Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Equazioni di Evoluzione 2012

Giulio Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata 1, 27100 – PAVIA

E-mail: `giusch04@unipv.it`

Homepage: `http://www-dimat.unipv.it/~giulio/eqev09.html`

Versione del **April 26, 2012**

Contents

1 Alcuni risultati preliminari

1.1 Risultati di compattezza

Lemma 1.1. *Siano $X \subset\subset B \subset Y$ spazi di Banach. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\|x\|_B \le \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|x\|_Y \quad \forall\, x \in X. \tag{1}$$

Proof. Supponiamo per assurdo che, per qualche $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia data $x_n \in X$ tale che

$$\|x_n\|_B > \varepsilon \|x_n\|_X + n \|x_n\|_Y. \tag{2}$$

In particolare, segue che non può essere $x_n = 0$ per alcun $n \in \mathbb{N}$. Posto $v_n := x_n / \|x_n\|_B$, si ha allora

$$1 = \|v_n\|_B > \varepsilon \|v_n\|_X + n \|v_n\|_Y, \tag{3}$$

da cui $v_n \to 0$ in Y e $\{v_n\}$ è limitata in X. Poiché l'immersione di X in B è compatta, possiamo allora estrarre una sottosuccessione v_{n_k} che tende a un certo limite v fortemente in B. Per la (3), v è allora un versore di B. D'altro canto, poiché $B \subset Y$, deve contemporaneamente essere $v = 0$, il che dà l'assurdo. ∎

Teorema 1.2. *Siano $X \subset\subset B \subset Y$ spazi di Banach, con X riflessivo. Allora, per ogni $r \in (1, \infty]$ e per ogni $p \in (1, \infty)$, sussistono le inclusioni compatte*

$$W^{1,r}(0,T;Y) \cap L^\infty(0,T;X) \subset\subset C^0([0,T];B), \tag{4}$$

$$W^{1,r}(0,T;Y) \cap L^p(0,T;X) \subset\subset L^p(0,T;B). \tag{5}$$

Proof. Dimostriamo la (4). Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme limitato di $W^{1,r}(0,T;Y) \cap L^\infty(0,T;X)$. Ricordando il [7, Teorema 1.1], si ha allora che $u \in C_w([0,T];X)$ per ogni $u \in \mathcal{F}$. Inoltre, esiste $K > 0$ tale che

$$\|u(t)\|_X \le K \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, u \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Grazie al Lemma 1.1 (applicato con $\varepsilon/4K$ al posto di ε), otteniamo allora, per ogni $s, t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\|_B &\le \frac{\varepsilon}{4K} \|u(t) - u(s)\|_X + C_\varepsilon \|u(t) - u(s)\|_Y \\
&\le \frac{\varepsilon}{2K} \big(\|u(t)\|_X + \|u(s)\|_X \big) + C_\varepsilon \Big\| \int_s^t u_t(r)\, \mathrm{d}r \Big\|_Y \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon \int_s^t \|u_t(r)\|_Y \, \mathrm{d}r \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon |t - s|^{\frac{r-1}{r}} \|u_t\|_{L^r(s,t;Y)} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon K |t - s|^{\frac{r-1}{r}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Di qui segue facilmente che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|u(t) - u(s)\|_B \leq \varepsilon \quad \forall\, s \in (t-\delta, t+\delta) \cap [0,T]. \tag{8}$$

Dunque, ogni elemento di $\mathcal{F}$ appartiene a $C^0([0,T];B)$. Inoltre, è facile osservare che la scelta di δ è indipendente da u e dipende solo dalle costanti C_ε e K. Quindi $\mathcal{F}$ è equicontinuo rispetto alla norma di B. Dal momento che $\mathcal{F}$ è puntualmente relativamente compatto in B grazie alla (6), otteniamo che $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C^0([0,T];B)$ grazie al teorema di Ascoli.

Per la dimostrazione della (5), si veda il [6, Theorem 8.1, p. 214]. ∎

Osservazione 1.3. In realtà la (5) vale anche per $p = 1$ e/o per $r = 1$, ma la dimostrazione è in questi casi più complicata.

1.2 Complementi di teoria degli operatori monotoni

In tutto il capitolo, porremo $H = L^2(\Omega)$, ove Ω è un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^3$ di frontiera Γ. Alcuni risultati si estenderanno al caso in cui H è un generico spazio di Hilbert.

Teorema 1.4. *Sia $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ convessa, s.c.i. e propria, e sia $a = \partial\phi$. Si ponga*

$$\Phi : L^2(0,T;H) \to (-\infty,+\infty], \qquad \Phi(u) := \int_0^T \phi(u(t))\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Allora Φ è convessa, s.c.i. e propria. Detto inoltre $A = \partial\Phi$ il suo sottodifferenziale (nello spazio $L^2(0,T;H)$), si ha allora che

$$\xi \in Au \iff \xi(t) \in a(u(t)) \ \text{ per quasi ogni } \ t \in (0,T). \tag{10}$$

Proof. Che Φ sia propria è ovvio. Dato che ϕ è convessa, esistono $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che valga la relazione di sopralinearità

$$\phi(v) \geq k_1 + k_2|v| \quad \forall\, v \in H. \tag{11}$$

Di qui si vede facilmente che Φ non può mai assumere il valore $-\infty$. Per dimostrare che Φ è convessa, osserviamo innanzitutto che

$$D(\Phi) = \big\{u \in L^2(0,T;H) : \phi(u) \in L^1(0,T)\big\}. \tag{12}$$

Dunque, se $u_1, u_2 \in D(\Phi)$, si ha in particolare che $u_1(t)$ e $u_2(t)$ giacciono in $D(\phi)$ per quasi ogni $t \in (0,T)$. Siano dunque $u_1, u_2 \in D(\Phi)$ (altrimenti non c'è nulla da dimostrare). Integrando rispetto a t la relazione

$$\phi\big(\theta u_1(t) + (1-\theta)u_2(t)\big) \leq \theta\phi(u_1(t)) + (1-\theta)\phi(u_2(t)), \quad \theta \in [0,1], \tag{13}$$

otteniamo subito la convessità di Φ. Infine, per dimostrare la semicontinuità inferiore di Φ, possiamo supporre direttamente che ϕ sia non negativa. In caso contrario, grazie alla (11), possiamo porre $\phi_1(v) := \phi(v) + C(1 + |v|^2)$, dove C è scelta sufficientemente grande perché ϕ_1 sia non negativa e ragionare dapprima su ϕ_1. La semicontinuità di ϕ segue poi direttamente da quella di ϕ_1.

Sia data una successione $\{u_n\} \subset L^2(0,T;H)$ con

$$u_n \to u \quad \text{(fortemente) in } \ L^2(0,T;H). \tag{14}$$

Se Φ non fosse semicontinua inferiormente, esisterebbe una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che

$$\Phi(u) > \lim_{k\to\infty} \Phi(u_{n_k}) \tag{15}$$

Poiché u_{n_k} tende a u in $L^2(0,T;H)$, essa ammette una sottosuccessione $\{u_{n_{k_h}}\}$ tale che $u_{n_{k_h}}(t)$ tende a $u(t)$ (fortemente) in H per quasi ogni $t \in (0,T)$. Dunque,

$$\phi(u(t)) \leq \liminf_{h\to\infty} \phi\big(u_{n_{k_h}}(t)\big) \quad \text{per quasi ogni } \ t \in (0,T). \tag{16}$$

Integrando in tempo ed applicando il Lemma di Fatou, otteniaamo allora

$$\Phi(u) \leq \liminf_{h\to\infty} \Phi\big(u_{n_{k_h}}\big). \tag{17}$$

Confrontando con la (15), otteniamo evidentemente una contraddizione.

Per dimostrare la (10), sia $\xi \in L^2(0,T;H)$, $\xi(t) \in a(u(t))$ per quasi ogni $t \in (0,T)$. Sia $v \in L^2(0,T;H)$. Allora, q.o. in $(0,T)$, abbiamo

$$(\xi(t), v(t) - u(t)) + \phi(u(t)) \leq \phi(v(t)). \tag{18}$$

Integrando rispetto a t, otteniamo che allora $\xi \in \partial\Phi(u)$. D'altra parte, per la [5, Prop. 3.1], abbiamo che l'operatore definito dal secondo membro della (10) è massimale. ∎

Vediamo ora un'importante estensione della [5, Prop. 2.10]

Lemma 1.5. *Sia $A : H \to 2^H$ un operatore massimale monotono e sia A_λ la sua regolarizzata di Yosida di indice $\lambda > 0$. Supponiamo che, per ogni $\lambda > 0$ sia $\xi_\lambda = A_\lambda u_\lambda$ e che*

$$u_\lambda \to u \quad \text{debolmente in } H, \tag{19}$$

$$\xi_\lambda \to \xi \quad \text{debolmente in } H, \tag{20}$$

$$(\xi, u) \geq \limsup_{\lambda \searrow 0} (\xi_\lambda, u_\lambda). \tag{21}$$

Allora,

$$\xi \in Au \quad e \ (\xi, u) = \lim_{\lambda\searrow 0} (\xi_\lambda, u_\lambda). \tag{22}$$

Proof. Sia $[v;\eta]$ un generico elemento di A. Ho allora

$$(\xi_\lambda - \eta, u_\lambda - v) = (\xi_\lambda - \eta, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) + (\xi_\lambda - \eta, J_\lambda u_\lambda - v) \geq (\xi_\lambda - \eta, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda), \tag{23}$$

in quanto A è monotono e $\xi_\lambda \in AJ_\lambda u_\lambda$. Inoltre, grazie alle (19)-(21), è facile verificare che

$$(\xi - \eta, u - v) \geq \limsup_{\lambda\searrow 0} (\xi_\lambda - \eta, u_\lambda - v). \tag{24}$$

D'altro canto,

$$(\xi_\lambda - \eta, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) = \lambda(\xi_\lambda - \eta, \xi_\lambda) \geq -\lambda(\eta, \xi_\lambda) \to 0. \tag{25}$$

Usando le (24)-(25), la (23) fornisce allora $(\xi - \eta, u - v) \geq 0$, da cui $\xi \in Au$ per la massimalità di A. Dimostriamo infine la seconda parte della (22). Ripetiamo, a questo scopo, la (23) con la scelta di $[v;\eta] = [u;\xi] \in A$. Abbiamo allora

$$(\xi_\lambda, u_\lambda) = (\xi_\lambda - \xi, u_\lambda - u) + (\xi, u_\lambda - u) + (\xi_\lambda, u) \geq (\xi_\lambda - \xi, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda) + (\xi, u_\lambda - u) + (\xi_\lambda, u). \tag{26}$$

Prendendo il $\liminf$ nella relazione qui sopra, otteniamo facilmente che

$$\liminf_{\lambda\searrow 0} (\xi_\lambda, u_\lambda) \leq (\xi, u), \tag{27}$$

che, combinata con la (21), dà la tesi. ∎

Lemma 1.6. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura finita e siano β, j come nel* Teorema 2.3. *Si consideri l'operatore*

$$B : L^2(A) \to 2^{L^2(A)}, \qquad \xi \in Bu \ \Leftrightarrow \ \xi(y) \in \beta(u(y)) \ \text{ per q.o. } y \in A. \tag{28}$$

Sia inoltre

$$\mathcal{J} : L^2(A) \to (-\infty, +\infty], \qquad \mathcal{J}(u) := \int_A j(u(y))\,\mathrm{d}y. \tag{29}$$

Allora B è massimale monotono e $B = \partial\mathcal{J}$ (sottodifferenziale inteso nello spazio $L^2(A)$). Inoltre, dette $\mathcal{J}_\lambda$ la regolarizzata di Moreau-Yosida di $\mathcal{J}$ e B_λ l'approssimata di Yosida di B (entrambe intese rispetto alla struttura Hilbert di $L^2(A)$), si ha che

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \int_A j_\lambda(u(y))\,\mathrm{d}y, \tag{30}$$

dove j_λ è la regolarizzata di Moreau-Yosida di j in $\mathbb{R}$;

$$\xi \in B_\lambda(u) \;\Leftrightarrow\; \xi(y) \in \beta_\lambda(u(y)) \;\; \textit{per q.o. } y \in A. \tag{31}$$

Proof. Ci concentriamo sulla dimostrazione della (30); infatti, le restanti proprietà sono state già dimostrate nel Teorema 1.4. Sia $v \in L^2(A)$. Allora, per q.o. $y \in A$, si ha che

$$j_\lambda(u(y)) \le j(v(y)) + \frac{1}{2\lambda}|v(y) - u(y)|^2. \tag{32}$$

Dapprima integrando in A e quindi passando all'estremo inferiore al variare di v in H, otteniamo che

$$\int_A j_\lambda(u(y))\,\mathrm{d}y \le \mathcal{J}_\lambda(u). \tag{33}$$

Mostriamo ora la disuguaglianza inversa. Sia $u \in L^2(A)$. Allora, per quasi ogni $y \in A$, ricordando il [5, Lemma 2.1], si ha che

$$j_\lambda(u(y)) = \min\Big\{ j(v) + \frac{1}{2\lambda}|v - u(y)|^2 : \; v \in \mathbb{R} \Big\} = j(v_0(y)) + \frac{1}{2\lambda}|v_0(y) - u(y)|^2, \tag{34}$$

dove $v_0(y)$ soddisfa

$$\frac{u(y) - v_0(y)}{\lambda} \in \beta(v_0(y)), \quad \text{ovvero} \;\; u(y) \in v_0(y) + \lambda\beta(v_0(y)). \tag{35}$$

Equivalentemente, $v_0(y) = (\mathrm{Id} + \lambda\beta)^{-1}u(y)$; in particolare, si ha che la funzione $y \mapsto v_0(y)$ è misurabile in A. Più precisamente, osservando che $u \in L^2(A)$, j_λ ha crescita al più quadratica, $j \ge 0$ e $|A| < \infty$, integrando su A la (34) otteniamo che $v_0 - u \in L^2(A)$, da cui $v_0 \in L^2(A)$.

Ricordando la definizione di $\mathcal{J}_\lambda$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(u) &= \min\Big\{ \int_A j(v(y))\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\lambda}\|v - u\|^2_{L^2(A)}, \; v \in L^2(A) \Big\} \\ &\le \int_A j(v_0(y))\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\lambda}\|v_0 - u\|^2_{L^2(A)} = \int_A j_\lambda(u(y))\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{36}$$

da cui la tesi. ∎

1.3 Formule di integrazione per parti

Il prossimo risultato dimostra che, anche nel caso in cui un grafico massimale monotono $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ non è regolare, possiamo ragionare come se fosse una funzione derivabile con derivata non negativa.

Teorema 1.7. *Sia $A : D(A) \to H$ l'operatore definito da*

$$v = Au \Longleftrightarrow v = -\Delta u, \tag{37}$$

con la scelta

$$D(A) := \big\{ u \in H^2(\Omega) : \; \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \text{ su } \Gamma \big\}. \tag{38}$$

Sia β un grafico massimale monotono in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siano $\xi \in H$, $u \in D(A)$ con $\xi \in \beta(u)$ quasi ovunque in Ω. Allora

$$(\xi, Au) \ge 0. \tag{39}$$

Proof. Sia β_λ l'approssimata di Yosida di β. Consideriamo il problema

$$u_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) + Au_\lambda = u + Au + \xi. \tag{40}$$

Poiché l'operatore $\beta_\lambda + A$ è massimale monotono su H e il secondo membro sta in H, tale problema ammette un'unica soluzione $u_\lambda \in H$. Moltiplicando l'equazione per $Au_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda)$ e utilizzando la monotonia e la Lipschitzianità di β_λ si dimostra che

$$\|u_\lambda\|_{H^2(\Omega)} + |\beta_\lambda(u)| \leq c, \tag{41}$$

dove c è indipendente da λ. Di qui segue che, per certe $v, \eta \in H$, si ha che $u_\lambda \to v$ fortemente in H e debolmente in $H^2(\Omega)$, e $\beta_\lambda(u_\lambda) \to \eta$ debolmente in H. Grazie al Lemma 1.5 qui sotto, otteniamo che $\eta \in \beta(u)$ quasi ovunque in Ω. Riscrivendo il problema limite come

$$v - u + \eta - \xi + A(v - u) = 0 \tag{42}$$

e moltiplicando per $v - u$, si vede subito che $u = v$. A questo punto, testiamo (40) per Au_λ. Grazie alla monotonia e alla Lipschitzianità di β_λ, otteniamo

$$(\xi, Au_\lambda) \geq (Au_\lambda, u_\lambda - u) + (Au_\lambda, Au_\lambda - Au) \geq (Au_\lambda, u_\lambda - u) + \frac{1}{2}\big(|Au_\lambda|^2 - |Au|^2\big), \tag{43}$$

da cui prendendo il $\liminf$ e usando un argomento di semicontinuità si ottiene subito la tesi. ∎

Una seconda formula di integrazione per parti riguarda le derivate temporali:

Teorema 1.8. *Sia $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ convessa, s.c.i. e propria e sia $A = \partial\phi$. Siano date*

$$u \in H^1(0, T; H), \qquad \xi \in L^2(0, T; H), \tag{44}$$

tali che, per quasi ogni $t \in (0, T)$, $\xi(t) \in Au(t)$. Allora la funzione $t \mapsto \phi(u(t))$ è assolutamente continua. Inoltre, per ogni $s, t \in (0, T)$, si ha la formula di integrazione per parti

$$\int_s^t \big(\xi(r), u_t(r)\big)\, \mathrm{d}r = \phi(u(t)) - \phi(u(s)). \tag{45}$$

Proof. Cominciamo con l'osservare che, poiché $u \in H^1(0, T; H)$,

$$u(t + h) - u(t) = \int_t^{t+h} u_t(s)\, \mathrm{d}s, \tag{46}$$

da cui, chiaramente,

$$\frac{u(t + h) - u(t)}{h} - u_t(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (u_t(s) - u_t(t))\, \mathrm{d}s, \tag{47}$$

Prendendo la norma in H, segue facilmente che, per quasi ogni $t \in (0, T)$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t + h) - u(t)}{h} = u_t(t) \quad \text{(fortemente) in } H. \tag{48}$$

Precisamente, ciò vale in ogni punto di Lebesgue della funzione $t \mapsto |u_t(t)|$, che appartiene a $L^1(0, T)$ per l'ipotesi (44).

Poniamo ora $\xi_\lambda(t) := A_\lambda(u(t))$, ove A_λ è la regolarizzata Yosida di A. Si ha allora che

$$|\xi_\lambda(t)| \leq |A^0 u(t)| \leq |\xi(t)| \tag{49}$$

quasi ovunque in $(0, T)$. Precisamente, ciò avviene in ogni istante t in cui $u(t) \in D(A)$ e $\xi(t) \in Au(t)$. Inoltre, in tali punti si ha (vedi la [5, Prop. 2.15]) che

$$\xi_\lambda(t) \to A^0(u(t)) \quad \text{(fortemente) in } H. \tag{50}$$

Combinando (49) e (50) ed applicando il teorema di Lebesgue, otteniamo

$$\xi_\lambda \to A^0 u \quad \text{fortemente in } L^2(0,T;H). \tag{51}$$

Detta ϕ_λ l'approssimata di Moreau-Yosida di ϕ, abbiamo evidentemente

$$\phi_\lambda(u(t)) - \phi_\lambda(u(s)) = \int_s^t \big(\xi_\lambda(r), u_t(r)\big)\, \mathrm{d}r. \tag{52}$$

Ricordando che $\phi_\lambda(u(t))$ tende a $\phi(u(t))$ per $\lambda \searrow 0$, possiamo passare al limite nella (52), ottenendo

$$\phi(u(t)) = \phi(u(s)) + \int_s^t \big(A^0 u(r), u_t(r)\big)\, \mathrm{d}r. \tag{53}$$

Poiché l'integranda giace in $L^1(0,T)$ otteniamo allora che $\phi(u) \in AC([0,T])$.

Mostriamo infine la (45). Per definizione di sottodifferenziale abbiamo, per quasi ogni $t \in (0,T)$,

$$\phi(u(t+h)) - \phi(u(t)) \geq \big(\xi(t), u(t+h) - u(t)\big). \tag{54}$$

Supponendo $h > 0$ e dividendo per h, possiamo passare al limite per $h \to 0^+$. Utilizzando l'assoluta continuità di $\phi(u)$ e la (48), otteniamo allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(u(t)) \geq \big(\xi(t), u'(t)\big) \tag{55}$$

per quasi ogni $t \in (0,T)$. La disuguaglianza opposta segue evidentemente considerando $h < 0$ nella (54) e calcolando il limite per $h \to 0^-$. ∎

2 Equazione di Allen-Cahn

In questo capitolo ci occuperemo della seguente equazione

$$u_t - \Delta u + \beta(u) - \ell u = g, \tag{56}$$

dove $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è un grafico massimale monotono e per semplicità supporremo che

$$0 \in \operatorname{int} D(\beta), \qquad 0 \in \beta(0). \tag{57}$$

Notiamo che ci si può sempre ricondurre a tale situazione attraverso una traslazione. Supporremo che $\ell > 0$; f sarà un termine noto la cui regolarità sarà specificata nel seguito.

L'equazione sarà associata a condizioni di Neumann omogenee

$$\partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 \quad \text{su } (0,T) \times \Gamma \tag{58}$$

e alla condizione iniziale

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{59}$$

ove anche la regolarità di u_0 è da specificare.

2.1 Un'impostazione astratta

Cominciamo ad osservare che l'equazione (56) si inquadra molto bene nell'ambito della teoria degli operatori massimali monotoni su spazi di Hilbert. Poniamo infatti $H := L^2(\Omega)$ e $V = H^1(\Omega)$ in modo tale da ottenere la terna Hilbertiana (V, H, V') tramite le consuete identificazioni. Poiché ogni grafico massimale monotono è un sottodifferenziale, esiste allora una funzione convessa, s.c.i. e propria $j : \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ tale che $\beta = \partial j$. Grazie alla (57), abbiamo inoltre che $0 \in D(j)$ e possiamo dunque supporre che sia $j(0) = 0$. Segue allora anche che j è non-negativa. Poniamo allora

$$\Phi : H \to (-\infty, +\infty], \qquad \Phi(u) := \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + j(u)\Big), \tag{60}$$

ove il dominio di Φ è scelto nel modo naturale

$$D(\Phi) := \big\{u \in V : \ j(u) \in L^1(\Omega)\big\}. \tag{61}$$

Detto A il Laplaciano con condizioni di Neumann omogenee, definito in (37), introduciamo il nuovo operatore

$$\mathcal{A} : H \to 2^H, \qquad \mathcal{A}(u) = Au + \beta(u), \tag{62}$$

di dominio

$$D(\mathcal{A}) := \big\{u \in D(A) : \ \exists \xi \in H : \ \xi \in \beta(u) \text{ quasi ovunque in } \Omega\big\}. \tag{63}$$

Abbiamo allora il

Teorema 2.1. *La funzione Φ è convessa, semicontinua inferiormente e propria su H. Inoltre, il suo sottodifferenziale (che è dunque un operatore massimale monotono grazie alla teoria generale) coincide con l'operatore $\mathcal{A}$ definito in* (62).

Proof. Dato $r \in D(j)$, la funzione $u(x) \equiv r$ sta evidentemente in $D(\Phi)$; dunque Φ è propria. È immediato verificare che Φ è convessa. Per dimostrare che Φ è s.c.i., sia $\{u_n\} \subset H$ con $u_n \to u$ in H. Osserviamo che non è limitativo supporre che esista $c > 0$ tale che $\Phi(u_n) \le c$ per ogni n. Segue allora, in particolare, che $\{u_n\}$ è limitata in V. Per compattezza debole si ha allora che (tutta la successione) u_n tende a u debolmente in V. Dunque, per semicontinuità,

$$|\nabla u|^2 \le \liminf_{n \nearrow \infty} |\nabla u_n|^2. \tag{64}$$

Mostriamo ora che

$$\int_\Omega j(u) \le \liminf_{n \nearrow \infty} \int_\Omega j(u_n). \tag{65}$$

Se cosí non fosse, esisterebbe almeno una sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che

$$\int_\Omega j(u) > \lim_{k \nearrow \infty} \int_\Omega j(u_{n_k}). \tag{66}$$

Dato che $\{u_n\}$ è limitata in V, possiamo estrarre una sottosuccessione n_{k_h} tale che $u_{n_{k_h}}$ tende a u quasi ovunque. Poiché j è s.c.i., deduciamo allora che, per quasi ogni $x \in \Omega$,

$$j(u(x)) \le \liminf_{h \nearrow \infty} j(u_{n_{k_h}}(x))$$

Applicando il Lemma di Fatou, otteniamo allora

$$\int_\Omega j(u) \le \liminf_{k \nearrow \infty} \int_\Omega j(u_{n_{k_h}}), \tag{67}$$

il che, confrontando con la (66), dà l'assurdo. Combinando (64) e (65), otteniamo che Φ è semicontinua inferiormente.

Mostriamo ora che $\mathcal{A} \subset \partial\Phi$ (sottodifferenziale inteso in H, ovviamente). Sia dunque $u \in D(\mathcal{A})$ e $w \in \mathcal{A}(u)$. Ciò equivale a dire che $w = Au + \xi$ dove $\xi \in H$ e $\xi \in \beta(u)$ q.o. in Ω. Dato $v \in D(\Phi)$, abbiamo allora

$$(w, v - u) = \int_\Omega (Au + \xi)(v - u) = \int_\Omega Au(v - u) + \int_\Omega \xi(v - u) \tag{68}$$

Ora, grazie al fatto che $u \in D(A)$ e $v \in V$, è evidente che

$$\int_\Omega Au(v - u) = \int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) \le \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2. \tag{69}$$

D'altro canto, quasi ovunque in Ω si ha

$$\xi(x)(v(x) - u(x)) \le j(v(x)) - j(u(x)). \tag{70}$$

Dunque, integrando in x la (70) e ricordando la (69), segue che $\mathcal{A} \subset \partial\Phi$. Dimostriamo, infine, che $\mathcal{A}$ è massimale (da cui, necessariamente, $\mathcal{A} = \partial\Phi$).

Per il Lemma 2.2 qui sotto, per ogni $\lambda > 0$ la somma $A + \beta_\lambda$ è massimale. Dunque, per ogni $f \in H$ e per ogni $\lambda > 0$, esiste $u_\lambda \in D(A)$ tale che

$$u_\lambda + Au_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f \tag{71}$$

(in altre parole, u_λ risolve il problema $(I + A + \beta_\lambda)(u_\lambda) \ni f$). Moltiplicando per $\beta_\lambda(u_\lambda)$, otteniamo in modo standard che

$$|\beta_\lambda(u_\lambda)| + \|u_\lambda\|_{H^2(\Omega)} \leq c. \tag{72}$$

Da qui, abbiamo che, almeno per una sottosuccessione (che per semplicità continuiamo a chiamare u_λ),

$$u_\lambda \to u \quad \text{debolmente in } H^2(\Omega) \ \text{ e fortemente in } H, \tag{73}$$

$$\beta_\lambda(u_\lambda) \to \xi \quad \text{debolmente in } H. \tag{74}$$

Utilizzando il Lemma 1.5, abbiamo allora che $\xi \in \beta(u)$ quasi ovunque in Ω, da cui u è una soluzione di $(I + \mathcal{A})(u) \ni f$, ovvero $\mathcal{A}$ è massimale. ∎

Lemma 2.2. *Siano $A, B : H \to 2^H$ operatori massimali monotoni e supponiamo che B sia Lipschitziano (e dunque, in particolare, univoco e definito su tutto H). Allora, $A + B$ è massimale monotono.*

Proof. Non è limitativo supporre che la constante di Lipschitz Λ dell'operatore B sia strettamente minore di 1. Che $A + B$ sia monotono (di dominio $D(A + B) = D(A)$) è immediato da verificare. Per dimostrarne la massimalità, per ogni $f \in H$ devo trovare una soluzione $u \in H$ di

$$u + Au + Bu \ni f. \tag{75}$$

Detto $J_1 = (I + A)^{-1}$ il risolvente di A di indice 1, il problema (75) si riscrive equivalentemente come

$$u = \mathcal{T}(u), \qquad \mathcal{T}(u) := J_1(f - Bu) \tag{76}$$

ed è immediato verificare che $\mathcal{T}$ è una contrazione su H, e pertanto ammette un (unico) punto fisso. ∎

2.2 Soluzioni deboli

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la (56) ammette un'interpretazione naturale come equazione di evoluzione associata ad un operatore massimale monotono. Infatti, grazie al Teorema 2.1, essa si può riscrivere nella forma

$$u_t + \mathcal{A}u - \ell u \ni g \tag{77}$$

e l'esistenza di una soluzione potrebbe essere dedotta da un teorema astratto valido per un generico operatore monotono massimale $\mathcal{A}$ definito su un qualunque spazio di Hilbert H. Ci pare tuttavia più didattico procedere in modo "concreto", utilizzando la forma esplicita del nostro operatore $\mathcal{A}$ e risolvendo la (56) attraverso un procedimento di approssimazione "diretto". In questo modo, possiamo infatti ottenere un maggior numero di proprietà "esplicite" della soluzione.

Dal momento che in cui β coincide con una funzione regolare definita su tutto $\mathbb{R}$ è stato già trattato in [7], ci limitiamo ora a considerare la situazione in cui β è un operatore massimale monotono il cui dominio $D(\beta)$ è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Ora, il [7, Teorema 1.7] ci dice che, se

$$u_0 \in D(A), \qquad g \in L^2(0, T; V), \tag{78}$$

ove $D(A)$ è dato dalla (38), e inoltre

$$f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \tag{79}$$

allora esiste una e una sola soluzione u dell'equazione

$$u_t + Au + f(u) = g. \tag{80}$$

Inoltre, u ha la regolarità

$$u \in H^1(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{81}$$

Ad essere precisi, il [7, Teorema 1.7] è stato enunciato nel caso di condizioni di Dirichlet e supponendo $g \in V$ indipendente dal tempo. Tuttavia, esso vale anche per condizioni di Neumann (omogenee) e nell'ipotesi (78) su g (si raccomanda di verificare questo fatto per esercizio). Utilizzeremo questo risultato come punto di partenza. Osserviamo anche che un confronto dei termini dell'equazione ci permette di vedere che u soddisfa la regolarità ulteriore

$$Au \in L^2(0,T;V), \tag{82}$$

da cui, grazie a risultati standard di regolarità ellittica,

$$u \in L^2(0,T;H^3(\Omega)). \tag{83}$$

Le precedenti osservazioni ci serviranno come punto di partenza nella dimostrazione del seguente

Teorema 2.3. *Sia $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un grafico massimale monotono soddisfacente la* (57)*. Supponiamo inoltre che $D(\beta)$ sia un intervallo limitato (a,b). Sia inoltre*

$$u_0 \in V, \qquad j(u_0) \in L^1(\Omega), \tag{84}$$

$$g \in L^2(0,T;H). \tag{85}$$

dove $\beta = \partial j$ e $j(0) = 0$. Allora esiste una e una sola coppia (u,ξ), con

$$u \in H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{86}$$

$$\xi \in L^2(0,T;H), \tag{87}$$

tale che valgano le relazioni

$$u_t + Au + \xi - \ell u = g, \quad \text{in } H, \quad \text{q.o. in } (0,T), \tag{88}$$

$$\xi \in \beta(u), \quad \text{q.o. in } (0,T) \times \Omega, \tag{89}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{90}$$

Proof. Iniziamo col costruire, per ogni $\lambda \in (0,1)$, una soluzione approssimata u_λ. A questo scopo, vogliamo applicare il [7, Teorema 1.7] con la scelta di $f(u) = \beta_\lambda(u) - \ell u$, ove β_λ è l'approssimata di Yosida di β.

Per fare questo, dobbiamo però anche regolarizzmare i dati u_0 e g, affinché sia verificata la (78). Per quanto riguarda g, è immediato determinare una famiglia $\{g_\lambda\} \subset L^2(0,T;V)$ che converge a g in $L^2(0,T;H)$. Per quanto riguarda u_0, costruiamo $u_{0,\lambda}$ come al solito attraverso una perturbazione singolare:

$$u_{0,\lambda} + \lambda A u_{0,\lambda} = u_0. \tag{91}$$

Già sappiamo che $\{u_{0,\lambda}\} \subset D(A)$ e che $\|u_{0,\lambda}\|_V \le \|u_0\|_V$ per ogni λ. Testando la (91) per $\beta_\lambda(u_{0,\lambda})$ ed applicando la definizione di sottodifferenziale, possiamo inoltre osservare che

$$\int_\Omega j_\lambda(u_{0,\lambda}) \le \int_\Omega j_\lambda(u_0) \le \int_\Omega j(u_0), \tag{92}$$

ove $j'_\lambda = \beta_\lambda$.

Possiamo ora dimostrare che la famiglia $\{u_\lambda\}$ delle soluzioni approssimate ammette almeno una sottosuccessione convergente. Per far questo, testiamo l'equazione approssimata

$$u_{\lambda,t} + Au_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) - \ell u_\lambda = g_\lambda \tag{93}$$

per $u_{\lambda,t}$ e quindi per Au_λ (**i dettagli delle stime sono per il momento lasciati al lettore**). Occorre osservare che, almeno per λ sufficientemente piccolo si ha che

$$j_\lambda(r) \geq \ell r^2 - c \tag{94}$$

(per vedere questo si stima esplicitamente dall'alto il risolvente utilizzando il fatto che $D(\beta) = (a, b)$).

Come esito delle stime, otteniamo le seguenti relazioni di convergenza (che valgono, come di consueto, per opportune sottosuccessioni della $\{u_\lambda\}$, che non vengono rinominate onde non appesantire la notazione):

$$u_\lambda \to u \quad \text{debolmente in } \ H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{95}$$

$$\beta_\lambda(u_\lambda) \to \xi \quad \text{debolmente in } \ L^2(0,T;H). \tag{96}$$

Grazie al Teorema di Aubin-Lions (formula (5)), otteniamo allora che

$$u_\lambda \to u \quad \text{fortemente in } \ L^2(0,T;V). \tag{97}$$

Combinando (97) con (96) e utilizzando il Lemma 1.5 nello spazio $L^2(0,T;H)$, otteniamo allora la (89). Si noti che qui è stato essenziale usare la proprietà di estensione data dal Lemma 1.6, applicato con $A = (0,T) \times \Omega$.

Per concludere, dimostriamo l'unicità, che si ottiene con un procedimento standard. Siano infatti (u_1, ξ_1) e (u_2, ξ_2) due soluzioni aventi lo stesso dato iniziale. Scrivendo la (88) per la prima e per la seconda soluzione, e quindi prendendo la differenza delle relazioni ottenute, arriviamo a

$$u_t + Au + \xi - \ell u = 0, \tag{98}$$

ove si è posto $(u, \xi) := (u_1, \xi_1) - (u_2, \xi_2)$. Moltiplicando la (98) per u ed usando la monotonia di β, grazie al lemma di Gronwall otteniamo facilmente che $u = 0$, ovvero $u_1 = u_2$. Per confronto nella (98) abbiamo allora immediatamente anche $\xi = 0$, ovvero $\xi_1 = \xi_2$. ∎

2.3 Soluzioni forti

Teorema 2.4 (ulteriore regolarità). *Supponiamo che valgano le ipotesi del* Teorema 2.3 *e sia, inoltre,*

$$g \in H^1(0,T;H). \tag{99}$$

Allora la soluzione fornita dal Teorema 2.3 *verifica le ulteriori proprietà*

$$u \in W^{1,\infty}(\tau,T;H) \cap H^1(\tau,T;V) \cap L^\infty(\tau,T;H^2(\Omega)), \tag{100}$$

$$\xi \in L^\infty(\tau,T;H), \tag{101}$$

per ogni $\tau \in (0,T)$.

Proof. Per ottenere le (100)-(101), differenziamo l'equazione (93) rispetto al tempo, ottenendo

$$u_{\lambda,tt} + Au_{\lambda,t} + \beta'_\lambda(u_\lambda)u_{\lambda,t} - \ell u_{\lambda,t} = g_{\lambda,t}. \tag{102}$$

Osserviamo che, apparentemente, questo è solo un conto formale (in altre parole, a priori non è detto che la procedura sia lecita). Tuttavia, supponendo che la successione approssimante $g_{\lambda,t}$ sia limitata in $L^2(0,T;H)$ (cosa che è senz'altro vera se g_λ è costruita a partire da g tramite perturbazione singolare) ed osservando che β_λ è Lipschitz (dunque, $\beta'_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$), abbiamo allora che

$$\beta'_\lambda(u_\lambda)u_{\lambda,t},\ \ell u_{\lambda,t},\ g_{\lambda,t} \in L^2(0,T;H). \tag{103}$$

Notiamo inoltre che A può essere visto come un operatore lineare e continuo da V a V'. Dunque, dato che u soddisfa la (81), otteniamo

$$Au_{\lambda,t} \in L^2(0,T;V'), \tag{104}$$

da cui, per confronto, la derivata seconda $u_{\lambda,tt}$ (che comunque esiste nel senso delle distribuzioni) verifica

$$u_{\lambda,tt} \in L^2(0,T;V') \tag{105}$$

e quindi la (102) ha senso almeno nello stesso spazio $L^2(0,T;V')$. Testando la (102) per $u_{\lambda,t}$, utilizzando il fatto che $\beta'_\lambda \geq 0$, otteniamo allora, almeno formalmente,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{\lambda,t}|^2 + |\nabla u_{\lambda,t}|^2 \leq c\big(|g_{\lambda,t}|^2 + |u_{\lambda,t}|^2\big). \tag{106}$$

In realtà questa stima è rigorosa (e non solo formale) come si potrebbe vedere con un procedimento simile ad altri che tratteremo in seguito (dunque in questo caso omettiamo i dettagli).

Ora, non siamo in grado di integrare la (106) su tutto $(0,T)$, poiché non conosciamo la regolarità di $u_{\lambda,t}$ al tempo $t = 0$. Dunque, moltiplichiamo prima per t, ottenendo facilmente

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t|u_{\lambda,t}|^2\big) + t|\nabla u_{\lambda,t}|^2 \leq c(1+t)\big(|g_{\lambda,t}|^2 + |u_{\lambda,t}|^2\big). \tag{107}$$

A questo punto, integrando su $(0,T)$ (e ricordando la (95)) otteniamo che

$$t^{1/2}u_t \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \tag{108}$$

da cui le prime due relazioni in (100). Le restanti stime di regolarità seguono interpretando l'equazione (93) come un problema ellittico contenente un termine monotono e regolare. ∎

Osservazione 2.5. Vale la pena osservare che se il dato iniziale è più regolare, allora le (100)-(101) valgono anche per $\tau = 0$. Per essere precisi, la regolarità richiesta corrisponde a chiedere che $u_t(0) \in H$ (vedi la (106)). Dal momento che non ha senso chiedere per un problema del primo ordine una condizione sulla derivata temporale, tale proprietà va interpretata per confronto nell'equazione. Anche se questa non è una dimostrazione rigorosa, ma solo una giustificazione intuitiva, si vede allora che avere $u_t(0) \in H$ corrisponde a chiedere che $Au_0 + \beta(u_0) \in H$, ovvero che u_0 sia nel dominio dell'operatore (massimale monotono su H) $\mathcal{A} = A + \beta$.

2.4 Ulteriori proprietà delle soluzioni

Concludiamo lo studio della (56) dimostrando alcune proprietà notevoli della soluzione.

Teorema 2.6 (uguaglianza dell'energia). *Sia (u,ξ) la soluzione debole dell'equazione di Allen-Cahn nelle ipotesi del* Teorema 2.3. *Supponiamo inoltre che $g \in H$ sia indipendente dal tempo (ovvero che l'equazione sia autonoma). Definendo il* funzionale energia *associato alla* (56) *come*

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega \Big(j(u)) - \frac{\ell}{2}u^2 - gu\Big), \tag{109}$$

*abbiamo allora che per ogni $s,t \in [0,T]$ vale l'*uguaglianza dell'energia

$$\mathcal{E}(u(t)) + \int_s^t |u_t(r)|^2 \,\mathrm{d}r = \mathcal{E}(u(s)). \tag{110}$$

Proof. È sufficiente testare l'equazione per u_t ed applicare il Teorema 1.8 e i risultati di [4]. ∎

Osservazione 2.7. Se si prova a dimostrare la (110) lavorando sull'equazione approssimata (93) e quindi passando al limite, ci si accorge che il procedimento *non funziona*, almeno nel quadro di regolarità proprio delle soluzioni deboli. Si ottiene infatti al massimo una disuguaglianza. Provare a verificare questo fatto per esercizio. Si noti inoltre che la (110) equivale alla continuità del funzionale energia associato all'equazione di Allen-Cahn.

Il prossimo risultato riguarda il comportamento delle soluzioni della (56) per $t \nearrow \infty$. Se ci limitiamo al caso autonomo (ovvero supponiamo $g \in H$ indipendente dal tempo), allora, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, queste possono essere viste come traiettorie di un sistema dinamico che evolve in un appropriato *spazio delle fasi*, che contiene le configurazioni "fisicamente ammissibili". Contrariamente al caso delle equazioni ordinarie, qui lo spazio delle fasi non coincide con $\mathbb{R}^n$ o un suo sottoinsieme, ma è uno spazio di dimensione infinita e precisamente coincide con l'insieme

$$\mathcal{X} := \{u \in V : j(u) \in L^1(\Omega)\}$$

delle configurazioni aventi *energia finita*. Si noti che, grazie alla (110), se $u_0 \in \mathcal{X}$, allora $u(t) \in \mathcal{X}$ per *tutti* i tempi $t \geq 0$.

In base a questa approssimazione, ha senso chiedersi quale sia il comportamento delle soluzioni-traiettorie quando la variabile tempo tende a $+\infty$. Il prossimo teorema (del quale potrebbe essere data anche una versione astratta, valida per una classe più ampia di equazioni) mostra che, come nel caso delle equazioni ordinarie, i punti limite delle traiettorie sono soluzioni del *problema stazionario* associato all'equazione (56).

Teorema 2.8 (ω-limite). *Sia (u, ξ) la soluzione debole dell'equazione di Allen-Cahn nelle ipotesi del* Teorema 2.3. *Supponiamo inoltre che $g \in H$ sia indipendente dal tempo. Allora, per ogni $\tau > 0$, l'insieme $\{u(t),\ t \in (\tau, +\infty)\}$ è relativamente compatto in V. Data inoltre una qualunque successione divergente $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ tale che $u(t_n) \to u_\infty$ per $n \to \infty$ e per qualche $u_\infty \in V$, si ha allora che u_∞ è una soluzione del* problema stazionario

$$Au + \beta(u) - \ell u \ni g. \tag{111}$$

Proof. Si noti innanzitutto che la tesi coincide di due parti. La prima di queste afferma che ogni traiettoria data da una soluzione debole è precompatta rispetto alla topologia forte di V (e dunque ammette almeno una sottosuccessione convergente in tale topologia). La seconda, ben più "corposa" afferma che *ogni* punto limite della traiettoria risolve il problema stazionario (111). Si noti che tale proprietà è particolarmente rilevante alla luce del fatto che il problema (111) ammette, in generale, infinite soluzioni (anche se questo fatto non è semplice da verificare).

Come prima osservazione fondamentale, osserviamo che, scrivendo la (110) per $s = 0$ e t generico, e quindi passando all'estremo superiore per $t \in (0, +\infty)$, otteniamo che

$$\|\mathcal{E}(u)\|_{L^\infty(0,+\infty)} + \int_0^{+\infty} |u_t(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq c, \tag{112}$$

dove c è una costante che dipende solo dall'"energia iniziale" $\mathcal{E}(u_0)$. L'integrale a primo membro si chiama "integrale di dissipazione" associato all'equazione e rappresenta l'energia dissipata dal sistema nel corso dell'intera evoluzione temporale. Ci occorre ora una stima di regolarità. Per ottenere questa, possiamo procedere lungo le linee del Teorema 2.4. Dal momento che g non dipende dal tempo, osserviamo che il termine $g_{\lambda,t}$ non compare nella (106). Integrando tale relazione tra $\tau > 0$ e $+\infty$, ricordando la (112), e prendendo il limite per $\lambda \searrow 0$, otteniamo allora che

$$\|u_t\|_{L^\infty(\tau,+\infty;H)} + \|u\|_{L^\infty(\tau,+\infty;H^2(\Omega))} \leq c, \tag{113}$$

dove c in generale esplode per $\tau \searrow 0$ (e precisamente lo fa con velocità $\tau^{-1/2}$ se u_0 appartiene solo a $\mathcal{X}$). Si noti che la seconda delle (113) è ottenuta dalla prima interpretando l'equazione (88) come un problema ellittico con dato dipendente dal tempo, esattamente come nel Teorema 2.4. Dalla (113) otteniamo che la traiettoria $\{u(t)\}$, per $t \geq \tau > 0$ è limitata in $H^2(\Omega)$ e dunque relativamente compatta in V; dunque abbiamo la prima parte della tesi.

Dimostriamo ora che ogni punto limite è soluzione del problema stazionario (111). Sia dunque data $\{t_n\}$ divergente tale che $u(t_n)$ tende a un certo limite u_∞. Si noti che, necessariamente, tale limite è assunto fortemente in V e debolmente in $H^2(\Omega)$ grazie alla proprietà di precompattezza dimostrata poco sopra. Consideriamo allora la famiglia di equazioni di evoluzione

$$u_{n,t} + Au_n + \xi_n - \ell u_n = g, \quad \text{in } H, \quad \text{q.o. in } (0,1), \tag{114}$$

$$\xi_n \in \beta(u_n), \quad \text{q.o. in } (0,1) \times \Omega, \tag{115}$$

$$u_n|_{t=0} = u(t_n), \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{116}$$

È evidente che la funzione $u_n(t) := u(t + t_n)$, $t \in (0, 1)$, è l'*unica* soluzione di (114)-(116). Inoltre, grazie alla (113), otteniamo

$$\|u_{n,t}\|_{L^\infty(0,1;H)} + \|u_n\|_{L^\infty(0,1;H^2(\Omega))} \le c, \tag{117}$$

dove c è indipendente da n. Per confronto, abbiamo allora anche

$$\|\xi_n\|_{L^\infty(0,1;H)} \le c. \tag{118}$$

Infine la (112) ci fornisce la proprietà chiave:

$$u_{n,t} \to 0 \quad \text{fortemente in } \; L^2(0, 1; H). \tag{119}$$

Di qui non è difficile vedere che u_n converge a una funzione u indipendente dal tempo (grazie alla (119)), che risolve il problema stazionario (111) (grazie alle (117), (118)) e alla [5, Prop. 2.10]). Questo conclude la dimostrazione. ∎

References

[1] V. Barbu, "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces", Noordhoff, Leyden, 1976.

[2] H. Brézis, "Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert", North-Holland Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] H. Brézis, "Analisi Funzionale", Liguori Editore, 1986.

[4] G. Gilardi, Dispensa "Equazioni Paraboliche Astratte - Impostazione Variazionale", Università degli Studi di Pavia.

[5] G.A. Pozzi, Dispensa "Appunti per il Corso di Analisi Funzionale (A.A. 2002-03)", Università degli Studi di Pavia.

[6] J.C. Robinson, "Infinite-dimensional Dynamical Systems", Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2001.

[7] G. Schimperna, Dispensa "Equazioni di Evoluzione (A.A. 2009-10)", Università degli Studi di Pavia.

[8] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **146** (1987), 65–96.