutto la definizione di **terna hilbertiana** (V, H, V') (si veda [Br], **Capitolo 5**, OSSERVAZIONE 1).

Sia H uno spazio di HILBERT, con prodotto scalare $(\,.\,,\,.\,)$ e norma $|\,.\,|$, che *identifichiamo* al suo duale. Sia V un sottospazio lineare *denso* in H, e supponiamo che V sia munito di un prodotto scalare $(\!(\,.\,,\,.\,)\!)$ e della corrispondente norma $\|\,.\,\|$ che lo rendono uno spazio di HILBERT[7] *separabile.* Supponiamo infine che l'iniezione di V in H sia *continua*: $\exists c > 0 : \ \forall v \in V$ risulta $|v| \le c\,\|v\|$. Si può allora immergere H nel duale V' di V, con *immersione continua* e con *immagine densa.* In effetti, fissato $h \in H$, consideriamo l'applicazione definita su V nel modo seguente: $v \mapsto (h, v)$. È lineare e continua, quindi individua un elemento di V', che indichiamo (per il momento) con Ih. Si ha dunque, per definizione,

$$
{}_{V'}\langle Ih, v\rangle_V := (h, v) \quad \forall v \in V, \ \forall h \in H\,,
$$

$$
\|Ih\|_{V'} = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}} {}_{V'}\langle Ih, v\rangle_V \le \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}} |h|\;|v| \le c\,|h|\,;
$$

$$
Ih = 0 \Longrightarrow (h, v) = 0 \quad \forall v \in V \Longrightarrow h = 0\,;
$$

inoltre, $I(H)$ è *denso* in V': se un funzionale lineare e continuo Φ su V' è nullo su $I(H)$, si ha intanto che $\exists v \in V : \ \Phi(v') =_{V'} \langle v', v\rangle_V \ \ \forall v' \in V'$. Inoltre deve essere $0 =_{V'} \langle Ih, v\rangle_V = (h, v) \ \ \forall h \in H$, da cui $v = 0$.

In definitiva, tramite I si può immergere H in V', con immersione continua e densa; è quindi possibile *identificare* H ad un sottospazio di V', ottenendo lo schema (**terna hilbertiana**)

$$
V \subset H \equiv H' \subset V'\,;
$$

scriveremo d'ora in poi, $\forall h \in H$, h anziché Ih, ed indicheremo la dualità tra V' e V scrivendo $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ anziché ${}_{V'}\langle\,.\,,\,.\,\rangle_V$; $\|.\|_*$ e $(\!(.,.)\!)_*$ indicheranno la norma ed il prodotto scalare in V'.

Fissato ora $u \in V$, consideriamo l'applicazione definita su V come segue: $v \mapsto (\!(u, v)\!)$. È un funzionale lineare e continuo su V, quindi individua un elemento $\mathcal{J}u \in V'$, caratterizzato dalla relazione

$$
\langle \mathcal{J}u, v\rangle = (\!(u, v)\!) \quad \forall u, v \in V\,.
$$

È evidente che $\mathcal{J}$ è lineare, continuo, iniettivo, suriettivo, ed inoltre $\|\mathcal{J}u\|_* = \sup_{\|v\|=1} \langle \mathcal{J}u, v\rangle = \sup_{\|v\|=1} (\!(u, v)\!) \le \|u\|$; poiché per $u \ne 0$ risulta $\|\mathcal{J}u\|_* \ge \left(\!\!\left(u, \frac{u}{\|u\|}\right)\!\!\right) = \|u\|$, si ha in definitiva che

$$
\mathcal{J} \textit{ è un isomorfismo isometrico di } V \textit{ su } V'\,.
$$

[7] per semplicità: in realtà, la definizione si può estendere a casi ben più generali.

Ne viene quindi che $(\!(\mathcal{J}u, \mathcal{J}v)\!)_* = (\!(u, v)\!)$ $\forall u, v \in V$. In particolare,

$$\langle \mathcal{J}u, u\rangle = \|u\|^2 \quad \forall u \in V; \qquad \|w\|_*^2 = \|\mathcal{J}^{-1}w\|^2 = \langle w, \mathcal{J}^{-1}w\rangle \quad \forall w \in V'\,.$$

Si noti che risulta $\mathcal{J} \neq I_{|V}$: altrimenti si avrebbe, $\forall u, v \in V$, $\langle Iu, v\rangle = (u, v) = \langle \mathcal{J}u, v\rangle = (\!(u, v)\!)$, il che è possibile solo se V ed H *coincidono*.

Fissata una terna hilbertiana (V, H, V'), valgono le seguenti proprietà (si ricordino le **Proposizioni 3.2 e 3.3**):

Proposizione 3.10 *i) Risulta*

$$C^0(\,[0,T]\,;V) \subset C^0(\,[0,T]\,;H) \subset C^0(\,[0,T]\,;V')$$

con immersioni continue;
ii) $\mathcal{D}(0,T;V)$ *è* denso *in* $L^p(0,T;H)$ *ed in* $L^p(0,T;V')$ $\forall p \in [1, +\infty[$. ■

Uno spazio importante nell'ambito delle equazioni di tipo parabolico è lo spazio $H^1(0,T;V,V') := L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;V')$, munito della norma $\|v\|_{H^1(0,T;V,V')} := \left(\|v\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|v'\|^2_{L^2(0,T;V')}\right)^{1/2}$ che lo rende uno spazio di Hilbert. Si dimostra che

Proposizione 3.11 *i)* $C^\infty(\,[0,T]\,;V)$ *è* denso *in* $H^1(0,T;V,V')$;
ii) $H^1(0,T;V,V') \subset C^0(\,[0,T]\,;H)$ *con immersione continua;*
iii) se $f, g \in H^1(0,T;V,V')$ *risulta,* $\forall s, t \in [0,T]$,

$$\int_s^t \{\langle f'(\tau), g(\tau)\rangle + \langle g'(\tau), f(\tau)\rangle\}\, d\tau = (f(t), g(t)) - (f(s), g(s)). \;\blacksquare$$

Poniamo inoltre la seguente

Definizione 3.11 *Sia* $A \in \mathcal{L}(V;V')$*; poniamo*

$$D(A;H) := A^{-1}(H), \quad \textit{con norma} \;\; \|v\|_{D(A;H)} := \left(\|v\|^2 + |Av|^2\right)^{1/2} \;;$$

$$H^1(0,T;D(A;H),H) := L^2(0,T;D(A;H)) \cap H^1(0,T;H), \quad \textit{con norma}$$

$$\|v\|_{H^1(0,T;D(A;H),H)} := \left(\|v\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|Av\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|v'\|^2_{L^2(0,T;H)}\right)^{1/2} . \;\blacksquare$$

Vale allora la seguente

Proposizione 3.12 *Se* $A \in \mathcal{L}(V;V')$ *verifica le seguenti proprietà:*
i) simmetria: $\langle Au, v\rangle = \langle Av, u\rangle \quad \forall u, v \in V$;
ii) coercività debole: $\exists(\lambda \geq 0, \alpha > 0) : \langle Av, v\rangle + \lambda\,|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in V$, *allora* $H^1(0,T;D(A;H),H) \subset C^0(\,[0,T]\,;V)$ *con immersione continua. Se* $u, v \in H^1(0,T;D(A;H),H)$ *si ha,* $\forall s, t \in [0,T]$,

$$\int_s^t \{(Au(\tau), v'(\tau)) + (Av(\tau), u'(\tau))\}\, d\tau = (Au(t), v(t)) - (Au(s), v(s)) \;;$$

$$\int_s^t (Au(\tau), u'(\tau))\, d\tau = \frac{1}{2}\,(Au(t), u(t)) - \frac{1}{2}\,(Au(s), u(s)) \;. \;\blacksquare$$

3.2.2 Teorema di esistenza, unicità e regolarità.

Premettiamo la seguente disuguaglianza:[8]

Lemma 3.2 (di GRONWALL) *Se* $\varphi \in L^1(0,T)$ *ed esistono* $a \geq 0, b > 0$ *tali che,* q.o. *in* $]0,T[$, *risulti*

$$\varphi(\tau) \leq a + b\int_0^\tau \varphi(\xi)\, d\xi\,,$$

allora, q.o. *in* $]0,T[$,

$$\varphi(t) \leq a\exp(bt)\,.$$

Dim.: moltiplicando per $\exp(-b\tau)$ entrambi i membri della disuguaglianza data per ipotesi, si vede che

$$\frac{d}{d\tau}\left(\exp(-b\tau)\int_0^\tau \varphi(\xi)\, d\xi\right) \leq a\exp(-b\tau)\,;$$

da cui, integrando tra 0 e t e moltiplicando per $(b\,\exp(bt))$, la tesi. ∎

Siamo ora in grado di enunciare il risultato principale di questo Paragrafo:

Teorema 3.4 *Se* $A \in \mathcal{L}(V;V')$ *è debolmente coercivo,* $\forall f \in L^2(0,T;V')$ *e* $\forall u_0 \in H$ *esiste un'unica* $u \in H^1(0,T;V,V')$ *che risolve il problema di* CAUCHY

$$(\mathbf{Pb}):\qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & \text{q.o. } in\ ]0,T[, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Inoltre, u dipende con continuità dai dati*, nel senso che*

$$\exists c = c(\lambda,\alpha,T,\|A\|_{\mathcal{L}(V;V')})\ :\ \|u\|_{H^1(0,T;V;V')} \leq c\left(|u_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\right).$$

Vale inoltre il seguente risultato di regolarità*: se* A *è* simmetrico *(nel senso della* **Proposizione 3.12***, i)), se* $f \in L^2(0,T;H)$ *ed* $u_0 \in V$*, allora risulta* $u \in H^1(0,T;D(A;H),H)$*, e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{H^1(0,T;D(A;H),H)} \leq c\left(\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right)$$

con $c = c\left(\lambda,\alpha,T,\|A\|_{\mathcal{L}(V;V')}\right)$. ∎

Dim.: *i)*: *unicità*. poiché il problema è *lineare*, non si perde in generalità se si suppone, come faremo, che $f = u_0 = 0$. Moltiplicando l'equazione per u, integrando tra 0 e t e tenendo conto che $u(0) = 0$, si ottiene

$$0 = \int_0^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau + \int_0^t \langle Au(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 +$$

$$\int_0^t \langle Au(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau \geq \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \alpha\int_0^t \|u(\tau)\|^2\, d\tau - \lambda\int_0^t |u(\tau)|^2\, d\tau\,;$$

[8] in un caso *molto* particolare, che è stato oggetto di numerosissime generalizzazioni.

ne viene che

$$0 \le |u(t)|^2 \left(\le |u(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|u(\tau\|^2 \, d\tau \right) \le 2\lambda \int_0^t |u(\tau)|^2 \, d\tau \,,$$

quindi, per il **Lemma di** GRONWALL (con $\varphi(t) = |u(t)|^2$, $a = 0$, $b = 2\lambda$), $u(t) = 0$ *q.o.* in $]\,0, T\,[$. ∎

ii): *esistenza*. Utilizzeremo il cosiddetto metodo di FAEDO-GALERKIN, che (molto succintamente) si articola nei seguenti passi:

– fissata una successione $\{V_n\}$ di spazi a dimensione *finita* che "*invadono* V, si risolve in ciascuno dei V_n un "*problema approssimato*;

– si trovano maggiorazioni sulle "*soluzioni approssimate* sufficienti a garantire che una sottosuccessione delle soluzioni approssimate è convergente ad un limite u;

– si dimostra che u è soluzione del problema di CAUCHY (**Pb**).

• *Scelta degli spazi.* poiché V è separabile, possiamo scegliere una successione $\{V_n\}$ non decrescente di sottospazi di V, ciascuno a dimensione finita, tale che $\cup_{n=1}^{+\infty} V_n$ sia densa in V, quindi in H. Fissata una successione $\{u_{0n}\}$ tale che $u_{0n} \in V_n$ $\forall n$ e $u_{0n} \to u_0$ in H[9], consideriamo $\forall n \in \mathbb{N}$ il *problema approssimato*

$$(\mathbf{Pb_n}): \quad \begin{cases} \textit{trovare } u_n \in H^1(0,T;V_n) \textit{ tale che, } \forall v \in V_n, \\[2ex] \langle u_n'(t), v\rangle + \langle A u_n(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \qquad \text{q.o. in }]\,0,T\,[, \\[2ex] \langle u_n(0), v\rangle = \langle u_{0n}, v\rangle. \end{cases}$$

Scelta in V_n una base $\{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}\}$ (con $m = m(n) = \dim V_n$) si scriva $u_n(t) := \sum_{i=1}^m y_i(t)\, e^{(i)}$; posto, per $i = 1, 2, \ldots, m$, $g_i(t) := \langle f(t), e^{(i)}\rangle$ e $y_{0i} := \langle u_{0n}, e^{(i)}\rangle$, il problema approssimato ($\mathbf{Pb}_n$) diventa un problema di CAUCHY per il sistema differenziale lineare del primo ordine, di m equazioni in m incognite,

$$\begin{cases} B_n\, y'(t) + A_n\, y(t) = g(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove i vettori $y(t)$, $g(t)$, y_0 sono dati da $y(t) := (y_1(t), \ldots, y_m(t))$, $g(t) := (g_1(t), \ldots, g_m(t))$, $y_0 := (y_{01}, \ldots, y_{0m})$, mentre A_n, B_n sono le matrici $m \times m$ di elementi $a_{ij} := \langle A e^{(j)}, e^{(i)}\rangle$ e $b_{ij} := (e^{(j)}, e^{(i)})$. poiché i vettori $e^{(i)}$ sono linearmente indipendenti, B_n è invertibile; inoltre, per $i = 1, \ldots, m$ si ha

$$|g_i(t)| \le \|f(t)\|_* \, \|e^{(i)}\| \le \|f(t)\|_* \left(\max_{i=1,\ldots,m} \|e^{(i)}\| \right) ,$$

e pertanto $g_i(t) \in L^2(0,T)$. Ne vengono esistenza ed unicità della soluzione, con $y_i \in H^1(0,T)$. Quindi, il problema approssimato ha *una ed una sola soluzione* $u_n \in H^1(0,T;V_n)$. ∎

[9] evidentemente, non è limitativo supporre che risulti $|u_{0n}| \le c_0\, |u_0|$ per un'opportuna costante $c_0 > 0$. Nel resto del Paragrafo, $c_1, c_2, \ldots$ indicheranno *costanti positive indipendenti da n.*

<u>Osservazione</u> **3.4** L'introduzione della successione $\{u_{0n}\}$ è fatta *in vista del risultato di regolarità* enunciato, ma è inessenziale per quanto riguarda il risultato di *esistenza*, per ottenere il quale si potrebbe sostituire la condizione di Cauchy in $(\mathbf{Pb}_n)$ con la seguente: $\langle u_n(0), v\rangle = \langle u_0, v\rangle \ \forall v \in V_n$. ■

• *Maggiorazioni delle soluzioni approssimate.* Scegliendo, nel problema approssimato $(\mathbf{Pb}_n)$, $v := u_n(t)$, si ottiene, *q.o.* in $]\,0, T\,[$,

$$\langle u_n'(t), u_n(t)\rangle + \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle = \langle f(t), u_n(t)\rangle\,,$$

da cui

$$\int_0^t \langle u_n'(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau + \int_0^t \langle Au_n(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau = \int_0^t \langle f(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau\,.$$

Osservato che:[10]

$$\int_0^t \langle u_n'(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau = \frac{1}{2}|u_n(t)|^2 - \frac{1}{2}|u_n(0)|^2\,;$$

$$\int_0^t \langle Au_n(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau \geq \alpha \int_0^t \|u_n(\tau\|^2\, d\tau - \lambda \int_0^t |u_n(\tau)|^2\, d\tau\,;$$

$$\int_0^t \langle f(\tau), u_n(\tau)\rangle\, d\tau \leq \int_0^t \|f(\tau)\|_*\, \|u_n(\tau)\|\, d\tau \leq$$

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f(\tau)\|_*^2\, d\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_n(\tau)\|\, d\tau\,,$$

se ne deduce che

$$|u_n(t)|^2 - |u_n(0)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|u_n(\tau)\|^2\, d\tau - 2\lambda \int_0^t |u_n(\tau)|^2\, d\tau \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f(\tau)\|_*^2\, d\tau + \alpha \int_0^t \|u_n(\tau)\|^2\, d\tau\,.$$

Si osservi ora che, poiché $u_n(0), u_{0n} \in V_n$, la condizione iniziale in $(\mathbf{Pb}_n)$ implica che $u_n(0) = u_{0n}$ (si scelga $v := u_n(0) - u_{0n}$), da cui segue che $|u_n(0)| = |u_{0n}| \leq c_0|u_0|$; l'ultima disuguaglianza scritta fornisce allora la seguente maggiorazione:

$$\varphi_n(t) := |u_n(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_n(\tau)\|^2\, d\tau \leq$$

$$\left(|u_n(0)|^2 + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f(\tau)\|_*^2\, d\tau\right) + 2\lambda \int_0^t |u_n(\tau)|^2\, d\tau \leq$$

$$\left(c_0^2\, |u_0|^2 + \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(0,T;V')}\right) + 2\lambda \int_0^t \varphi_n(\tau)\, d\tau\,.$$

---

[10] nell'ultima disuguaglianza, si usa la maggiorazione $AB \leq \frac{\alpha}{2}\,A^2 + \frac{1}{2\alpha}\,B^2$, conseguenza ovvia di $0 \leq \frac{1}{2\alpha}(\alpha A - B)^2$.

È quindi possibile applicare il **Lemma di** GRONWALL, ottenendo la maggiorazione

$$\varphi_n(t) = |u_n(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_n(\tau)\|^2 \, d\tau \leq$$
$$\left(c_0^2 \, |u_0|^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|^2_{L^2(0,T;V')} \right) \exp(2\lambda T) \, ,$$

da cui si deduce che

$$\|u_n\|^2_{C^0([0,T];H)} + \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq c_1 \left(|u_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')} \right) . \blacksquare$$

• *Passaggio al limite.* poiché, come si è visto, $u_n(0) = u_{0n}$, si ha intanto, per definizione di $\{u_{0n}\}$, che $\lim_n u_n(0) = u_0$ in H. Osserviamo poi che, dalle maggiorazioni ottenute nel passo precedente, si ricava in particolare che $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0,T;V)$, dunque è possibile estrarne una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente ad u in $L^2(0,T;V)$. Dato che $A \in \mathcal{L}(V;V')$, ne viene altresì che Au_{n_k} tende debolmente ad Au in $L^2(0,T;V')$. Fissati ad arbitrio $\varphi \in H^1(0,T)$ con $\varphi(T) = 0$, e $w \in V_{n_k}$, dall'equazione approssimante verificata da u_{n_k} si ottiene (moltiplicando per $w \, \varphi(t)$ ed integrando per parti)

$$-\int_0^T \langle u_{n_k}(t), w \rangle \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au_{n_k}(t), w \rangle \varphi(t) \, dt + (u_{n_k}(0), w) \; \varphi(0) \, .$$

Anzi, (per la monotonia dei V_n), fissato k si ha, $\forall h > k$,

$$-\int_0^T \langle u_{n_h}(t), w \rangle \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au_{n_h}(t), w \rangle \varphi(t) \, dt + (u_{n_h}(0), w) \, \varphi(0) \, ,$$

quindi, al limite per $h \to +\infty$,

$$-\int_0^T \langle u(t), w \rangle \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au(t), w \rangle \varphi(t) \, dt + (u_0, w) \, \varphi(0) \, .$$

L'uguaglianza precedente è stata dimostrata $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall w \in V_{n_k}$; ma è facile controllare che vale $\forall w \in V$. Si ha quindi, in particolare, che

$$-\int_0^T \langle u(t), w \rangle \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au(t), w \rangle \varphi(t) \, dt \quad \forall w \in V, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \, .$$

Ne viene che $f(t) - Au(t)$ è la *derivata distribuzionale* di $u(t)$ (si ricordino la **Definizione 3.6** e la **Proposizione 3.4**, e si osservi che, $\forall z \in V'$, posto $w := J^{-1}z$, risulta $\langle u(t), w \rangle = \langle J(J^{-1}u(t), w \rangle = (\!(u(t), Jw)\!)_* = (\!(u(t), z)\!)_*$, e, analogamente, $\langle f(t) - Au(t), w \rangle = (\!(f(t) - Au(t), z)\!)_*$); in particolare, ne viene che

$$u \in H^1(0,T;V,V') \quad e \quad u'(t) + Au(t) = f(t) \text{ q.o. } in \;]\, 0,T \, [\, .$$

Fissati ad arbitrio $w \in V$ e $\varphi \in H^1(0,T)$ con $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, moltiplichiamo l'equazione precedente per $w \, \varphi(t)$ ed integriamo per parti il primo termine; otteniamo

$$-\int_0^T \langle u(t), w \rangle \varphi'(t) \, dt + \int_0^T \langle Au(t), w \rangle \varphi(t) \, dt =$$

$$\int_0^T \langle f(t), w\rangle \varphi(t)\, dt + (u(0), w)\,.$$

Confrontando con l'equazione ottenuta passando al limite per $h \to +\infty$ e grazie alla densità di V in H, si conclude infine che $u(0) = u_0$. ∎

iii): regolarità. Terminiamo la dimostrazione del Teorema mostrando che una maggiore regolarità dei dati permette di ottenere ulteriori informazioni sulla soluzione. Supponiamo dunque che A sia simmetrico, che $f \in L^2(0,T;H)$, e che $u_0 \in V$. Riprendiamo il problema $(\mathbf{Pb}_n)$, ed osserviamo che in questo caso possiamo supporre che $u_{0n} \in V_n$, ed inoltre $\lim_n u_{0n} = u_0$ in V, e $\|u_{0n}\| \le c_2\|u_0\|$. Ci servirà un'ulteriore stima, che ora deduciamo. In $(\mathbf{Pb}_n)$, scegliamo $v := u_n'(t)$ ed integriamo; si ottiene

$$\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\, d\tau + \int_0^t \langle Au_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle\, d\tau = \int_0^t (f(\tau), u_n'(\tau))\, d\tau\,.$$

Osservato che (grazie anche alla simmetria di A) risulta

$$\langle Au_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\langle Au_n(\tau), u_n(\tau)\rangle\,,$$

si ha che

$$\int_0^t \langle Au_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle\, d\tau = \frac{1}{2}\langle Au_n(t), u_n(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle Au_{0n}, u_{0n}\rangle \ge$$

$$\frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 - \frac{1}{2}\|A\|_{\mathcal{L}(V;V')}\,\|u_{0n}\|^2 \ge$$

$$\frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 - c_3\|u_0\|^2\,.$$

È poi evidente che

$$\int_0^t (f(\tau), u_n'(\tau))\, d\tau \le \frac{1}{2}\int_0^t |f(\tau)|^2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\, d\tau\,;$$

in definitiva, ne risulta facilmente che

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \le \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 + c_3\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |f(t)|^2\, dt\,.$$

poiché $\{u_n\}$ è limitata in $C^0([0,T];H)$, ne segue che

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \le c_4 \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

Ne viene, in particolare, che $\{u_n'\}$ è *limitata* in $L^2(0,T;H)$; ne possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}'\}$ debolmente convergente ad uno $z \in L^2(0,T;H)$. poiché però il limite di $\{u_n'\}$ nel senso delle distribuzioni a valori in V' è u', ne consegue che $u' = z$; quindi $u' \in L^2(0,T;H)$ e $\|u'\|_{L^2(0,T;H)} \le c_5\left\{\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right\}$.

Infine, dall'equazione in $(\mathbf{Pb})$ si ricava che $Au = f - u' \in L^2(0,T;H)$, e che $\|Au\|_{L^2(0,T;H)} \le \|f\|_{L^2(0,T;H)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H)} \le c_6\left\{\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right\}$. ∎

3.2.3 Qualche complemento.

Una nozione strettamente collegata a quella di operatore debolmente coercivo è la nozione di operatore $V-$ellittico:

Definizione 3.12 *$A \in \mathcal{L}(V;V')$ è detto $\underline{V-ellittico}$ se $\exists\alpha > 0$ tale che risulti $\langle Av, v\rangle \geq \alpha \|v\|^2 \; \forall v \in V$.* ∎

Ovviamente, ogni risultato di esistenza ed unicità valido per operatori debolmente coercivi vale anche, in particolare, per operatori $V-$ellittici. Reciprocamente, se si ha un risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy (**Pb**) con dati f, u_0 quando A è $V-$ellittico, allora lo stesso risultato vale anche se A è soltanto debolmente coercivo. In effetti, se in (**Pb**) si effettua il cambiamento di funzione incognita $w(t) := \exp(-\lambda t)\, u(t)$, il problema, in termini di w, si scrive

$$\begin{cases} w'(t) + Aw(t) + \lambda w(t) = f_1(t) := \exp(-\lambda t)\, f(t), \\ w(0) = u_0, \end{cases}$$

cioè, ancora come un problema di tipo (**Pb**), ma relativo all'operatore $A+\lambda I$ ($I :=$ immersione di V in V'), che, se A è debolmente coercivo (con costanti $\lambda \geq 0$, $\alpha > 0$), è $\underline{V-\text{ellittico}}$ (con costante α). ∎

Illustriamo ora brevemente alcune semplici estensioni[11] del **Teorema 3.4** al caso di operatori o dati più generali.

Una prima estensione riguarda la possibilità di "perturbare l'operatore debolmente coercivo $A \in \mathcal{L}(V;V')$ con un operatore "di ordine inferiore; si ha, ad esempio, la seguente

Proposizione 3.13 *Siano: $A \in \mathcal{L}(V;V')$ un operatore debolmente coercivo; B un operatore in $\mathcal{L}(V;H)$; f, u_0 assegnate rispettivamente in $L^2(0,T;V')$ ed in H. Allora esiste un'unica $u \in H^1(0,T;V,V')$ che risolve il problema di* Cauchy

$$(\mathbf{Pb(A,B)}): \qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) + Bu(t) = f(t) \quad \text{q.o. } in \;]0,T[, \\ u(0) = u_0\,; \end{cases}$$

u dipende con continuità dai dati: $\|u\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq c_7 \left\{|u_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\right\}$. Se, inoltre: A è simmetrico[12], $f \in L^2(0,T;H)$ ed $u_0 \in V$, allora la soluzione è in $H^1(0,T;D(A;H),H)$, e vale la maggiorazione $\|u\|_{H^1(0,T;D(A;H),H)} \leq c_8 \left\{\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right\}$.

Dim.: la parte riguardante esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dai dati è conseguenza immediata del **Teorema 3.4**, pur di mostrare (come ora faremo) che, nelle ipotesi poste, *anche* $A+B$ è un operatore debolmente coercivo in $\mathcal{L}(V;V')$. In effetti, è evidente che $(A+B) \in \mathcal{L}(V;V')$, e che se risulta $\langle Av, v\rangle + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \; \forall v \in V$ (con $\lambda \geq 0,\; \alpha > 0$), allora

[11] data l'importanza, anche in vista delle applicazioni, del **Teorema 3.4**, ne sono state date numerose altre, in varie direzioni, che però non è qui possibile esporre.

[12] si noti che la richiesta di simmetria è fatta *solo* su A.

$\exists(\widetilde{\lambda} \geq 0,\ \widetilde{\alpha} > 0)\ :\ \langle (A+B)v, v\rangle + \widetilde{\lambda}\,|v|^2 \geq \widetilde{\alpha}\,\|v\|^2$, sempre $\forall v \in V$. Infatti, si ha intanto che, $\forall\gamma > 0$, $|\langle Bu, u\rangle| = |(Bu, u)| \leq \|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}\,\|u\|\,|u| \leq \|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}\left(\frac{\gamma}{2}\,\|u\|^2 + \frac{1}{2\gamma}\,|u|^2\right)$; posto $\gamma := \frac{\alpha}{\|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}}$, si ottiene che

$$\langle (A+B)u, u\rangle \geq \frac{\alpha}{2}\,\|u\|^2 - \left(\lambda + \frac{\|B\|^2_{\mathcal{L}(V;H)}}{2\alpha}\right)|u|^2\,,$$

cioè la disuguaglianza cercata, con

$$\widetilde{\alpha} := \frac{\alpha}{2}\,, \qquad \widetilde{\lambda} := \lambda + \frac{\|B\|^2_{\mathcal{L}(V;H)}}{2\alpha}\,.$$

Per ciò che riguarda il risultato di regolarità, riprendiamo la dimostrazione del **Teorema 3.4**, punto *iii)*, di cui manteniamo le notazioni. Si osservi intanto che

$$|\langle Bu_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle| = |(Bu_n(\tau), u_n'(\tau))| \leq \|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}\|u_n(\tau)\|\,|u_n'(\tau)| \leq$$

$$\|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}\left\{\frac{\gamma}{2}\,\|u_n(\tau)\|^2 + \frac{1}{2\gamma}\,|u_n'(\tau)|^2\right\}$$

$\forall\gamma > 0$. Scelto $\gamma := 2\|B\|_{\mathcal{L}(V;H)}$, ne risulta che

$$\int_0^t \langle Bu_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle\,d\tau \geq -\|B\|^2_{\mathcal{L}(V;H)}\int_0^t \|u_n(\tau)\|^2\,d\tau - \frac{1}{4}\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\,d\tau\,.$$

Combinando questa disuguaglianza con le maggiorazioni trovate nella dimostrazione del **Teorema 3.4**, *iii)* per gli integrali $\int_0^t \langle Au_n(\tau), u_n'(\tau)\rangle\,d\tau$ e $\int_0^t (f(\tau), u_n'(\tau))\,d\tau$, si ricava che

$$\frac{1}{4}\int_0^t |u_n'(\tau)|^2\,d\tau + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^T |f(t)|^2\,dt + c_3\|u_0\|^2 +$$

$$\frac{\lambda}{2}\|u_n\|_{C^0([0,T];H)} + \|B\|^2_{(V;H)}\,\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}\,;$$

poiché $\{u_n\}$ è limitata sia in $C^0([0,T];H)$ sia in $L^2(0,T;V)$, il primo membro della disuguaglianza precedente è limitato; la conclusione segue come nel **Teorema 3.4**, *iii)*. ∎

Una seconda estensione è relativa ad un risultato di regolarità valido in ipotesi meno restrittive su f:

Proposizione 3.14 *Sia $A \in \mathcal{L}(V;V')$ un operatore debolmente coercivo e simmetrico; sia $u_0 \in V$, e supponiamo che f si possa scrivere nel modo seguente: $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in L^2(0,T;H)$ ed $f_2 \in H^1(0,T;V')$. Allora la soluzione u del problema di* CAUCHY (**Pb**) *verifica inoltre $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;H)$.*

Dim.: se in $(\mathbf{Pb}_n)$ si sceglie $v := u'_n$ e si integra tra 0 e t, si ottiene

$$\int_0^t |u'_n(\tau)|^2 \, d\tau + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \le \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 + c_3\|u_0\|^2 + \int_0^t \langle f(\tau), u'_n(\tau)\rangle \, d\tau \le$$

$$\frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 + c_3\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |f_1(t)|^2 \, dt + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_n(\tau)|^2 \, d\tau + \int_0^t \langle f_2(\tau), u'_n(\tau)\rangle \, d\tau \, .$$

Resta da valutare l'ultimo termine scritto. Per ogni $\gamma > 0$, risulta

$$\int_0^t \langle f_2(\tau), u'_n(\tau)\rangle \, d\tau = \langle f_2(t), u_n(t)\rangle - \langle f_2(0), u_n(0)\rangle - \int_0^t \langle f'_2(\tau), u_n(\tau)\rangle \, d\tau \le$$

$$\frac{\gamma}{2}\|f(t)\|_*^2 + \frac{1}{2\gamma}\|u_n(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|f_2(0)\|_*^2 + \frac{1}{2}\|u_n(0)\|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|f_2(t)\|_*^2 \, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_n(t)\|^2 \, dt \, .$$

Scegliendo $\gamma := \frac{2}{\alpha}$, ed osservato che $\frac{1}{2}\|u_n(0)\|^2 \le c_9\|u_0\|^2$, si ottiene che

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u'_n(\tau)|^2 \, d\tau + \frac{\alpha}{4}\|u_n(t)\|^2 \le \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 + c_{10}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} +$$

$$\frac{1}{2}\|f_1\|^2_{L^2(0,T;H)} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)\|f_2\|^2_{C^0([0,T];V')} + \frac{1}{2}\|f'_2\|^2_{L^2(0,T;V')} \, .$$

La limitatezza di $\{u_n\}$ in $C^0(0,T;H)$ ed in $L^2(0,T;V)$ permette ora di concludere la dimostrazione. ∎

<u>Osservazione</u> **3.5** La formulazione ora vista (in termini di *operatori lineari*) può essere sostituita, in modo equivalente, con quella in termini di *forme bilineari.* Dato $A \in \mathcal{L}(V;V')$, se si pone $a(u,v) := \langle Au, v\rangle \ \forall u,v \in V$, si vede che l'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è <u>*bilineare*</u> (cioè, $\forall v \in V$, l'applicazione $u \mapsto a(u,v)$ è lineare, e, $\forall u \in V$, l'applicazione $v \mapsto a(u,v)$ è lineare) e <u>*continua*</u> ($\exists M : \ a(u,v) \le M\,\|u\|\,\|v\| \ \forall u,v \in V$). Se A è <u>*debolmente coercivo*</u>, $(\exists(\lambda \ge 0, \alpha > 0) : \ \langle Av, v\rangle + \lambda\,|v|^2 \ge \alpha\,\|v\|^2 \ \forall v \in V)$, lo è anche a con le *stesse* costanti($\forall v \in V \quad a(v,v) + \lambda|v|^2 \ge \alpha\|v\|^2$). Se A è <u>*simmetrico*</u>, lo è anche a $(a(u,v) = a(v,u) \ \forall u,v \in V)$. Reciprocamente, se è data un'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia bilineare e continua, si verifica subito che per u fissata in V l'applicazione $v \mapsto a(u,v)$ è un elemento di V', che è lecito indicare con Au, dove $A \in \mathcal{L}(V;V')$. Se a è debolmente coerciva lo è anche A, e se a è simmetrica lo è anche A.

La formulazione in termini di una forma bilineare può ad esempio rendere più agevole l'estensione (sulla quale peraltro non ci soffermiamo) al caso di forme più generali, anche *dipendenti dal tempo.* ∎

3.3 Il metodo di Hille-Yosida.

Esponiamo ora, per il problema di evoluzione che stiamo considerando, il cosiddetto *metodo di* HILLE-YOSIDA, fondato, anziché sulla nozione di *terna hilbertiana*, su quella di *operatore monotono massimale* (non necessariamente lineare) in uno spazio di HILBERT.

3.3.1 Il caso lineare.

Questo caso è sviluppato in [BR], **Capitolo 7**, al quale rinviamo per una trattazione esauriente; ci limitiamo qui a ricordare i risultati principali.

Teorema 3.5 (di HILLE-YOSIDA lineare) *Sia A un operatore lineare monotono massimale in H. Per ogni fissato $u_0 \in D(A)$, esiste un'unica funzione*[13]

$$u \in C^0([0, +\infty[; D(A)) \cap C^1([0, +\infty[; H)$$

che risolve il problema di CAUCHY

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \ , \\ u(0) = u_0 \ . \end{cases}$$

La soluzione u verifica inoltre le maggiorazioni:

$$|u(t)| \leq |u_0|; \quad |u'(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \, , \ \forall t \geq 0 \ . \ \blacksquare$$

Definizione 3.13 *Nelle ipotesi e con le notazioni del* **Teorema 3.5**, *poniamo, $\forall t \geq 0$,*

$$S_A(t)\, u_0 := u(t) \ .$$

poiché $D(A)$ è denso in H e $|S_A(t)\, u_0| \leq |u_0|$, si può prolungare la definizione di $S_A(t)$ (in modo unico) a tutto *H; tale prolungamento verrà indicato ancora con $S_A(t)$, e detto il* **semigruppo generato da $-A$**. $\blacksquare$

Si vede facilmente che

Proposizione 3.15 *La famiglia $\{S_A(t)\}_{t \geq 0}$ è un* semigruppo continuo di contrazioni lineari*, cioè, verifica le proprietà seguenti:*

i) $S_A(0) = I$; $\forall t_1, t_2 \geq 0$ *si ha* $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) S_A(t_2)$;

ii) $\lim_{t \to 0+} |S_A(t) u_0 - u_0| = 0 \ \ \forall u_0 \in H$;[14]

iii) $\forall t \geq 0, \ S_A(t) \in \mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H; H)$, *e* $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. $\blacksquare$

<u>OSSERVAZIONE</u> **3.6** Reciprocamente, si può dimostrare che, dato un semigruppo continuo di contrazioni lineari $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, esiste un unico operatore lineare monotono massimale A tale che $S(t) = S_A(t) \ \ \forall t \geq 0$. $\blacksquare$

[13] $D(A)$ (più in generale, $D(A^j)$ con $j \in \mathbb{N}$) è munito del prodotto scalare $(u, v)_{D(A^j)} := \sum_{k=0}^{j} (A^k u, A^k v)$ (dove si è posto $A^0 := I$).

[14] ne viene evidentemente che, $\forall u_0 \in H$ e $\forall t_0 > 0$, $\lim_{h \to 0} |S_A(t_0 + h) u_0 - S_A(t_0) u_0| = 0$.

<u>OSSERVAZIONE</u> **3.7** Alcune estensioni del **Teorema 3.5** al caso di un operatore definito su uno spazio di BANACH, nonché ad equazioni con secondo membro non nullo, sono brevemente richiamate in [BR], **Complementi al Capitolo 7**, assieme a qualche cenno su metodi iterativi per la soluzione del problema di CAUCHY. ■

Ulteriori proprietà (si veda [BR], **Teorema VII.5** e **Teorema VII.7**) sono le seguenti:

Proposizione 3.16 *Se* $u_0 \in D(A^k)$ *con* $k > 1$*, la soluzione* u *data dal* **Teorema 3.5** *è inoltre tale che*

$$u \in C^{k-j}(\,[0,+\infty\,[\,;D(A^j)) \quad (j = 0,1,\ldots,k)\,. \blacksquare$$

Proposizione 3.17 *Se* A *è un operatore lineare monotono massimale ed inoltre* autoaggiunto*, allora* $\forall u_0 \in H$ *esiste un'unica funzione*

$$u \in C^0(\,[0,+\infty\,[\,;H) \cap C^0(\,]\,0,+\infty\,[\,;D(A)) \cap C^1(\,]\,0,+\infty\,[\,;H)$$

tale che

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(0) = u_0\ . \end{cases}$$

Inoltre, risulta

$$|u(t)| \leq |u_0|\ , \quad |u'(t)| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}\ |u_0| \quad \forall t > 0\ ;$$

$$u \in C^k(\,]\,0,+\infty\,[\,;D(A^j)) \quad \forall k,j \in \mathbb{N}\ . \blacksquare$$

3.3.2 Il caso non lineare.

Esaminiamo ora la possibilità di estendere (alcuni) dei risultati precedenti al caso non lineare. Se A è un operatore monotono massimale multivoco, occorre intanto modificare la formulazione del corrispondente problema di CAUCHY, che va scritto

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Da un'attenta rilettura della dimostrazione del **Teorema VII.4** in [BR], appare evidente che molti passaggi richiedono solo la *monotonia*, non la *linearità*, dell'operatore; d'altra parte, certamente *non tutti* i risultati validi nel caso lineare possono essere estesi a quello non lineare. In particolare, non si potranno ipotizzare gli stessi risultati sulla *regolarità* della soluzione, neppure quando $H = \mathbb{R}$; ad esempio, la funzione $u(t) := (1-t)^+$, che *non è in* $C^1(\,[0,+\infty\,[)$, è soluzione del problema di CAUCHY

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni 0 \quad \text{q.o. } in \ \ ]\,0,+\infty\,[\ , \\ u(0) = 1\,, \end{cases}$$

relativo all'operatore (monotono massimale) A di Heaviside (Esempio **2** del **Paragrafo 2.6**).

Occorre quindi riprendere in esame il problema, per precisare ciò che si può estendere al caso non lineare.

Un primo risultato è la seguente versione non lineare del teorema di Hille-Yosida:

Teorema 3.6 *Sia A un operatore (multivoco) monotono massimale;* $\forall u_0 \in D(A)$*, esiste un'unica funzione u tale che:*

i) $u \in C^0([0,+\infty[;H)$; $\forall t \geq 0,\ u(t) \in D(A)$; $u' \in L^\infty(0,+\infty;H)$*;*

ii) $u'(t) + Au(t) \ni 0$ q.o. *in* $]0,+\infty[$*;*

iii) $u(0) = u_0$.

Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

iv) $|u'(t)| \leq |A^0 u_0|$, q.o. *in* $]0,+\infty[$ *(il che precisa l'ultima delle i));*

v) $\forall t \geq 0$*, la funzione* $t \mapsto |A^0 u(t)|$ *è non crescente, e la funzione* $t \mapsto A^0 u(t)$ *è continua* da destra*;*

vi) $\forall t \geq 0$*, esiste la derivata* destra $D^+u(t)$*, e si ha* $D^+u(t) + A^0u(t) = 0$*;*

vii) se u_1, u_2 *sono soluzioni di i), ii), allora,* $\forall t > 0,\ |u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(0) - u_2(0)|$.

Dim.: *vii)*: poiché A è monotono, si ha

$$(-u_1'(t) + u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)) \geq 0, \text{ q.o. } in\ \ ]0,+\infty[\ ,$$

quindi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq 0\ ;$$

perciò, la funzione $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$ è non crescente, e, in particolare, $|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(0) - u_2(0)|$ per ogni $t > 0$, da cui l'*unicità* della soluzione.

Per dimostrare l'*esistenza* della soluzione, consideriamo intanto, $\forall \lambda > 0$ fissato, la soluzione u_λ in $C^1([0,+\infty[;H)$ del problema

$$\begin{cases} u_\lambda'(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0 \ \ \forall t \geq 0\,, \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

(si veda il teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard — cfr. [Br], **Teorema VII.3**). Per la *vii)*, $\forall h > 0$ si ha $|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda(h) - u_\lambda(0)|$, da cui, data la regolarità di u_λ,

$$|u_\lambda'(t)| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda'(0)| = |A_\lambda u_\lambda(0)| = |A_\lambda u_0| \leq |A^0 u_0|\ .$$

La proprietà fondamentale di $\{u_\lambda\}$, che ora proveremo, è la seguente:

$\forall\ T > 0$ *fissato,* $\{u_\lambda(t)\}$ *converge uniformemente in H su* $[0,T]$;

detto $u(\in C^0(\,[0,T]\,;H))$ il suo limite, ne viene in particolare che $u(0)=u_0$, cioè la *iii)*.

Dimostriamo che $\{u_\lambda\}$ è di CAUCHY in $C^0(\,[0,T]\,;H)$ quando $\lambda\to 0+$. In effetti, $\forall\lambda,\mu>0$ si ha intanto che $u'_\lambda - u'_\mu + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$, da cui

$$(u'_\lambda - u'_\mu, u_\lambda - u_\mu) + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0,$$

cioè

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0.$$

Osservato poi che

$$u_\lambda - u_\mu = (u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) + (J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) - (u_\mu - J_\mu u_\mu) =$$

$$\lambda A_\lambda u_\lambda + (J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) - \mu A_\mu u_\mu,$$

dalla monotonia di A[15] si ottiene

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) +$$

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \geq$$
$$-|A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu|\;|\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu| \geq -2(\lambda+\mu)|A^0 u_0|^2,$$

quindi

$$\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 4(\lambda+\mu)|A^0 u_0|^2,$$

da cui, (integrando tra 0 e $t\leq T$),

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\;|A^0u_0| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)T}\;|A^0u_0|.$$

Di conseguenza, per $\lambda\to 0+$ si ha che $\{u_\lambda\}$ converge uniformemente su $[0,T]$ ad una funzione $u\in C^0(\,[0,T]\,;H)$, ed inoltre

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}\;|A^0u_0|.$$

Si ha altresì che

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \leq |J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t) - u(t)| =$$

$$\lambda\,|A_\lambda u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t)-u(t)| \;\leq \lambda\,|A^0u_0| + |u_\lambda(t)-u(t)| \;\leq (\lambda + 2\sqrt{\lambda T}\,)|A^0u_0|;$$

quindi, anche $J_\lambda u_\lambda$ converge uniformemente ad u su $[0,T]$.

Dimostriamo che u è la soluzione cercata.

i): sia $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}_+$ una successione infinitesima di numeri positivi; poiché, $\forall t\in[0,T]$, $u_{\lambda_n}(t)\to u(t)$ e $|A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t)|\leq|A^0u_0|$, è possibile estrarre da $\{u_{\lambda_n}\}$ una sottosuccessione $\{u_{\lambda_{n_k}}\}$ per la quale risulti $A_{\lambda_{n_k}}u_{\lambda_{n_k}}(t)\to v(t)$ in H_w; ovviamente, $u_{\lambda_{n_k}}(t)\to u(t)$ e $J_{\lambda_{n_k}}u_{\lambda_{n_k}}(t)\to u(t)$ in H_s. poiché

[15] si ricordi (**Proposizione 2.14**, *i)*) che $A_\lambda x\in AJ_\lambda x$.

$A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(t) \in AJ_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(t)$, la chiusura di A in $H_s \times H_w$ implica che $u(t)$ è in $D(A)$ e $v(t)$ in $Au(t)$; inoltre, evidentemente

$$|A^0 u(t)| \le |v(t)| \le \liminf_k \left|A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(t)\right| \le \limsup_k \left|A_{\lambda_{n_k}} u_{\lambda_{n_k}}(t)\right| \le |A^0 u_0|.$$

iv): più sopra, si è visto che $|u'_\lambda(t)| \le |A^0 u_0|$. Fissata una successione infinitesima $\{\lambda_n\}$ di numeri positivi tale che u'_{λ_n} converga nella topologia debole* di $L^\infty(0,T;H)$ ad un elemento w[16], si ha intanto che $u'_{\lambda_n} \to w$ in $\mathcal{D}'(]\,0,T\,[;H)$; d'altra parte, poiché $u_\lambda \to u$ in $L^\infty(0,T;H)$, dunque in $\mathcal{D}'(]\,0,T\,[;H)$, ne viene anche $u'_{\lambda_n} \to u'$ in $\mathcal{D}'(]\,0,T\,[;H)$. Di conseguenza, $u' = w \in L^\infty(0,T;H)$; è facile inoltre controllare che l'*intera* famiglia $\{u'_\lambda\}$ tende ad u' nella topologia debole* di $L^\infty(0,T;H)$, e ciò implica anche

$$|u'(t)| \le \liminf_{\lambda\to 0+} |u'_\lambda(t)| \le |A^0 u_0| \quad \text{q.o. } in\ ]\,0,T\,[,$$

da cui, per l'arbitrarietà di T, in $]\,0,+\infty\,[$, cioè la tesi.

ii): si consideri l'operatore (monotono massimale) $\mathcal{A}$ su $\mathcal{H} := L^2(0,T;H)$ definito, a partire da A, come nell'Esempio *v)* del **Paragrafo 2.2** (si ricordi l'Esempio *iii)* del **Paragrafo 2.4**). Come si è visto, per ogni successione infinitesima $\{\lambda_n\}$ di numeri positivi si ha $J_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \to u$ in $\mathcal{H}$, $-u'_{\lambda_n} \in \mathcal{A}J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}$ e $-u'_{\lambda_n} \to -u'$ debolmente in $\mathcal{H}$. Per la chiusura di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}_s \times \mathcal{H}_w$, ne viene che $-u' \in \mathcal{A}u$, cioè $u' + \mathcal{A}u \ni 0$, quindi che $u'(t) + Au(t) \ni 0$ q.o. in $]\,0,+\infty\,[$ (data l'arbitrarietà di T).

vi): per quanto riguarda la monotonia di $t \mapsto |A^0 u(t)|$, si osservi che, fissato $t_0 > 0$, e posto $v(t) := u(t+t_0)$, la funzione $t \mapsto v(t)$ verifica *i), ii)*, ed inoltre $v(0) = u(t_0)$. Di conseguenza, $|v'(t)| = |u'(t+t_0)| \le |A^0 v(0)| = |A^0 u(t_0)|$ per la *ii)*; ma allora $|A^0 u(t+t_0)| \le |u'(t+t_0)| \le |A^0 u(t_0)|$. Resta da dimostrare la continuità da destra di $t \mapsto A^0 u(t)$ nel generico punto $t_0 \ge 0$. Fissiamo una successione $\{\varepsilon_n\}$ infinitesima di numeri positivi; poiché $\{|A^0 u(t_0+\varepsilon_n)|\}$ è limitata da $|A^0 u_0|$, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{\varepsilon_{n_k}\}$ tale che $A^0 u(t_0+\varepsilon_{n_k}) \rightharpoonup v$, da cui $|v| \le \liminf_k |A^0 u(t_0+\varepsilon_{n_k})|$. poiché, per la *i)*, $u(t_0+\varepsilon_{n_k}) \to u(t_0)$, la chiusura di A in $H_s \times H_w$ implica che $v \in Au(t_0)$; per la monotonia di $t \mapsto |A^0 u(t)|$, $\limsup_k |A^0 u(t_0+\varepsilon_{n_k})| \le |A^0 u(t_0)| \le |v|$, cioè, in definitiva, $\lim_k |A^0 u(t_0+\varepsilon_{n_k})| = |A^0 u(t_0)|$. Ciò permette di concludere che *tutta* la successione $\{A^0 u(t_0+\varepsilon_n)\}$ converge *fortemente* in H ad $u(t_0)$.

v): posto $I := \{t > 0 \mid \exists u'(t) \text{ e } -u'(t) \in Au(t)\}$, $\mathbb{R}_+ \setminus I$ ha misura nulla. Dalla *iv)* si ha che, $\forall \tau > 0$ e $\forall h > 0$, risulta $|u(\tau+h) - u(\tau)| \le h|A^0 u(\tau)|$, dato che $u(\tau+h) - u(\tau) = \displaystyle\int_\tau^{\tau+h} u'(t)\,dt$. Quindi, $\forall \tau \in I$, $|u'(\tau)| \le |A^0 u(\tau)|$, da cui $u'(\tau) + A^0 u(\tau) = 0$; fissato $t_0 \ge 0$, ed integrando su $[t_0, t_0+h]$ (con $h > 0$), si ottiene

$$\left|\frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} + A^0 u(t_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} u'(\tau)\,d\tau + A^0 u(t_0)\right| =$$

[16] si ricordi il **Corollario III.26** di [Br].

$$\left|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\{A^0u(t_0)-A^0u(\tau)\}\,d\tau\right|.$$

Ne viene che $t \mapsto u(t)$ è derivabile da destra in t_0, e che $D^+u(t_0)+A^0u(t_0)=0$, e ciò conclude la dimostrazione. ∎

<u>Osservazione</u> **3.8** *i)* Contrariamente al caso lineare, *non* si può concludere, in generale, che la funzione $t \mapsto |u(t)|$ sia non crescente, neppure quando $H=\mathbb{R}$ ed A è univoco: la funzione $u(t) := -\log(t+1)$ verifica $u'(t)+\exp u(t) = 0$, $u(0)=0$; l'operatore $x \mapsto Ax := \exp x$ è evidentemente monotono massimale; ma la funzione $t \mapsto |u(t)|$ è strettamente crescente su $[0,+\infty[$.

*ii)*Una condizione sufficiente a garantire (nel caso generale di un operatore monotono massimale su uno spazio di Hilbert) la non crescenza di $|u(t)|$ è, ad esempio, che $0 \in A\,0$: in tal caso, si ha infatti $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = (u'(t),u(t)) = -(-u'(t)+0,u(t)-0) \le 0$. ∎

Fissati $t \ge 0$ ed $u_0 \in D(A)$, l'applicazione $u_0 \mapsto u(t)$ è, per quanto si è visto, una *contrazione* (in senso largo) su $D(A)$, che possiamo prolungare, per continuità, a $\overline{D(A)}$. Tale prolungamento verrà indicato con $S_A(t)$. È immediato verificare che

Proposizione 3.18 *$\{S_A(t)\}_{t\ge 0}$ è un* **semigruppo continuo di contrazioni non lineari** *(il* **semigruppo generato da** *$-A$); valgono cioè le seguenti proprietà:*

i) $S_A(0)=I$; $\forall t_1,t_2 \in [0,+\infty[$ *si ha* $S_A(t_1+t_2)=S_A(t_1)S_A(t_2)$*;*

ii) $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$, $\lim_{t\to 0+}|S_A(t)u_0-u_0| = 0$[17]*;*

iii) $\forall u_1,u_2 \in \overline{D(A)}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $|S_A(t)u_1-S_A(t)u_2| \le |u_1-u_2|$. ∎

È importante osservare che ci sono classi di operatori monotoni massimali tali che il semigruppo da essi generato ha un *effetto regolarizzante* sul dato iniziale, nel senso che, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ e $\forall t>0$, risulta $S_A(t)u_0 \in D(A)$. Nel caso *lineare*, ciò accade ad esempio se A è autoaggiunto (si ricordi la **Proposizione 3.17**). Nel caso non lineare, un esempio significativo è quello in cui A è il sottodifferenziale di una funzione convessa, propria, s.c.i.:

Proposizione 3.19 *Sia φ una funzione convessa, propria, s.c.i. su H; poniamo $A := \partial\varphi$, e sia $\{S_A(t)\}_{t\ge0}$ il semigruppo generato da $-A$ su $\overline{D(A)}$. Allora, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ e $\forall t>0$ si ha $S_A(t)u_0 \in D(A)$; inoltre, $\forall v \in D(A)$ e $\forall t>0$ risulta $|A^0S_A(t)u_0| \le |A^0v| + \frac{1}{t}|u_0-v|$.*

Dim.: consideriamo il problema di Cauchy per l'approssimante di Yosida A_λ di A:

$$\begin{cases} u'_\lambda(t)+A_\lambda u_\lambda(t)=0 \text{ in }]0,+\infty[\ ; \\ u_\lambda(0)=u_0\ . \end{cases}$$

[17] ne viene altresì che, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ e $\forall t_0>0$, $\lim_{h\to0}|S_A(t_0+h)u_0-S_A(t_0)u_0| = 0$.

Cominciamo a dimostrare che

per ogni $t > 0$ fissato, la soluzione $u_\lambda(t)$ tende a $S_A(t)u_0$ quando $\lambda \to 0+$.

In effetti, se $\widetilde{u}_0 \in D(A)$ ed $\widetilde{u}_\lambda(t)$ è la soluzione del problema di CAUCHY per A_λ con dato iniziale $\widetilde{u}_0$, si ha (grazie a: **Teorema 3.6**, *vii)* e **Proposizione 3.18**, *iii)*), che

$$|u_\lambda(t) - S_A(t)u_0| \le |u_\lambda(t) - \widetilde{u}_\lambda(t)| + |\widetilde{u}_\lambda(t) - S_A(t)\widetilde{u}_0| + |S_A(t)\widetilde{u}_0 - S_A(t)u_0| \le$$

$$\le 2|u_0 - \widetilde{u}_0| + |\widetilde{u}_\lambda(t) - S_A(t)\widetilde{u}_0| \, .$$

Di conseguenza, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, possiamo determinare $\widetilde{u}_0 \in D(A)$ tale che $|u_0 - \widetilde{u}_0| < \varepsilon$; ma, nella dimostrazione del **Teorema 3.6** (applicato, come è lecito, ad $\widetilde{u}_0$), si è visto che per λ sufficientemente piccolo anche $|\widetilde{u}_\lambda(t) - S_A(t)\widetilde{u}_0| < \varepsilon$, da cui la tesi.

Fissiamo ora un elemento $v \in H$; si ha, per definizione, $\varphi_\lambda(u) - \varphi_\lambda(v) \ge (A_\lambda v, u - v)$; perciò, la funzione $u \mapsto \widetilde{\varphi}_\lambda(u) := \varphi_\lambda(u) - \varphi_\lambda(v) - (A_\lambda v, u - v)$ è convessa, non negativa, e differenziabile secondo FRÉCHET (quindi, anche secondo GÂTEAU) per ogni $u \in H$; inoltre, $\widetilde{\varphi}_\lambda(v) = 0$ e $\partial\widetilde{\varphi}_\lambda(u) = \{\nabla\widetilde{\varphi}_\lambda(u)\} = \{\nabla\varphi_\lambda(u) - A_\lambda v\} = \{A_\lambda u - A_\lambda v\}$, cosicché l'equazione $u'_\lambda(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0$ si può scrivere nella forma

$$u'_\lambda(t) + \nabla\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(t)) = -A_\lambda v \ .$$

Stabiliamo ora una *maggiorazione dell'energia.* Moltiplicando ambo i membri dell'equazione precedente per $tu'_\lambda(t)$ si ottiene

$$t\,|u'_\lambda(t)|^2 + t\,\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(t)) = -t\,(A_\lambda v, u'_\lambda(t)),$$

da cui

$$\int_0^t s\,|u'_\lambda(s)|^2\,ds + t\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(t)) - \int_0^t \widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s))\,ds =$$

$$-\int_0^t s\,(A_\lambda v, u'_\lambda(s))\,ds = -\int_0^t s\,\frac{d}{ds}\,(A_\lambda v, u_\lambda(s) - v)\,ds =$$

$$-t\,(A_\lambda v, u_\lambda(t) - v) + \int_0^t (A_\lambda v, u_\lambda(s) - v)\,ds,$$

quindi

$$\int_0^t s\,|u'_\lambda(s)|^2\,ds \le \int_0^t \widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s))\,ds - t\,(A_\lambda v, u_\lambda(t) - v) +$$

$$\int_0^t (A_\lambda v, u_\lambda(s) - v)\,ds$$

(perché $\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(t)) \ge 0$). poiché $\widetilde{\varphi}_\lambda(v) - \widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s)) \ge (\nabla\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s)), v - u_\lambda(s))$, da cui anche $\widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s)) \le (u'_\lambda(s) + A_\lambda v, v - u_\lambda(s)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|v - u_\lambda(s)|^2 + (A_\lambda v, v - u_\lambda(s))$, si ha che

$$\int_0^t \widetilde{\varphi}_\lambda(u_\lambda(s))\,ds \le \frac{1}{2}|v - u_0|^2 - \frac{1}{2}|v - u_\lambda(t)|^2 + \int_0^t (A_\lambda v, v - u_\lambda(s))\,ds \ ;$$

perciò,

$$\int_0^t s\,|u_\lambda'(s)|^2\,ds \le \frac{1}{2}|u_0-v|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(t)-v|^2 - t\,(A_\lambda v, u_\lambda(t)-v) \le$$

$$\frac{1}{2}t^2|A_\lambda v|^2 + \frac{1}{2}|u_0-v|^2.$$

Ma poiché, $\forall s \in [0,t]$, si ha $|u_\lambda'(t)| \le |u_\lambda'(s)|$, ne viene che $\frac{1}{2}t^2|u_\lambda'(t)|^2 \le \frac{1}{2}t^2|A_\lambda v|^2 + \frac{1}{2}|u_0-v|^2$, da cui $|u_\lambda'(t)|^2 \le |A_\lambda v|^2 + \frac{1}{t^2}|u_0-v|^2$, e, in definitiva, se $v \in D(A)$,

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| = |u_\lambda'(t)| \le |A_\lambda v| + \frac{1}{t}|u_0-v| \le |A^0 v| + \frac{1}{t}|u_0-v|\,.$$

È ora facile concludere la dimostrazione. Dato che, per $t>0$ fissato, $\{A_\lambda u_\lambda(t)\}$ è limitata e $\{u_\lambda(t)\}$ converge ad $S_A(t)u_0$ per $\lambda \to 0+$, procedendo come nella dimostrazione del **Teorema 3.6**, *i)* (e cioè: osservando che anche $\{J_\lambda u_\lambda(t)\}$ tende ad $S_A(t)u_0$, poiché $|J_\lambda u_\lambda(t) - S_A(t)u_0| \le |J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t) - S_A(t)u_0| = \lambda|A_\lambda u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t) - S_A(t)u_0|$; che $A_\lambda u_\lambda(t) \in AJ_\lambda u_\lambda(t)$; usando la chiusura di A in $H_s \times H_w$), si conclude infine che, $\forall t>0$, $S_A(t)u_0 \in D(A)$, e

$$|A^0 S_A(t)u_0| \le \liminf_{\lambda\to 0+} |A_\lambda u_\lambda(t)| \le |A_\lambda v| + \frac{1}{t}|u_0-v| \le |A^0 v| + \frac{1}{t}|u_0-v|\,. \blacksquare$$

Il risultato ora visto può essere riformulato nel modo seguente:

Proposizione 3.20 *Data una funzione convessa, propria, s.c.i. φ su H, poniamo $A := \partial\varphi$, e sia $\{S_A(t)\}_{t\ge 0}$ il semigruppo generato da $-A$ su $\overline{D(A)}$. Allora, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ esiste un'unica $u : [0,+\infty[\to H$ tale che:*

i) $u \in C^0([0,+\infty[;H)$; $u(0) = u_0$;

ii) $\forall t>0$, $u(t) \in D(A)$;

iii) $\forall \delta > 0$, la derivata distribuzionale u' di u è in $L^\infty(\delta,+\infty;H)$ e verifica, $\forall v \in D(A)$ e q.o. *in $]\delta,+\infty[$, $|u'(t)| \le |A^0 v| + \frac{1}{\delta}|u_0-v|$;*

iv) $\forall t>0$, esiste la derivata destra $D^+u(t)$ di u, e $D^+u(t) + A^0u(t) = 0$. Inoltre,

v) la funzione $t \mapsto |A^0u(t)|$ è non crescente; la funzione $t \mapsto A^0u(t)$ è continua da destra;

vi) la funzione $t \mapsto \varphi(u(t))$ è convessa, non crescente, e, per ogni $\delta>0$, lipschitziana su $[\delta,+\infty[$; inoltre, $\forall t>0$, $D^+\varphi(u(t)) = -|D^+u(t)|^2$.

Dim.: *esistenza.* Detto $\{S_A(t)\}_{t\ge 0}$ il semigruppo generato da $-A$ su $\overline{D(A)}$, e posto $u(t) := S_A(t)u_0$, le proprietà di $\{S_A(t)\}$ implicano intanto che vale la *i)*. La *ii)* e la *iii)* seguono dalla **Proposizione 3.19**, osservando che, q.o. in $]\delta,+\infty[$, si ha $u_\lambda'(t) \to u'(t)$ in H_w, da cui $|u'(t)| \le \liminf_\lambda |u_\lambda'(t)| \le |A^0v| + \frac{1}{t}|u_0-v| \le |A^0v| + \frac{1}{\delta}|u_0-v|$. Infine, fissato $t_0>0$ si ponga $v(t) := u(t+t_0) = S_A(t+t_0)u_0 = S_A(t)\,(S_A(t_0)u_0) = S_A(t)u(t_0)$. Allora, v è soluzione del problema di CAUCHY relativo ad A ed al dato iniziale $v(0) := u(t_0) \in D(A)$, e le *iv), v)* seguono dal **Teorema 3.6**, *v), vi)*.

Unicità. Se $w : [0, +\infty[\to H$ verifica *i)... iv)*, la funzione $t \mapsto v(t) := w(t) - S_A(t)u_0$ è tale che $v \in C^0([0, +\infty[; H)$, $v(0) = 0$, e, q.o. in $]0, +\infty[$, $v'(t) = D^+v(t) = -A^0w(t) + A^0S_A(t)u_0$; ne viene che $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 = -(A^0w(t) - A^0S_A(t)u_0, w(t) - S_A(t)u_0) \le 0$, il che implica $v(t) = 0 \ \ \forall t \ge 0$.

vi): fissati $\delta > 0$ ed $h > 0$, si ha ovviamente

$$\varphi(u(t+h)) - \varphi(u(t)) \ge -(D^+u(t), u(t+h) - u(t)),$$

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u(t+h)) \ge -(D^+u(t+h), u(t) - u(t+h)).$$

Per la monotonia di $t \mapsto |D^+(t)|$, risulta intanto che $|D^+u(t+h)| \le |D^+u(t)| \le |D^+u(\delta)|$; d'altra parte, $|u(t+h) - u(t)| \le \int_t^{t+h} |u'(s)|\, ds \le |D^+u(\delta)|\, h$, e quindi $t \mapsto \varphi(u(t))$ è lipschitziana. Ma le disuguaglianze precedenti si possono anche scrivere

$$-\left(D^+u(t+h), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right) \le \frac{\varphi(u(t+h)) - \varphi(u(t))}{h} \le$$

$$-\left(D^+u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right),$$

da cui, passando al limite per $h \to 0+$, e grazie anche alla *v)*, $D^+\varphi(t) = -|D^+u(t)|^2$, il che implica altresì la non crescenza e la convessità dell'applicazione $t \mapsto \varphi(u(t))$. ∎

Indice analitico