

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Equazioni di Evoluzione

Giulio Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata 1, 27100 – PAVIA

E-mail: `giusch04@unipv.it`

Homepage: <http://www-dimat.unipv.it/~giulio/eqev09.html>

Versione del **June 4, 2010**

Contents

1	Due equazioni non lineari	2
1.1	Spazi funzionali. Funzioni a valori vettoriali	2
1.2	L'equazione di Allen-Cahn	2
1.3	L'equazione delle onde semilineare con smorzamento	10
2	Sistemi dinamici astratti	15
3	Attrattori globali ed esponenziali	15
3.1	Attrattore globale per l'equazione di Allen-Cahn	15
3.2	Attrattore globale per l'equazione delle onde semilineare con smorzamento	19
4	Attrattori di sistemi dipendenti da un parametro e semicontinuità superiore	22

1 Due equazioni non lineari

1.1 Spazi funzionali. Funzioni a valori vettoriali

Sia V uno spazio di Banach. Diciamo che $u \in C_w([0, T]; V)$ quando u è continua da $[0, T]$ in V munito della topologia debole, ovvero

$$\forall \phi \in V', \quad t \mapsto \langle \phi, v(t) \rangle \quad \text{è continua.} \quad (1)$$

Abbiamo il

Teorema 1.1. *Siano V e H spazi di Hilbert, con $V \subset H$ con immersione compatta e densa. Allora, per ogni $r \in [1, +\infty]$, vale l'inclusione*

$$W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \subset C_w([0, T]; V). \quad (2)$$

PROOF. Notiamo innanzitutto che, dato che stiamo parlando di classi di equivalenza di funzioni, la tesi si può enunciare più precisamente dicendo che ogni elemento di $W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ ammette un rappresentante che sta in $C_w([0, T]; V)$.

Ciò detto, dimostriamo il teorema nel caso $r > 1$. Sia $u \in W^{1,r}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$. Allora, per il teorema di Aubin-Lions, $u \in C([0, T]; H)$ (più precisamente, u ammette un rappresentante che sta in $C([0, T]; H)$).

Mostriamo che tale rappresentante u sta anche in $C_w([0, T]; V)$. Per vedere questo è sufficiente mostrare che, per ogni $t \in [0, T]$ e ogni successione $\{t_n\} \subset [0, T]$ con $t_n \rightarrow t$, si ha che $u(t_n) \rightarrow u(t)$ debolmente in V . Dal momento che $u \in L^\infty(0, T; V)$, esiste un'altra successione $\{s_n\} \subset [0, T]$ tale che, per esempio,

$$|s_n - t_n| < \frac{1}{n}, \quad \|u(s_n)\|_V \leq C, \quad (3)$$

dove C , che è indipendente da n , non è altro che la norma di u in $L^\infty(0, T; V)$. La seconda condizione implica che esiste una sottosuccessione $u(s_{n_k})$ che ammette un limite debole in V . Tale limite deve peraltro coincidere con $u(t)$ per l'esistenza del limite in H . Dunque, $u(t) \in V$. Ciò dimostra in particolare che, per tale rappresentante u , si ha che $\|u(t)\|_V \leq C$ per **ogni** $t \in [0, T]$.

A questo punto, suppongo per assurdo che $u(t_n)$ non tenda a $u(t)$ debolmente in V . Ma allora esisterebbero una sottosuccessione $u(t_{n_k})$ e un intorno U di $u(t)$ nella topologia debole di V tale che $u(t_{n_k})$ non sta mai in U . Tuttavia, poiché $u(t_{n_k})$ è limitata in V , essa ammette una sottosuccessione debolmente convergente in V . Come prima, tale limite deve coincidere con $u(t)$, il che dà l'assurdo. ■

1.2 L'equazione di Allen-Cahn

In questa sezione ci occuperemo della seguente equazione non lineare (e, precisamente, semilineare), detta di *Allen-Cahn* o di *Ginzburg-Landau*:

$$u_t - \Delta u + f(u) = g. \quad (4)$$

L'equazione è simile all'equazione del calore, ma contiene il termine non lineare $f(u)$, sul quale supporremo sempre le seguenti ipotesi:

$$f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad (5)$$

la seconda delle quali è assunta per pura comodità di calcolo (e non è limitativa, dato che ci si può sempre ricondurre ad essa tramite una traslazione).

L'equazione (12) verrà studiata in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il quale sarà sempre supposto sufficientemente regolare. La scelta di un dominio tridimensionale è dettata dal significato "fisico" dell'equazione, che descrive vari tipi di processi meccanici o termodinamici.

Come per l'equazione del calore, per avere un problema ben posto occorre aggiungere condizioni al bordo. Considereremo solo il caso più semplice, dato dalla condizione di Dirichlet omogenea

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Inoltre, si deve aggiungere la condizione iniziale

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (7)$$

Il nostro primo obiettivo sarà studiare la buona positura del problema dato dall'equazione (12) e dalle condizioni (6)-(7). In particolare, occorrerà individuare un quadro funzionale opportuno in cui provare a dimostrare l'esistenza della soluzione. In effetti, vedremo che diverse possibilità sono ammissibili, essenzialmente in dipendenza dalla regolarità del dato iniziale u_0 e della sorgente g .

Il nostro primo risultato riguarda l'esistenza *locale in tempo* di una soluzione "forte". A questo fine, occorre specificare gli spazi funzionali che entrano in gioco nello studio dell'equazione. Poniamo, innanzitutto, $H := L^2(\Omega)$ e $V := H_0^1(\Omega)$. Indicheremo la norma e il prodotto scalare di H semplicemente con $\|\cdot\|$ e (\cdot, \cdot) . Grazie alla disuguaglianza di Poincaré, lo spazio V può essere dotato della norma $\|\cdot\|_V := \|\nabla \cdot\|$. Ricordiamo che, identificando H col suo duale topologico H' , H può essere visto come un sottospazio chiuso di V' . Si ha, cioè, la *terna hilbertiana* $V \subset H \subset V'$, ove le inclusioni sono continue e, per risultati generali di densità in spazi di Sobolev, dense. Poniamo, inoltre, $W := H^2(\Omega) \cap V$ e ricordiamo che $-\Delta$ può essere visto come un operatore lineare non limitato sullo spazio H avente dominio W . Denomineremo A tale operatore. Abbiamo, cioè,

$$(Av, w) = - \int_{\Omega} w \Delta v \, dx \quad (8)$$

per ogni coppia di funzioni $v, w \in H$ tali che $v \in D(A) = W$.

Possiamo ora enunciare il teorema.

Teorema 1.2. *Supponiamo che valga (5). Inoltre, assumiamo*

$$u_0 \in W, \quad (9)$$

$$g \in V. \quad (10)$$

Allora esistono un tempo $T_0 > 0$ sufficientemente piccolo ed una funzione u avente la regolarità

$$u \in H^1(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; W) \quad (11)$$

per $T = T_0$, tali che l'equazione valga nella forma

$$u_t + Au + f(u) = g \quad \text{in } H, \quad (12)$$

per quasi ogni tempo in $(0, T_0)$, e la condizione iniziale (7) sia soddisfatta q.o. in Ω .

Osservazione 1.3. Si noti che la condizione di Dirichlet (6) è implicita nella regolarità (11). La possibilità di dare senso alla condizione iniziale segue invece dal fatto che la (11) implica in particolare che $u \in C^0([0, T_0]; V)$ grazie al Teorema di Aubin-Lions.

Osservazione 1.4. Cercare una soluzione locale in tempo è anche, ma non solo, un fatto tecnico. Come per le equazioni differenziali ordinarie, in effetti, la possibile crescita superlineare di f può causare l'esplosione in tempi finiti della soluzione.

PROOF. È possibile dimostrare il teorema in vari modi. Ci pare didattico procedere attraverso un argomento di punto fisso di tipo contrattivo. Poiché $u_0 \in W$ è un dato, possiamo scegliere $R > 0$ tale che $\|u_0\|_W \leq R/2$. Definiamo allora lo spazio

$$\mathcal{X} := \{v \in L^\infty(0, T_0; W) : \|v\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq R\}, \quad (13)$$

ove T_0 sarà scelto alla fine del procedimento. Si osservi che, grazie alla continuità dell'immersione di Sobolev $W \subset C(\bar{\Omega})$, gli elementi di \mathcal{X} sono funzioni uniformemente limitate. Per applicare il Teorema delle contrazioni occorre munire \mathcal{X} di una metrica opportuna. Piuttosto che la norma di $L^\infty(0, T_0; W)$, che parrebbe la scelta naturale, è conveniente scegliere una metrica più debole, ad esempio quella di $L^2(0, T_0, H)$. Il motivo è che è più facile dimostrare la contrattività rispetto a norme più deboli. Inoltre, \mathcal{X} resta uno spazio completo anche rispetto alla norma di $L^2(0, T_0, H)$. Sia infatti data una successione $\{v_n\} \subset \mathcal{X}$ di Cauchy in $L^2(0, T_0, H)$. Allora, grazie alla completezza di $L^2(0, T_0, H)$, essa converge a una certa v rispetto alla norma scelta. Dal momento che $\{v_n\}$ è anche limitata rispetto alla norma di $L^\infty(0, T_0; W)$, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ che tende debolmente star in $L^\infty(0, T_0; W)$ a una funzione che, per unicità del limite, deve coincidere con v . Si ha allora che $v \in L^\infty(0, T_0; W)$; inoltre,

$$\|v\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq \liminf_{k \nearrow \infty} \|v_{n_k}\|_{L^\infty(0, T_0; W)} \leq R, \quad (14)$$

grazie alla semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole star. Da qui segue $v \in \mathcal{X}$.

Per applicare il metodo di punto fisso, prendiamo una funzione $\bar{u} \in \mathcal{X}$ e definiamo u come la soluzione (unica) del problema lineare

$$u_t + Au = g - f(\bar{u}), \quad (15)$$

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (16)$$

Tale soluzione esiste grazie alla teoria lineare, dato che il secondo membro di (15) è ora una funzione nota.

Osservazione 1.5. Sorvoliamo su quale sia la regolarità ottimale della soluzione u . In parte questo sarà chiarito dalle stime che seguiranno.

Definiamo ora la mappa $\mathcal{T} : \bar{u} \mapsto u$. Al fine di poter applicare il Teorema delle contrazioni dobbiamo dimostrare che essa ha immagine in \mathcal{X} e che è, appunto, una contrazione. Cominciamo dalla prima verifica. Moltiplichiamo (rispetto al prodotto scalare di H) l'equazione per $u + Au_t$ (occorrerebbe verificare che tale moltiplicazione è ammissibile, ma sorvoliamo anche su questo punto). Integrando per parti, otteniamo (per quasi ogni valore della variabile tempo)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \|Au\|^2) + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 = (g - f(\bar{u}), u) + (\nabla g - f'(\bar{u})\nabla \bar{u}, \nabla u_t). \quad (17)$$

e dobbiamo fornire una stima del secondo membro. Ci occupiamo solo del secondo termine, che è più complicato (il primo termine si stima in modo simile, utilizzando in più la disuguaglianza di Poincaré). Osserviamo innanzitutto che, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$(\nabla g - f'(\bar{u})\nabla \bar{u}, \nabla u_t) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla g\|^2 + \|f'(\bar{u})\nabla \bar{u}\|^2 \quad (18)$$

Ora, grazie all'ipotesi (5) e all'immersione continua $W \subset C(\bar{\Omega})$, esiste una costante $c_1(R)$ dipendente da R e da f , ma indipendente da T_0 , tale che, per quasi ogni $t \in (0, T_0)$,

$$\|f'(\bar{u})\nabla \bar{u}\|^2 \leq \|f'(\bar{u})\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \bar{u}\|^2 \leq c_1(R). \quad (19)$$

Dal momento che anche il termine contenente g è controllato grazie alla (10), concludiamo che esiste una costante $c_2(R)$ (dipendente anche da g) tale che

$$\frac{d}{dt} (\|Au\|^2 + \|u\|^2) \leq c_2(R). \quad (20)$$

Osserviamo ora che

$$(\|\cdot\|^2 + \|A\cdot\|^2)^{1/2} \quad (21)$$

è una norma equivalente alla norma di W . Anzi, per semplicità di calcolo, dotiamo W proprio della norma (21). Integrando (17) su $(0, t)$ per $t \in (0, T_0]$ e successivamente passando all'estremo superiore rispetto a t , otteniamo allora

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_0; W)}^2 \leq \|u_0\|_W^2 + T_0 c_2(R) \leq \frac{R^2}{4} + T_0 c_2(R), \quad (22)$$

dove c_2 è effettivamente calcolabile in funzione di R e degli altri dati (osserviamo ancora una volta che essa non dipende da T_0). Possiamo allora scegliere T_0 sufficientemente piccolo, in modo tale che $R^2/4 + T_0 c_2(R) \leq R^2$. Ciò assicura che \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} .

Per concludere la dimostrazione, proviamo che la mappa \mathcal{T} è contrattiva rispetto alla norma di $L^2(0, T_0; H)$. Per fare questo, consideriamo due funzioni \bar{u}_1, \bar{u}_2 in \mathcal{X} e denotiamo con u_1, u_2 le rispettive soluzioni. Poniamo anche $\bar{u} := \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ e $u := u_1 - u_2$. Abbiamo allora che u risolve

$$u_t + Au + f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Moltiplichiamo tale equazione, nel prodotto scalare di H , per u . Usando Hölder otteniamo subito

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq \|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\| \|u\|. \quad (24)$$

Possiamo ora notare che

$$f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = \int_0^1 f'(s\bar{u}_1 + (1-s)\bar{u}_2) \bar{u} \, ds, \quad (25)$$

da cui

$$\|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\| \leq \|\bar{u}\| \left\| \int_0^1 f'(s\bar{u}_1 + (1-s)\bar{u}_2) \, ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (26)$$

ed è evidente che esiste una costante $c_3(R)$ tale che l'ultima norma è, per quasi ogni $t \in (0, T_0)$, più piccola di c_3 . Usando anche le disuguaglianze di Young e di Poincarè, abbiamo allora

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq c_4(R) \|\bar{u}\|^2, \quad (27)$$

da cui, integrando su $(0, t)$ per $t \in (0, T_0)$ e quindi passando all'estremo superiore rispetto a t ,

$$\|u\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 \leq T_0 \|u\|_{L^\infty(0, T_0; H)}^2 \leq T_0 c_4(R) \|\bar{u}\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 \quad (28)$$

e, per avere una contrazione, è sufficiente scegliere $T_0 < c_4^{-1}$. La dimostrazione è completa. Si noti, infatti, che la regolarità (11) è una diretta conseguenza della stima (17). ■

Chiameremo nel seguito soluzione “forte” una funzione u , definita in un certo intervallo $[0, T]$ ed avente la regolarità (11), che soddisfa l'equazione (12) quasi ovunque in $(0, T)$ e verifica la condizione iniziale (7). Il teorema precedente permette di costruire una soluzione forte “locale in tempo” e, a questo livello, non sappiamo dire se tale soluzione sia prolungabile ad intervalli di tempo arbitrari oppure possa esplodere in tempi finiti. Per il momento possiamo però dimostrare che nella classe delle soluzioni forti c'è unicità anche su intervalli di tempo “grandi”.

Teorema 1.6. *Valgano le ipotesi del Teorema 1.2 e siano $T > 0$ e u_1, u_2 due soluzioni del problema (12)+(7) definite sull'intervallo $[0, T]$ e aventi la regolarità (11). Allora $u_1 = u_2$.*

PROOF. Come nel precedente argomento contrattivo, scrivo l'equazione per u_1 e per u_2 , faccio la differenza e la moltiplico per $u := u_1 - u_2$. Ottengo allora (cfr. con (24))

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq - \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2)) u \quad (29)$$

Procedendo come nella dimostrazione precedente, trovo una costante C , dipendente dalle norme (11) di u_1 e u_2 , tale che

$$-\int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))u \leq \|f(u_1) - f(u_2)\| \|u\| \leq C \|u\|^2. \quad (30)$$

La tesi segue allora applicando il Lemma di Gronwall in (30). \blacksquare

Possiamo ora chiederci se esistano soluzioni forti globali in tempo. Come è naturale aspettarsi, questo dipende dall'andamento della funzione f all'infinito. Un primo risultato, che dovrebbe essere già noto, ci dice che la soluzione "forte" è globale in tempo nel caso in cui f è Lipschitz.

Teorema 1.7. *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 1.2 e, in più, che f sia (globalmente) Lipschitz. Allora, per ogni $T > 0$, la soluzione forte locale si può estendere a una soluzione forte definita nell'intervallo $[0, T]$ e avente la stessa regolarità.*

PROOF. Nonostante questo risultato sia essenzialmente una conseguenza del Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard, è opportuno fornirne una dimostrazione indipendente attraverso un argomento di estensione mutuato dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Sia dunque u la soluzione "forte" locale costruita in precedenza e definiamo il suo tempo di vita massimale T_{\max} come l'estremo superiore dei tempi $T > 0$ tali che u ammetta un prolungamento (indicato con la stessa lettera u) che sia ancora una soluzione forte sull'intervallo $(0, T)$. Si noti che posso parlare di "prolungamento" senza ambiguità grazie al precedente risultato di unicità. In altre parole, tutti i prolungamenti "si incollano" ed è possibile definire un (unico) prolungamento massimale u_{\max} definito per quasi ogni $t \in (0, T_{\max})$.

La prima osservazione che posso fare, intuitiva ma delicata da dimostrare, è che T_{\max} , se è finito (se $T_{\max} = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare...), non può essere un massimo. In altre parole, **non** si ha che

$$u_{\max} \in H^1(0, T_{\max}; V) \cap L^\infty(0, T_{\max}; W). \quad (31)$$

Infatti, se valesse la (31), avremmo, per il Teorema 1.1, che $u \in C_w([0, T_{\max}]; W)$. Dunque, otterremmo che esiste il

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}^-} u_{\max}(t) =: u_* \quad (32)$$

rispetto alla topologia debole di W e tale limite apparterebbe a W . Ma, allora, sarebbe possibile trovare una soluzione forte del problema con dato iniziale u_* e tempo iniziale T_{\max} . Tale soluzione permetterebbe di estendere u_{\max} al di là di T_{\max} , il che contraddice la costruzione di T_{\max} .

Mostriamo ora che, invece, se $T_{\max} < +\infty$, allora vale la (31). Dal momento che tale relazione non può essere contemporaneamente vera e falsa, ciò implicherà che $T_{\max} = +\infty$. Per ottenere questo, moltiplico come in precedenza (12) per $Au_t + u$ (ove si può pensare che sia $u = u_{\max}$), arrivando a una relazione simile alla (17). Grazie all'ipotesi di Lipschitzianità di f il termine più delicato a secondo membro si può ora stimare come segue:

$$(\nabla g - f'(u)\nabla \bar{u}, \nabla u_t) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla g\|^2 + c \|\nabla u\|^2. \quad (33)$$

Otteniamo allora la relazione

$$\frac{d}{dt} \|u\|_W^2 + \|\nabla u_t\|^2 \leq c(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla g\|^2) \leq c(\|u\|_W^2 + \|\nabla g\|^2). \quad (34)$$

Grazie al fatto che, su ogni $(0, T)$ con $T < T_{\max}$, u è soluzione forte, possiamo applicare Gronwall su $(0, T)$ e ottenere

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; W)}^2 + \|u\|_{H^1(0, T; V)}^2 \leq Q(\|u_0\|_W, T), \quad (35)$$

ove $Q : [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione monotona crescente separatamente in ciascuna delle due variabili e, in particolare, **non esplode** per $T \nearrow T_{\max}$. Dunque vale la (31) e il teorema è dimostrato. \blacksquare

Cerchiamo ora soluzioni “deboli” del problema, ovvero definite in un quadro funzionale meno regolare. Vedremo che tali soluzioni esistono e hanno carattere globale in tempo sotto condizioni su f meno restrittive della Lipschitzianità.

Teorema 1.8. *Supponiamo che valga (5). Supponiamo inoltre:*

$$\exists \lambda : f'(r) \geq -\lambda \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

$$u_0 \in V, \quad F(u_0) \in L^1(\Omega) \quad (37)$$

$$g \in H. \quad (38)$$

Sia infine $T > 0$. Allora esiste una funzione u , avente la regolarità

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; W), \quad (39)$$

che soddisfa l'equazione (12) q.o. in $(0, T)$ e la condizione iniziale (7) q.o. in Ω . Inoltre, tale soluzione è unica.

PROOF. Regularizziamo opportunamente i dati f , u_0 e g in modo da avere successioni $\{f_n\}$, $\{u_{0,n}\}$ e $\{g_n\}$ in accordo con le ipotesi del Teorema 1.7. Richiediamo inoltre che sia

$$(u_{0,n}, g_n) \rightarrow (u_0, g) \quad \text{fortemente in } V \times H \quad (40)$$

e che f_n tenda a f uniformemente sui compatti di \mathbb{R} . Ad esempio, possiamo troncare f al di fuori dell'intervallo $[-n, n]$. Non è difficile verificare che, grazie alla (36), si ha allora che

$$\exists c_5 > 0 : f_n(r) \operatorname{sign} r \leq f(r) \operatorname{sign} r + c_5 |r| \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (41)$$

da cui, definendo

$$F_n(r) := \int_0^r f_n(s) ds, \quad \text{si ha } F_n(r) \leq F(r) + c_5 \frac{r^2}{2} \quad (42)$$

per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Anche l'approssimazione del dato iniziale non può essere scelta arbitrariamente, ma va specificata con una qualche cura. Una possibilità è scegliere $u_{0,n}$ come la (unica) soluzione del problema ellittico

$$u_{0,n} + n^{-1} A u_{0,n} = u_0, \quad (43)$$

da cui, per ogni n , si ha addirittura che $u_{0,n} \in W \cap H^3(\Omega)$ ed è facile verificare che vale la convergenza specificata in (40). Pongo ora

$$h(r) := f(r) + \lambda r, \quad h_n(r) := f_n(r) + \lambda r, \quad H(r) := F(r) + \lambda \frac{r^2}{2}, \quad H_n(r) := F_n(r) + \lambda \frac{r^2}{2} \quad (44)$$

e osservo che H e H_n sono convesse. Grazie alla (42) e alla (44), si ha inoltre che

$$H_n(r) \leq F_n(r) + \frac{\lambda}{2} r^2 \leq F(r) + \frac{c_5 + \lambda}{2} r^2. \quad (45)$$

Avendo specificato l'approssimazione dei dati, possiamo ora applicare il Teorema 1.7. Otteniamo dunque, $\forall n \in \mathbb{N}$, una soluzione u_n dell'equazione

$$u_{n,t} + A u_n + f_n(u_n) = g_n, \quad (46)$$

e tale soluzione è definita su tutto $(0, T)$ (di fatto su tutto $(0, +\infty)$).

Moltiplichiamo (46) per $u_{n,t}$. Osserviamo che, grazie alla regolarità (11), tale procedimento è rigoroso. Otteniamo

$$\|u_{n,t}\|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2 + \int_\Omega F_n(u_n) - (g_n, u_n) \right) \leq 0, \quad (47)$$

Sommiamo ora alla (47) l'uguaglianza

$$\lambda \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u_{n,t}\|^2 + 2\lambda^2 \|u_n\|^2, \quad (48)$$

in modo tale che il termine sotto derivata temporale (“energia” del sistema) verifichi

$$\mathcal{E}_n(u_n) := \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2 + \int_{\Omega} F_n(u_n) - (g, u_n) + \lambda \|u_n\|^2 + c_6 \geq \kappa \|u_n\|_V^2 \quad (49)$$

per opportune costanti positive κ e c_6 indipendenti da n .

Abbiamo allora, per qualche $c_7 > 0$,

$$\frac{1}{2} \|u_{n,t}\|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{E}_n(u_n) \leq 2\lambda^2 \|u_n\|^2 \leq c_7 \mathcal{E}_n(u_n), \quad (50)$$

da cui, applicando Gronwall, otteniamo

$$\|\mathcal{E}_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T)} \leq \mathcal{E}_n(u_{0,n}) \exp(c_7 T), \quad (51)$$

e dobbiamo verificare che $\mathcal{E}_n(u_{0,n})$ è limitato in modo indipendente da n . Il passaggio chiave è il controllo il termine non lineare. Grazie alla seconda delle (37), alla convessità di H_n , alla (43) e alla (45), abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_n(u_{0,n}) &= \int_{\Omega} H_n(u_{0,n}) - \frac{\lambda}{2} \|u_{0,n}\|^2 \leq \int_{\Omega} H_n(u_0) + (h_n(u_{0,n}), u_{0,n} - u_0) \\ &\leq \int_{\Omega} F(u_0) + \frac{\lambda + c_5}{2} \|u_0\|^2 - n^{-1} (h_n(u_{0,n}), Au_{0,n}) \leq C, \end{aligned} \quad (52)$$

ove la costante C è indipendente da n . Si è usato in particolare il fatto che $(h_n(u_{0,n}), Au_{0,n}) \geq 0$ grazie alla monotonia di h_n . Integrando in tempo la (50), otteniamo allora

$$\|u_n\|_{H^1(0,T,H)}^2 + \|u_n\|_{L^\infty(0,T,V)}^2 \leq C, \quad (53)$$

per qualche costante C indipendente da n .

Moltiplicando ora (46) per Au_n , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|^2 + \|Au_n\|^2 &\leq (g_n, Au_n) - \int_{\Omega} f'(u_n) |\nabla u_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|Au_n\|^2 + \frac{1}{2} \|g_n\|^2 + \lambda \|\nabla u_n\|^2 \end{aligned} \quad (54)$$

Usando la (38) e la (53), si vede facilmente che

$$\|u_n\|_{L^2(0,T,W)}^2 \leq C, \quad (55)$$

da cui, per confronto nella (46),

$$\|f_n(u_n)\|_{L^2(0,T,H)}^2 \leq C. \quad (56)$$

Le relazioni (53), (55) e (56) implicano, a patto di estrarre una successione (indicata per semplicità sempre con u_n), convergenze deboli o deboli star (nelle norme corrispondenti) a un'opportuna funzione limite u . Il Teorema di Aubin-Lions implica allora

$$u_n \rightarrow u \quad \text{fortemente in } C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V). \quad (57)$$

In particolare, (la sottosuccessione) u_n tende a u quasi ovunque in $(0, T) \times \Omega$. Dal momento che f_n converge a f uniformemente sui compatti di \mathbb{R} , si ha allora che $f_n(u_n)$ converge quasi ovunque a $f(u)$.

Utilizzando una variante del [3, Teorema 18, Appendice] (vedi Prop. 1.9 qui sotto), otteniamo che

$$f_n(u_n) \rightarrow f(u) \quad \text{fortemente in } L^q(Q) \quad \forall q \in [1, 2). \quad (58)$$

Questo è sufficiente a passare al limite nell'equazione (46). Le relazioni (53) e (55) e la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole o debole star implicano poi la validità della (39); dunque, l'esistenza è dimostrata.

Per provare l'unicità, procediamo come nella dimostrazione del Teorema 1.6. Utilizzando le stesse notazioni, arriviamo ancora alla (29). Ora, grazie all'ipotesi (36), non occorre più usare l'uniforme limitatezza di u_1 e u_2 (che è falsa nel presente quadro di regolarità), ma abbiamo direttamente

$$-\int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))u \leq \lambda \|u\|^2, \quad (59)$$

grazie al Teorema di Lagrange. L'unicità segue come prima dal Lemma di Gronwall. ■

Vediamo ora il risultato di convergenza usato nella precedente dimostrazione.

Proposizione 1.9. *Sia A un insieme di misura finita e sia γ_n una successione di funzioni limitata in $L^p(A)$ per qualche $p \in (1, \infty]$. Inoltre, supponiamo che γ_n tenda a un limite γ quasi ovunque in A . Allora $\gamma \in L^p(A)$ e γ_n tende a γ debolmente in $L^p(A)$ (debolmente star se $p = \infty$) e fortemente in $L^q(A)$ per ogni $q \in [1, p)$.*

PROOF. Il fatto che $\gamma \in L^p(A)$ segue dal Lemma di Fatou applicato a $|\gamma_n|^p$. Pongo, come in [3, Teorema 18, Appendice], $g_n := \gamma_n - \gamma$. Per il Teorema di Severini-Egorov, (tutta la successione) g_n tende a 0 quasi uniformemente. Inoltre, g_n è limitata in $L^p(A)$ per ipotesi e perché anche γ appartiene a $L^p(A)$ per quanto visto sopra. Ripetendo la dimostrazione di [3], si vede allora che g_n tende a 0 (ovvero γ_n tende a γ) fortemente in $L^p(A)$ per ogni $p < q$. La convergenza debole in $L^p(A)$ segue allora dai consueti risultati di compattezza debole. ■

Osservazione 1.10. Ci si può chiedere se, sotto le ipotesi (9)-(10) e (36) (ovvero, se i dati g e u_0 sono più regolari) e la f cresce velocemente all'infinito, ma è "essenzialmente monotona"), la soluzione forte locale costruita nel Teorema 1.2 possa ancora essere estesa a una soluzione forte globale. Grazie al Teorema 1.8, sicuramente si può estendere u a una soluzione debole globale. Tuttavia, *non* è ovvio che u possa essere estesa a una soluzione forte globale. Per rendersi conto di questo fatto, si consideri la relazione (17) (con u al posto di \bar{u}). Anche se f è monotona, non è evidente come stimare il termine a secondo membro ($f'(u)\nabla u, \nabla u_t$), dato che la monotonia di f non garantisce più che esso abbia un segno. In realtà vedremo più avanti che l'esistenza di una soluzione globale regolare è comunque vera.

Esercizio 1.11. È davvero necessaria la regolarità (10) per avere la tesi del Teorema 1.2? Analogamente, è necessaria la (38) perché valga la tesi del Teorema 1.8? Provare a dimostrare che i teoremi restano veri nelle ipotesi più deboli (rispettivamente) $g \in H$ e $g \in V'$.

Concludiamo questa sezione notando che ha senso considerare soluzioni dell'equazione (12) in classi di regolarità ancora inferiori. Per esempio, si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 1.12. *Supponiamo che f sia un polinomio di grado dispari con coefficiente del termine di grado più alto strettamente positivo. Assumiamo inoltre*

$$u_0 \in H, \quad (60)$$

$$g \in V'. \quad (61)$$

Sia infine $T > 0$. Allora esiste una funzione u avente (almeno) la regolarità

$$u \in L^2(0, T; V), \quad (62)$$

che soddisfa l'equazione (12) e la condizione iniziale (7) in un senso opportuno. Inoltre, tale soluzione è unica.

La dimostrazione potrebbe essere effettuata utilizzando come per il Teorema 1.8 un metodo di compattezza. Ovvero, si osserva innanzitutto che l'ipotesi attuale su f è più restrittiva della (36). Quindi, si regolarizzano i dati u_0 e g e si applica il Teorema 1.8 al problema regolarizzato. Si mostrano infine delle stime indipendenti dal parametro di approssimazione e si passa al limite.

1.3 L'equazione delle onde semilineare con smorzamento

In questa sezione ci occupiamo della seguente equazione:

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u) = g. \quad (63)$$

Come in precedenza, A è il Laplaciano con condizioni di Dirichlet omogenee e supporremo sempre che valga la

$$f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad f(0) = 0. \quad (64)$$

Naturalmente, occorre associare alla (63) due condizioni iniziali, ovvero

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad (65)$$

dove u_0, u_1 sono dati. Come primo passo, è conveniente richiamare il risultato che si ha per il problema lineare, dato che lo dovremo utilizzare con una certa precisione. Come nella sezione precedente, ho posto $H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $W := D(A) = H^2(\Omega) \cap V$. Abbiamo bisogno di enunciare il risultato considerando un termine di sorgente dipendente dal tempo.

Teorema 1.13. *Supponiamo che i dati soddisfino*

$$(u_0, u_1) \in W \times V, \quad g \in C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) + H. \quad (66)$$

Allora esiste una e una sola funzione u (soluzione “forte”) che soddisfa l'equazione

$$u_{tt} + u_t + Au = g \quad (67)$$

in H per ogni $t \in [0, T]$ e la condizione iniziale (65). Inoltre, u ha la regolarità

$$u \in C^2([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; W). \quad (68)$$

Se, invece, si ha solo

$$(u_0, u_1) \in V \times H, \quad g \in C^0([0, T]; V') \cap L^2(0, T; H) + V', \quad (69)$$

allora esiste una e una sola u (soluzione “debole”) che soddisfa la (67) in V' per ogni $t \in [0, T]$ e verifica la condizione iniziale (65). Inoltre,

$$u \in C^2([0, T]; V') \cap C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; V) \quad (70)$$

e tale regolarità è ottimale.

Osservazione 1.14. Considerando, ad esempio, le soluzioni deboli, è facile rendersi conto che la regolarità (70) corrisponde a quella che si ottiene moltiplicando l'equazione (67) per u_t e sfruttando la (69). In particolare, la regolarità di u_{tt} segue per confronto nell'equazione utilizzando la continuità di g rispetto alla norma di V' .

Passando al problema non lineare, comincio col dimostrare un risultato di esistenza locale di una soluzione “forte” relativo al caso in cui f è Lipschitz.

Teorema 1.15. *Supponiamo che f soddisfi (64) e sia globalmente Lipschitz. Assumiamo inoltre*

$$(u_0, u_1) \in W \times V, \quad g \in H. \quad (71)$$

Allora, esistono un tempo $T_0 > 0$ e una funzione u avente la regolarità (68) (per $T = T_0$) che soddisfa l'equazione (63) in H e la condizione iniziale (65).

PROOF. Procediamo, come in precedenza, con un argomento contrattivo, che descriviamo senza fornire tutti i dettagli. Sia $R > 0$ tale che

$$\|u_0\|_V + \|u_1\|_H \leq R/2 \quad (72)$$

(si noti che queste norme sono più deboli rispetto alla regolarità effettivamente richiesta sui dati iniziali). Definiamo allora lo spazio

$$\mathcal{X} := \{v \in H^1(0, T_0; H) \cap L^2(0, T_0; V) : \|v\|_{H^1(0, T_0; H)} + \|v\|_{L^2(0, T_0; V)} \leq R\}, \quad (73)$$

ove T_0 sarà scelto alla fine del procedimento. Si noti che questo non è lo spazio naturale ove cercare la soluzione del problema iperbolico. Come nel caso parabolico, si verifica comunque che \mathcal{X} è completo se munito della norma di $L^2(0, T_0; H)$.

Fisso $\bar{u} \in \mathcal{X}$ e considero il problema dato dalla

$$u_{tt} + u_t + Au = g - f(\bar{u}) \quad (74)$$

e dalla condizione (65). Dato il carattere Lipschitz di f , si verifica facilmente che

$$\|f(\bar{u})\|_{C^0([0, T_0]; H)} + \|f(\bar{u})\|_{L^2(0, T_0; V)} \leq c_8(R). \quad (75)$$

Segue allora dal Teorema 1.13 che (74)+(65) ammette una e una sola soluzione u che verifica la (68). Pongo, come in precedenza, $\mathcal{T} : \bar{u} \mapsto u$.

Verifico che \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} . Per fare questo, moltiplico (74) per u_t . Osservo che ciò è ammissibile perché tutti i termini dell'equazione giacciono (almeno) in $L^2(0, T_0; H)$. È facile allora ottenere

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \|u_t\|^2 \leq \|g - f(\bar{u})\|^2. \quad (76)$$

Integrando in tempo, arrivo a

$$\|u_t\|_{L^2(0, T_0; H)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T_0; V)}^2 \leq T_0 (\|u_t\|_{L^\infty(0, T_0; H)}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T_0; V)}^2) \leq T_0 c_9(R) + \frac{R^2}{2}, \quad (77)$$

da cui la mappa \mathcal{T} ha immagine in \mathcal{X} per T_0 sufficientemente piccolo.

Infine, dimostro che \mathcal{T} è contrattiva. Fissate due funzioni \bar{u}_1, \bar{u}_2 in \mathcal{X} e dette u_1, u_2 le rispettive soluzioni, poniamo $\bar{u} := \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ e $u := u_1 - u_2$. Abbiamo allora che u risolve

$$u_{tt} + u_t + Au + f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \quad (78)$$

Moltiplichiamo tale equazione, nel prodotto scalare di H , per u_t . Si ha subito

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \|u_t\|^2 \leq \|f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2)\|^2 \leq L^2 \|\bar{u}\|^2, \quad (79)$$

ove L è la costante di Lipschitz di f . La contrattività di \mathcal{T} rispetto alla norma di $L^2(0, T_0; H)$ segue allora, almeno per T_0 sufficientemente piccolo, integrando in tempo e applicando la disuguaglianza di Poincaré. Dunque, \mathcal{T} ha uno e un solo punto fisso $u \in \mathcal{X}$. Per concludere la dimostrazione, devo far vedere che la funzione u trovata è una soluzione forte (per il momento sappiamo solo che è un elemento dello spazio \mathcal{X} , che ha un livello inferiore di regolarità). Anche se si potrebbe procedere più velocemente, faremo seguire questa proprietà da un risultato un pochino più generale, presentato separatamente qui sotto. ■

Lemma 1.16. *Supponiamo che f soddisfi (64) e sia Lipschitz. Assumiamo inoltre (71). Sia $T > 0$ e sia u una funzione che risolve, in un senso opportuno, il problema (63) sull'intervallo $(0, T)$ e soddisfa la condizione iniziale (65). Sia inoltre*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; H)} + \|u\|_{L^2(0, T; V)} \leq M \quad (80)$$

per qualche $M > 0$. Allora u è una soluzione forte ed esiste $c(M, T)$ tale che

$$\|u\|_{C^2([0, T]; H)} + \|u\|_{C^1([0, T]; V)} + \|u\|_{C^0([0, T]; W)} \leq c(M, T). \quad (81)$$

PROOF. Il lemma dice che ogni soluzione u (locale o globale) del problema nonlineare in ipotesi “forti” sui dati, se verifica (80), allora è automaticamente una soluzione forte.

Infatti, u risolve in particolare l'equazione *lineare*

$$u_{tt} + u_t + Au = \phi := g - f(u), \quad (82)$$

dove, grazie alla Lipschitzianità di f e alla (80), si ha

$$\|\phi\|_{C^0([0,T];H)} + \|\phi\|_{L^2(0,T;V)} \leq c(M). \quad (83)$$

Ma allora u soddisfa (68) grazie al Teorema 1.13. ■

Passiamo ora a dimostrare un risultato di unicità per la soluzione forte. Si noti che non è necessaria la Lipschitzianità di f .

Teorema 1.17. *Supponiamo che f soddisfi (64) e che valga (71). Sia $T > 0$ e siano u_1 e u_2 due soluzioni “forti” del problema (63)+(65) sull'intervallo $(0, T)$. Valga cioè, per $i = 1, 2$,*

$$u_i \in C^2([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; W). \quad (84)$$

Allora $u_1 = u_2$.

PROOF. Chiaramente $u := u_1 - u_2$ soddisfa

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u_1) - f(u_2) = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \quad (85)$$

Moltiplicando tale equazione per u_t la dimostrazione si ottiene procedendo grosso modo come per il Teorema 1.6. ■

Dimostriamo ora che, nel caso di f Lipschitz, la soluzione “forte” costruita nel Teorema 1.15 ha carattere globale in tempo.

Teorema 1.18. *Supponiamo che f soddisfi (64), che f sia Lipschitz e che valga (71). Allora esiste una soluzione globale “forte” di (63)+(65).*

PROOF. Sia u la soluzione “forte” locale costruita in precedenza e definiamo il suo tempo di vita massimale T_{\max} come l'estremo superiore dei tempi $T > 0$ tali che u ammetta un prolungamento che sia ancora una soluzione forte sull'intervallo $(0, T)$. Grazie all'unicità provata nel Teorema 1.17), tutti i prolungamenti si “incollano” e otteniamo una soluzione massimale u_{\max} definita q.o. in $(0, T_{\max})$.

Come nel caso parabolico, mostro che T_{\max} , se è finito (se $T_{\max} = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare...), non può essere un massimo. In altre parole, **non** si ha che

$$u_{\max} \in C^2([0, T_{\max}]; H) \cap C^1([0, T_{\max}]; V) \cap C^0([0, T_{\max}]; W). \quad (86)$$

Infatti, se così fosse, esisterebbe il

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} (u_{\max}(t), u_{\max,t}(t)) =: (u_0^*, u_1^*) \quad (87)$$

rispetto alla topologia forte di $V \times W$ e sarebbe allora possibile prolungare la soluzione.

Mostriamo ora che, invece, se $T_{\max} < +\infty$, allora vale la (86), ottenendo così una contraddizione.

Moltiplico l'equazione per u_t (dove ho scritto u invece di u_{\max} per brevità). Effettuando passaggi standard e usando in particolare la Lipschitzianità di f , non è difficile arrivare alla relazione

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) \leq c_{10} (1 + \|u\|^2), \quad (88)$$

da cui, usando Poincaré e Gronwall, ottengo che, per ogni $T \in (0, T_{\max})$,

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq Q(\|u_0\|_V, \|u_1\|, T), \quad (89)$$

ove, come in precedenza, Q è monotona in ciascuno dei suoi argomenti e non esplosa per $T \nearrow T_{\max}$. Di conseguenza, la (86) segue dal Lemma 1.16 (in particolare, si ha la (81)). ■

Posso finalmente passare al caso in cui f non è Lipschitz. Rispetto al caso parabolico, sarò comunque costretto a mantenere ipotesi più restrittive. In particolare, richiederò che

$$\exists \lambda : f'(r) \geq -\lambda \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (90)$$

$$\exists c_f > 0, p \in [1, 3] : |f'(r)| \leq c_f(1 + |r|^{p-1}) \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (91)$$

Osservo che l'ipotesi (90) è esattamente identica alla (36) (ovvero f deve essere monotona a meno di una perturbazione lineare). Invece, la (91) prescrive una crescita al più cubica. Come vedremo, questa restrizione è legata alla scelta di lavorare in tre dimensioni spaziali (e, di fatto, all'immersione di Sobolev $V \subset L^6(\Omega)$).

Possiamo ora dimostrare l'esistenza (globale) di una soluzione debole:

Teorema 1.19. *Supponiamo che f soddisfi (64) e (90)-(91). Assumiamo inoltre*

$$(u_0, u_1) \in V \times H, \quad g \in V'. \quad (92)$$

Allora, esiste una e una sola funzione u avente la regolarità (70) che soddisfa l'equazione (63) in V' per ogni $t \in [0, T]$ e la condizione iniziale (65).

PROOF. Approssimo i dati costruendo una successione $\{f_n\}$ di funzioni Lipschitz che tendono a f sui compatti di \mathbb{R} , una successione $\{g_n\} \subset H$ che tende a g in V' e una successione di dati iniziali $\{(u_{0,n}, u_{1,n})\} \subset W \times V$ che tende a $\{(u_0, u_1)\}$ in $V \times H$. Si noti che ora non è necessario costruire l'approssimazione di u_0 in modo complicato, dato che la condizione $F(u_0) \in L^1(\Omega)$ è automaticamente soddisfatta (anche a livello di approssimazione) grazie al fatto che F cresce al massimo come una quarta potenza e $u_0 \in L^6(\Omega)$ per le immersioni di Sobolev. Grazie al Teorema 1.18, ottengo, per ogni fissato n , una soluzione globale forte u_n del problema

$$u_{n,tt} + u_{n,t} + Au_n + f_n(u_n) = g_n, \quad (93)$$

$$u_n|_{t=0} = u_{0,n}, \quad u_{n,t}|_{t=0} = u_{1,n}. \quad (94)$$

Osservo che è ammissibile moltiplicare l'equazione (93) per $u_{n,t}$ (nel prodotto scalare di H). Un procedimento standard porta a ottenere

$$\|u_{n,t}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u_n\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|F_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T)} \leq c, \quad (95)$$

ove c non dipende da n e F_n è una primitiva di f_n (cfr. (42)). Inoltre, grazie all'immersione continua $V \subset L^6(\Omega)$ e all'ipotesi (91),

$$\|f_n(u_n)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq c, \quad (96)$$

da cui il passaggio al limite rispetto a n si effettua come nel caso parabolico. In particolare, ho che

$$f_n(u_n) \rightarrow f(u) \quad \text{debolmente in } L^2(0, T; H) \quad (97)$$

(si noti che, grazie alla Prop. 1.9, si ha convergenza forte nel caso in cui $p < 3$ in (91), ovvero f è sottocubica).

Dunque, u risolve, in un senso opportuno, l'equazione (63) e soddisfa la regolarità

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V), \quad (98)$$

che è però più debole della (70). Per dimostrare che u è effettivamente una soluzione debole, osservo che, grazie ancora alla (91), si ha che $f(u) \in L^2(0, T; H)$. Inoltre, dalla (98) e dal Teorema di Aubin-Lions segue anche

$$u \in C^0([0, T]; L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [1, 6]; \quad (99)$$

infatti, $V \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta. Si ha allora che, per ogni $t, t+h \in [0, T]$,

$$f(u(t+h)) - f(u(t)) = \int_0^1 f'(su(t+h) + (1-s)u(t))(u(t+h) - u(t)) \, ds, \quad (100)$$

da cui, usando l'immersione continua $L^{6/5}(\Omega) \subset V'$,

$$\begin{aligned} \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_{V'} &\leq \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_{L^{6/5}(\Omega)} \\ &\leq c(1 + \|u(t+h)\|_{L^{18/5}(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{L^{18/5}(\Omega)}^2) \|u(t+h) - u(t)\|_{L^{18/5}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (101)$$

ancora grazie alla (91). Usando la (99), si può dunque mandare $h \rightarrow 0$ e si ottiene che $f(u) \in C^0([0, T]; V')$. La (70) segue dunque dalla seconda parte del Teorema 1.13. Per dimostrare l'unicità di u considero come al solito due soluzioni u_1 e u_2 , e pongo $u := u_1 - u_2$, la quale soddisfa

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u_1) - f(u_2) = 0. \quad (102)$$

con condizioni iniziali nulle. Ora, contrariamente a quanto succedeva nel Teorema 1.17, u_t **non è abbastanza regolare** per poter moltiplicare la (102) per u_t . Moltiplico, allora, per $A^{-1}u_t$ (grazie alle condizioni di Dirichlet, l'operatore A è strettamente positivo, e dunque invertibile). Ho

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|_{V'}^2 + \|u\|^2) + \|u_t\|_{V'}^2 \leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'}^2, \quad (103)$$

Procedendo in modo simile a (101), si ha

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'} &\leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \\ &\leq c(1 + \|u_1\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L^6(\Omega)}^2) \|u\|^2 \leq C\|u\|^2, \end{aligned} \quad (104)$$

ove C dipende anche dalle norme (98) di u_1 e u_2 . La tesi segue dal Lemma di Gronwall. \blacksquare

Osservazione 1.20. È possibile provare la regolarità (70) in modo diretto (ovvero senza ricorrere al Teorema 1.13), dimostrando una stima di Cauchy per la successione approssimante $\{u_n\}$ nello spazio $C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; V)$.

Osservazione 1.21. Se f ha crescita più che cubica, ovvero si ha, al posto della (91),

$$\exists p > 3: \quad \kappa_1|r|^{p-1} - \kappa_2 \leq f'(r) \leq \kappa_3(1 + |r|^{p-1}), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (105)$$

per opportune costanti $\kappa_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, allora è ancora possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione "debole" dell'equazione non lineare (63) (anche se cambiano le condizioni di regolarità, in particolare su $f(u)$). Tuttavia, **non è noto** (ed è un problema aperto importante!) se tale soluzione sia unica.

Osservazione 1.22. Una differenza fondamentale tra il caso parabolico e il caso iperbolico riguarda l'ammissibilità delle test-funzioni nell'ottenere le stime di regolarità naturale. Per esempio, nel teorema precedente, si è ottenuta l'esistenza di una soluzione debole u come limite di una famiglia $\{u_n\}$ di soluzioni più regolari (forti) costruite approssimando i dati (in particolare, la f). La stima necessaria per passare al limite è stata ottenuta moltiplicando (93) per $u_{n,t}$, il che era possibile grazie alla regolarità "forte" della u_n . Una volta ottenuta la soluzione debole u come limite, non è invece più possibile moltiplicare la (63) per u_t , in quanto questa funzione non è abbastanza regolare.

Osservazione 1.23. Un problema rimasto aperto dalla precedente discussione riguarda l'esistenza di una soluzione forte globale nel caso in cui f non è Lipschitz. Questo risultato è vero (ovviamente per dati aventi la regolarità (71)) nel caso in cui f verifica la condizione (64); tuttavia non ne forniremo una dimostrazione in questa sede. Il lettore può comunque convincersi della validità del risultato cercando una *stima formale*, globale in tempo, della soluzione u nelle norme (68). Questa può essere ottenuta testando l'equazione (63) per Au_t e provando a stimare il termine $(f(u), Au_t)$, attraverso opportune integrazioni per parti, in un modo che dipende soltanto dalla regolarità (71) dei dati. Si parla di stima "formale" perché, come osservato poco sopra, le condizioni di regolarità attese per u (ovvero le (68)) non sono sufficienti ad operare una tale stima, se non attraverso un'approssimazione (ovvero ad un livello in cui la soluzione è ancora più forte).

2 Sistemi dinamici astratti

3 Attrattori globali ed esponenziali

3.1 Attrattore globale per l'equazione di Allen-Cahn

Torniamo a occuparci dell'equazione (12) e dimostriamo che essa ammette l'attrattore globale. Per fare questo, dovremo per prima cosa dimostrare che l'operatore $S(t)$ che associa al dato u_0 la soluzione $u(t)$ soddisfa le proprietà di semigruppato (S.1)-(S.4) di [4].

In particolare, occorre decidere se lavorare con soluzioni “forti” oppure “deboli” e ciò determinerà la scelta dello spazio delle fasi \mathcal{X} dove ambientare l'equazione. Per motivi che saranno chiari in seguito, è opportuno lavorare con le soluzioni **deboli** ed assumere cioè le ipotesi (36) del Teorema 1.8. In particolare, possiamo considerare una nonlinearity f di crescita arbitrariamente veloce all'infinito, purché questa sia monotona a meno di una perturbazione lineare.

Nel risultato che segue proveremo a dimostrare che all'equazione (12) si può effettivamente associare un semigruppato $S(\cdot)$. Tuttavia, vedremo che le cose non sono così scontate come potrebbe apparire a prima vista.

Proposizione 3.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi (5), (36) e (38). Poniamo $h(r) := f(r) + \lambda r$ e definiamo H come la primitiva di h nulla in 0 (vedi (44)). Definiamo lo spazio \mathcal{X} come*

$$\mathcal{X} := \{u \in V : H(u) \in L^1(\Omega)\}, \quad (106)$$

e dotiamo \mathcal{X} della metrica

$$d_{\mathcal{X}}(u, v) := \|u - v\|_V + \|H(u) - H(v)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (107)$$

Allora \mathcal{X} è uno spazio metrico completo. Inoltre, per ogni $t \geq 0$, l'operatore $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$ mappa \mathcal{X} in sé e valgono le proprietà di semigruppato (S.1)-(S.4).

PROOF. Osserviamo subito che, dal momento che H è una funzione non lineare, la metrica $d_{\mathcal{X}}$ non è una norma e \mathcal{X} **non** è uno spazio di Banach. È invece immediato verificare che $d_{\mathcal{X}}$ è una distanza. Dimostriamo ora che \mathcal{X} è uno spazio metrico completo. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in \mathcal{X} . Allora, u_n converge in V ad un limite u . In particolare, u_n ammette una sottosuccessione che tende a u quasi ovunque in Ω . Poiché H è continua e nonnegativa, il Lemma di Fatou ci dice che

$$H(u) \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \|H(u)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} H(u) \leq \liminf_{n \nearrow +\infty} \int_{\Omega} H(u_n) < +\infty. \quad (108)$$

D'altronde, la successione $H(u_n)$ è di Cauchy in $L^1(\Omega)$; dunque, essa tende a un limite \overline{H} fortemente in $L^1(\Omega)$. Mostro infine che $\overline{H} = H(u)$ quasi ovunque in Ω . Infatti, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che, contemporaneamente, $u_{n_k} \rightarrow u$ e $H(u_{n_k}) \rightarrow \overline{H}$ quasi ovunque in Ω . Poiché H è continua, si ha dunque necessariamente $\overline{H} = H(u)$ in quasi tutti i punti di Ω .

Mostriamo ora che valgono le (S.1)-(S.4). La (S.1) è ovvia. Dimostriamo la (S.3), ovvero che ogni soluzione debole è continua rispetto al tempo nella metrica di \mathcal{X} . Innanzitutto, la continuità rispetto alla norma di V segue da (39) e dal fatto che

$$H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; W) \subset C^0([0, T]; V) \quad (109)$$

con immersione continua, anche se non compatta (vedi [5]). Mi resta dunque da dimostrare che, per ogni $t \geq 0$, si ha

$$\lim_{s \rightarrow t} \|H(u(s)) - H(u(t))\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad (110)$$

ove il limite è da intendersi come limite destro se $t = 0$.

Per dimostrare questo, osserviamo innanzitutto che, se u è una soluzione debole, si ha

$$u_t, h(u) \in L^2(0, T; H). \quad (111)$$

Sia, come in precedenza, h_n una troncatura Lipschitz di h che converga a h sui compatti di \mathbb{R} e H_n la sua primitiva nulla in 0. Utilizzando la versione vettoriale di [3, Coroll. VIII.10], si ottiene allora

$$H_n(u) \in H^1(0, T; H), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} H_n(u) = (h_n(u), u_t). \quad (112)$$

Ma, allora, per ogni $s, t \geq 0$,

$$\int_{\Omega} H_n(u(t)) - \int_{\Omega} H_n(u(s)) = \int_t^s (h_n(u(\tau)), u_t(\tau)) d\tau. \quad (113)$$

Poiché $H(u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ quasi ovunque e $0 \leq H_n \leq H$, e analogamente $h(u) \in L^2((0, T) \times \Omega)$ e $|h_n| \leq |h|$, posso applicare il teorema di Lebesgue, che mi dice che, per ogni $T > 0$,

$$H_n(u(\cdot)) \rightarrow H(u(\cdot)) \quad \text{fortemente in } L^1(\Omega), \quad \text{quasi ovunque in } (0, T), \quad (114)$$

$$h_n(u) \rightarrow h(u) \quad \text{fortemente in } L^2((0, T) \times \Omega). \quad (115)$$

Dunque, per **quasi ogni** $s, t \in (0, T)$, posso passare al limite in (113). Prendendo il modulo, ottengo allora

$$\left| \int_{\Omega} H(u(s)) - \int_{\Omega} H(u(t)) \right| \leq \int_s^t \left| (h(u(\tau)), u(\tau)) \right| d\tau. \quad (116)$$

Ma, dal momento che l'integranda è globalmente sommabile, eventualmente modificando la u su un insieme di tempi di misura nulla, ottengo che $H(u) \in L^1(\Omega)$ per ogni tempo. Inoltre, la funzione

$$\mathcal{H}(t) : t \mapsto \int_{\Omega} H(u(t)) \quad (117)$$

è assolutamente continua. In particolare, $\lim_{s \rightarrow t} \mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(t)$. Per dimostrare la (110), procedo per assurdo supponendo che esistano $\{s_n\}$ e $\delta > 0$ tali che

$$s_n \rightarrow t, \quad \|H(u(s_n)) - H(u(t))\|_{L^1(\Omega)} \geq \delta. \quad (118)$$

Poiché u è continua a valori in V , almeno per una sottosuccessione di $\{s_n\}$ (non riindicizzata), $H(u(s_n))$ tende a $H(u(t))$ quasi ovunque in Ω . Posto $v_n := H(u(s_n)) - H(u(t))$, si ha allora che $v_n \rightarrow 0$ quasi ovunque e $\int_{\Omega} v_n \rightarrow 0$. Ma, dato che H è non-negativa, $-H(u(t)) \leq -v_n^- \leq 0$ quasi ovunque, da cui, essendo $H(u(t)) \in L^1(\Omega)$, posso applicare il Teorema di Lebesgue e concludere che $\int_{\Omega} v_n^- \rightarrow 0$. Ma, allora, per confronto, $\int_{\Omega} v_n^+ \rightarrow 0$ e dunque

$$\lim_{n \nearrow \infty} \|H(u(s_n)) - H(u(t))\|_{L^1(\Omega)} = \lim_{n \nearrow \infty} \int_{\Omega} (v_n^+ + v_n^-) = 0, \quad (119)$$

che contraddice la (118).

Possiamo ora mostrare la (S.2). Per quanto visto poco sopra, se u è una soluzione debole sull'intervallo $(0, t_1)$, allora il limite per $t \nearrow t_1$ di $u(t)$ esiste **nella metrica** $d_{\mathcal{X}}$. In particolare, $u(t_1)$ appartiene a \mathcal{X} e posso "ripartire" da t_1 . Segue allora che due soluzioni deboli possono essere "concatenate" ottenendo ancora una soluzione debole. Inoltre, per la proprietà di unicità, deve necessariamente essere $S(t) \circ S(t_1)u_0 = S(t + t_1)u_0$ per ogni $t, t_1 \geq 0$ e per ogni dato iniziale $u_0 \in \mathcal{X}$.

Resterebbe infine da dimostrare la (S.4). Tuttavia, con la regolarità nota per le soluzioni deboli, tale proprietà non è ovvia. Sarebbe comunque possibile dimostrarla con un argomento di semicontinuità, ma preferiamo farla seguire dalle proprietà di regolarizzazione delle soluzioni che dimostreremo tra un attimo. ■

Possiamo ora cominciare ad occuparci del comportamento per tempi lunghi dell'equazione. Cominciamo con il

Lemma 3.2. *Supponiamo che valgano le ipotesi (5), (36) e (38). Sia inoltre*

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} f'(r) = +\infty. \quad (120)$$

Allora il sistema dinamico $S(\cdot)$ è dissipativo.

PROOF. La dimostrazione è facile. Segnalo che l'ipotesi (120) potrebbe essere indebolita a prezzo di qualche complicazione tecnica. Riscrivo l'equazione (12) nella forma

$$u_t + Au + h(u) = g + \lambda u \quad (121)$$

e moltiplico per $u_t + u$. Grazie alla formula di integrazione per parti dimostrata sopra, ottengo allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_{\Omega} H(u) \right] + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} h(u)u \\ \leq (g + \lambda u, u_t + u) \leq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + c_{11} (1 + \|u\|^2). \end{aligned} \quad (122)$$

Grazie alla monotonia di h , è facile vedere che $h(u)u \geq H(u)$. Inoltre, grazie alla (120), si ha

$$\frac{1}{2} H(u) \geq c_{11} \|u\|^2 - c \quad (123)$$

per qualche $c, c_{11} > 0$. Ponendo, con un piccolo abuso di linguaggio,

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{Y}(u(t)) := \left[\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_{\Omega} H(u(t)) \right], \quad (124)$$

è facile allora vedere (si utilizzi la disuguaglianza di Poincaré) che dalla (122) segue che, per qualche $\kappa > 0$, si ha

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Y}(u) + \kappa \mathcal{Y}(u) + \|u_t\|^2 \leq c_{11}, \quad (125)$$

da cui

$$\mathcal{Y}(t) \leq \mathcal{Y}(0) e^{-\kappa t} + c_{11} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} ds \leq \mathcal{Y}(0) e^{-\kappa t} + \frac{c_{11}}{\kappa}. \quad (126)$$

Osservando che, per opportune $c_{12}, c_{13} > 0$, si ha

$$c_{12} d_{\mathcal{X}}(u, 0) \leq \mathcal{Y}(u) \leq c_{13} d_{\mathcal{X}}(u, 0), \quad \forall u \in \mathcal{X}, \quad (127)$$

la tesi segue. ■

Non è sorprendente che il procedimento vada avanti nel modo seguente:

Lemma 3.3. *Valgano le ipotesi del Lemma 3.2. Allora il sistema dinamico $S(\cdot)$ ammette un insieme compatto assorbente.*

PROOF. Riferendoci alla dimostrazione del Teorema 1.8, consideriamo l'equazione "regolarizzata" (46). È facile verificare che la soluzione "forte" u_n soddisfa (a n fissato) la regolarità ulteriore $u_n \in L^2(0, T; H^3(\Omega))$. In particolare, si ha che

$$\zeta_n := Au_n + f_n(u_n) \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V'). \quad (128)$$

Poiché, inoltre, $g_n \in V$ e $u_n \in H^1(0, T; V)$, è possibile moltiplicare, rispetto alla dualità tra V' e V , l'equazione (46) per $\zeta_{n,t}$. Utilizzando le formule di integrazione per parti provate in [5], e osservando che, grazie alla Lipschitzianità di f_n , $\partial_t f_n(u_n) = f'_n(u_n)u_{n,t} \in L^2(0, T; H)$, si ha allora

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\zeta_n\|^2 - (g_n, \zeta_n) \right] + \int_{\Omega} f'_n(u_n) u_{n,t}^2 + \|\nabla u_{n,t}\|^2 \leq 0. \quad (129)$$

Essendo $f'_n(r) \geq -\lambda \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$, sommando alla (129) la disuguaglianza

$$\lambda \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|^2 + \lambda \|u_{n,t}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{n,t}\|^2 + c_{\lambda} (\|\nabla u_n\|^2 + \|u_{n,t}\|^2), \quad (130)$$

otteniamo facilmente

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Z}_n(t) + \int_{\Omega} h'_n(u_n) u_{n,t}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_{n,t}\|^2 \leq c_{\lambda} (\|\nabla u_n\|^2 + \|u_{n,t}\|^2), \quad (131)$$

ove si è posto

$$\mathcal{Z}_n(t) := \frac{1}{2} \|\zeta_n\|^2 - (g_n, \zeta_n) + \lambda \|\nabla u_n\|^2 + c_g, \quad (132)$$

e si può scegliere c_g , indipendentemente da n , in modo tale che

$$\mathcal{Z}_n(t) \geq \kappa (\|Au_n\|^2 + \|f_n(u_n)\|^2) \quad (133)$$

per qualche $\kappa > 0$ indipendente da n .

Ora, torniamo alla dimostrazione del Lemma 3.2 e immaginiamo di ripetere i conti ragionando sulla soluzione approssimata u_n , anziché sulla u . Sia \mathcal{Y}_n l'analogo di \mathcal{Y} definito in (124), ma riferito a u_n anziché a u . Abbiamo allora la versione approssimata della (125):

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Y}_n(u_n) + \kappa \mathcal{Y}_n(u_n) + \|u_{n,t}\|^2 \leq c_{11}, \quad (134)$$

Moltiplichiamo ora (46) per $Au_n + f_n(u_n)$. Effettuando conti standard e sommando il risultato alla (134) otteniamo allora

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Y}_n(u_n) + \kappa (\mathcal{Y}_n(u_n) + \|u_{n,t}\|^2 + \|Au_n\|^2 + \|f_n(u_n)\|^2) \leq c_{14}, \quad (135)$$

per qualche (nuova) costante c_{14} , indipendente da n . Ricordando la (versione- n della) (126) e quindi integrando la (125) rispetto al tempo sull'intervallo $(t, t+1)$ con $t \geq 0$ arbitrario, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n(t+1) + \int_t^{t+1} (\|u_{n,t}\|^2 + \|Au_n\|^2 + \|f_n(u_n)\|^2) &\leq \mathcal{Y}_n(t) \leq \mathcal{Y}_n(u_{0,n}) e^{-\kappa t} + \frac{c_{14}}{\kappa} \\ &\leq c \mathcal{Y}(u_0) e^{-\kappa t} + \frac{c_{14}}{\kappa} \leq c d_{\mathcal{X}}(u_0, 0) e^{-\kappa t} + \frac{c_{14}}{\kappa}, \end{aligned} \quad (136)$$

ove le costanti c , c_{14} e κ sono indipendenti da n e l'ultima disuguaglianza si ottiene ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.8.

In particolare, abbiamo ottenuto che

$$\int_t^{t+1} \mathcal{Z}_n(s) \, ds \leq c d_{\mathcal{X}}(u_0, 0) e^{-\kappa t} + \frac{c_{14}}{\kappa}. \quad (137)$$

A questo punto, supponiamo di partire da un insieme di dati iniziali B limitato nella metrica di \mathcal{X} . Allora, esiste un tempo T_B dipendente solo da B tale che

$$\int_t^{t+1} \mathcal{Z}_n(s) \, ds \leq \frac{2c_{14}}{\kappa} \quad \forall t \geq T_B, \quad (138)$$

laddove \mathcal{Z}_n è riferito a una soluzione u_n uscente dall'approssimazione $u_{0,n}$ di un generico dato iniziale $u_0 \in B$. Applicando alla (131) il Lemma di Gronwall uniforme provato qui sotto, otteniamo allora che esiste una costante c_{15} indipendente da n e da B tale che, per ogni $t \geq T_B + 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{Z}_n(t) \leq c_{15} \quad (139)$$

Ciò implica in particolare che

$$\|Au_n(t)\| + \|f_n(u_n(t))\| \leq c_{16} \quad \forall t \geq T_B + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (140)$$

Per la semicontinuità delle norme rispetto alla convergenza debole, otteniamo allora, per ogni $t > 0$,

$$\|Au(t)\| + \|f(u(t))\| \leq c_{16} \quad \forall t \geq T_B + 1, \quad (141)$$

ovvero $S(\cdot)$ ammette un insieme assorbente \mathcal{B}_1 limitato in $H^2(\Omega)$. È standard verificare che \mathcal{B}_1 è allora relativamente compatto rispetto alla metrica $d_{\mathcal{X}}$. La dimostrazione è completa. \blacksquare

Concludiamo enunciando e dimostrando il Lemma di Gronwall uniforme:

Lemma 3.4. Sia $y : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ assolutamente continua e siano $m, k : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ localmente integrabili. Supponiamo inoltre che esistano costanti $C_y, C_m, C_k > 0$ tali che

$$y'(s) \leq m(s)y(s) + k(s) \quad \text{per quasi ogni } s \geq 0. \quad (142)$$

Si abbia inoltre

$$\int_t^{t+1} y(s) \, ds \leq C_y, \quad \int_t^{t+1} m(s) \, ds \leq C_m, \quad \int_t^{t+1} k(s) \, ds \leq C_k \quad (143)$$

per ogni $t \geq 0$. Allora, si ha

$$y(t+r) \leq \left(\frac{C_y}{r} + C_k \right) e^{C_m} \quad \forall t \geq 0, \quad r \in (0, 1). \quad (144)$$

PROOF. Fissiamo $r \in (0, 1)$ e $t \geq 0$. Sia $s \in (t, t+r)$ un punto arbitrario. Moltiplicando (142) per $\exp(-\int_t^s m(\tau) \, d\tau)$, otteniamo

$$\frac{d}{ds} \left(y(s) \exp \left(- \int_t^s m(\tau) \, d\tau \right) \right) \leq k(s) \exp \left(- \int_t^s m(\tau) \, d\tau \right), \quad (145)$$

Scegliamo ora un altro punto $a \in (t, t+r)$ e integriamo (145) rispetto a s tra a e $t+r$. Otteniamo

$$y(t+r) \exp \left(- \int_t^{t+r} m(\tau) \, d\tau \right) \leq y(a) \exp \left(- \int_t^a m(\tau) \, d\tau \right) + \int_a^{t+r} k(s) \exp \left(- \int_t^s m(\tau) \, d\tau \right) \, ds, \quad (146)$$

ovvero

$$\begin{aligned} y(t+r) &\leq y(a) \exp \left(\int_a^{t+r} m(\tau) \, d\tau \right) + \int_a^{t+r} k(s) \exp \left(\int_s^{t+r} m(\tau) \, d\tau \right) \, ds \\ &\leq y(a) e^{C_m} + C_k e^{C_m} \end{aligned} \quad (147)$$

Integrando tra t e $t+r$ rispetto ad a , otteniamo infine

$$ry(t+r) \leq e^{C_m} \int_t^{t+r} y(a) \, da + rC_k e^{C_m} \leq C_y e^{C_m} + rC_k e^{C_m}, \quad (148)$$

da cui la tesi segue dividendo per r . ■

Osservazione 3.5. Il procedimento dimostra in particolare che per ogni insieme B limitato nella metrica di \mathcal{X} e per ogni $t > 0$ si ha che $S(t)B$ è contenuto in un insieme $K(t, B)$ limitato in W (e dunque relativamente compatto in \mathcal{X}). Da ciò segue anche la proprietà di semigruppato S.4, che ancora non avevamo dimostrato. Data infatti una successione di dati iniziali $u_{0,n}$ convergente in \mathcal{X} a un limite u_0 , è facile verificare che, per ogni $t > 0$, $u_n(t) := S(t)u_{0,n}$ converge debolmente in W (e dunque fortemente in \mathcal{X}) a $u(t) := S(t)u_0$.

Osservazione 3.6. Nella dimostrazione del Lemma 3.3 abbiamo dovuto lavorare sulle soluzioni u_n del problema regolarizzato perché le stime effettuate non sarebbero state ammissibili a livello del problema originario, a causa dell'insufficiente regolarità delle test-funzioni. In questo modo il procedimento risulta completamente rigoroso. In realtà, nei casi concreti spesso si opera comunque direttamente sulla soluzione u , segnalando che le stime effettuate hanno un carattere "formale", ma "potrebbero essere giustificate" attraverso un procedimento di regolarizzazione o di approssimazione. Così faremo, in effetti, nel prossimo paragrafo dedicato all'equazione delle onde.

3.2 Attrattore globale per l'equazione delle onde semilineare con smorzamento

In questo paragrafo, studiamo l'esistenza dell'attrattore globale per l'equazione

$$u_{tt} + u_t + Au + f(u) = g, \quad (149)$$

Val la pena riscrivere le ipotesi sulla f , che devono essere un pochino rinforzate rispetto al capitolo precedente:

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \quad \exists \lambda : f'(r) \geq -\lambda \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (150)$$

$$\exists c_f, C_f, K_f > 0, p \in [1, 3) : c_f |r|^{p-2} - K_f \leq f''(r) \leq C_f(1 + |r|^{p-2}), \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \quad (151)$$

In altre parole, ci occorre una maggiore regolarità (C^2). Inoltre, abbiamo bisogno che f cresca “esattamente” (la (151) prescrive anche un controllo “dal basso”) come una potenza di esponente **strettamente inferiore** a 3. Nella (151) si è escluso l'intervallo $[-1, 1]$ unicamente per evitare il problema dell'esplosione in 0 della funzione $|r|^{p-2}$ nel caso $p \in [1, 2)$.

Dissipatività ed esistenza dell'attrattore globale saranno mostrate nel caso delle soluzioni “deboli” (vedi il Teorema 1.19). Si avrà tuttavia bisogno di chiedere un pochino di regolarità in più per g , che dovrà stare in H e non solamente in V' . Dal momento che vengono prescritte due condizioni iniziali, è naturale definire i seguenti spazi funzionali,

$$\mathcal{V}_0 := V \times H, \quad \mathcal{V}_1 := W \times V, \quad (152)$$

che sono ovviamente hilbertiani. Lo spazio \mathcal{V}_0 corrisponde alla regolarità del dato iniziale per le soluzioni deboli ed è dunque naturale assumerlo come spazio delle fasi per il sistema dinamico associato ad (149). Abbiamo il

Teorema 3.7. *Supponiamo che f soddisfi (150)-(151). Sia inoltre $g \in H$. Allora è possibile associare all'equazione (149) un sistema dinamico $S(\cdot)$, il quale ammette un insieme limitato assorbente.*

PROOF. Contrariamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, procediamo ora per “stime formali”. Moltiplichiamo cioè (149) per $u_t + \delta u$, ove $\delta > 0$ sarà scelto in seguito, osservando però che u_t non sarebbe una funzione ammissibile (e dunque la procedura dovrebbe in realtà essere svolta a livello di equazione approssimata). Otteniamo facilmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \delta(u_t, u) + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} F(u) - (g, u) \right] \\ + (1 - \delta) \|u_t\|^2 + \delta \|\nabla u\|^2 + \delta(f(u), u) + \delta(g, u) = 0. \end{aligned} \quad (153)$$

Denotiamo ora con \mathcal{Y} la funzione sotto l'operatore di derivata temporale. È facile verificare che

$$c_{17} \left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} F(u) \right) - c_{18} \leq \mathcal{Y} \leq c_{19} \left(1 + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} F(u) \right) \quad (154)$$

per opportune costanti $c_{17}, c_{18}, c_{19} > 0$. Inoltre, grazie alla (151), si ha anche

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} F(u) - c \leq (f(u), u) \leq c(1 + \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}) \leq c(1 + \|u\|_V^{p+1}). \quad (155)$$

È quindi facile convincersi che esiste $\kappa > 0$ tale che la (153) può essere riscritta come

$$\mathcal{Y}' + \kappa \mathcal{Y} \leq c, \quad (156)$$

da cui segue immediatamente la dissipatività di $S(\cdot)$. ■

Dal momento che l'equazione (149) è iperbolica, non c'è speranza di dimostrare effetti di regolarizzazione in tempo delle soluzioni. In altre parole, $S(\cdot)$ non può ammettere alcun insieme compatto assorbente. Possiamo tuttavia ottenere l'esistenza dell'attrattore globale dimostrando una proprietà più debole.

Teorema 3.8. *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 3.7. Allora il sistema dinamico $S(\cdot)$ associato a (149) ammette l'attrattore globale.*

PROOF. Grazie al Teorema 3.7 possiamo limitarci a considerare dati iniziali (u_0, u_1) appartenenti a un insieme \mathcal{B}_0 assorbente, limitato in \mathcal{V}_0 e positivamente invariante per $S(\cdot)$. Infatti, l'immagine di ogni altro insieme limitato $B \subset \mathcal{V}_0$ entra in \mathcal{B}_0 a partire da un certo tempo $T = T(B)$ senza più uscirne.

L'idea fondamentale è allora quella di **decomporre** la soluzione $u(t)$ come somma di due funzioni $v(t)$ e $w(t)$, delle quali la prima “decade esponenzialmente” a 0, mentre la seconda ha immagine, per ogni tempo, in un insieme limitato rispetto a una norma più regolare. Consideriamo cioè i problemi:

$$v_{tt} + v_t + Av + h(v) = 0, \quad (157)$$

$$v|_{t=0} = u_0, \quad v_t|_{t=0} = u_1, \quad (158)$$

che definisce la “parte dissipativa” e

$$w_{tt} + w_t + Aw + h(u) - h(v) = g + \lambda u, \quad (159)$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0. \quad (160)$$

È evidente che, sommando (157) e (159) si ottiene (149). Inoltre, (157) è un'equazione lineare e, come tale, ammette un'unica soluzione v . Una volta che tale v è stata determinata, u e v possono essere inserite in (159) (la quale è anch'essa lineare una volta che u e v sono note).

Trattiamo prima l'equazione (157). Come in precedenza, moltiplichiamo per $v_t + \delta v$, ottenendo facilmente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \delta(v_t, v) + \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \int_{\Omega} H(v) \right] + (1 - \delta) \|v_t\|^2 + \delta \|\nabla v\|^2 + \delta \int_{\Omega} H(v) \leq 0, \quad (161)$$

da cui, definendo \mathcal{Y}_v il termine sotto derivata temporale, abbiamo

$$\mathcal{Y}_v(t) \leq c \mathcal{Y}_v(0) e^{-\kappa t} \leq c(1 + \|u_0\|_V^{p+1} + \|u_1\|^2) e^{-\kappa t}, \quad (162)$$

da cui, in particolare, per $t \nearrow \infty$, $v(t)$ tende esponenzialmente a 0 nella norma di \mathcal{V}_0 .

Consideriamo ora l'equazione (159) e cerchiamo di dimostrare che la soluzione è più regolare rispetto alla u e alla v . Questo è possibile grazie al fatto che i dati iniziali sono nulli (e dunque in particolare “infinitamente regolari”). Si noti che la (159) è, rispetto a w , un'equazione lineare, che però contiene i termini di sorgente $h(u)$ e $h(v)$ la cui trattazione richiederà una qualche cura.

Una strategia naturale sarebbe moltiplicare la (159) per Aw_t , il che darebbe $w(t) \in W$ e $w_t(t) \in V$. Tuttavia, questo metodo funziona soltanto se h ha crescita al più quadratica. Sotto la sola ipotesi (151), occorre un procedimento un pochino più complicato: moltiplichiamo cioè l'equazione per $A^{1/2}w_t$ (per la definizione delle potenze frazionarie di A si veda ad esempio [7, Cap. 6]). Ponendo, per $s > 0$,

$$\|z\|_s := \|z\|_{D(A^{s/2})} = (A^s z, z) = (A^{s/2} z, A^{s/2} z) \quad (163)$$

e osservando che $D(A^{s/2})$ è un sottospazio chiuso di $H^s(\Omega)$ per ogni $s > 0$, otteniamo allora

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|w_t\|_{1/2}^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{3/2}^2 \right] + \|w_t\|_{1/2}^2 \leq -(A^{1/4}(\ell w), A^{1/4}w_t) + c(\|g\|_1 + \|u\|_1) \|w_t\|_0, \quad (164)$$

laddove si è scritto

$$\ell := \int_0^1 h'(su + (1-s)v) ds. \quad (165)$$

Ora, usando la continuità dell'immersione di Sobolev $W^{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset H$, notiamo che

$$-(A^{1/4}(\ell w), A^{1/4}w_t) \leq \|w_t\|_{1/2} \|\ell w\|_{1/2} \leq \|w_t\|_{1/2} \|\ell w\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq \|w_t\|_{1/2} \|\ell w\|_{W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)}. \quad (166)$$

Procediamo osservando che

$$\|\ell w\|_{W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \|\ell w\|_{L^{3/2}(\Omega)} + \|w \nabla \ell\|_{L^{3/2}(\Omega)} + \|\ell \nabla w\|_{L^{3/2}(\Omega)} =: \sum_{i=1}^3 \mathcal{T}_i. \quad (167)$$

Il nostro obbiettivo è ora stimare i tre termini \mathcal{T}_i a secondo membro. Abbiamo

$$\mathcal{T}_1 = \|\ell w\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \|\ell\| \|w\|_{L^6(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^4(\Omega)}^2) \|w\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|w\|_V. \quad (168)$$

Qui e nel seguito abbiamo indicato con C (maiuscolo) una generica costante che dipende dalle norme di u e di v già stimate (e dunque, di fatto, dal raggio dell'insieme assorbente).

Passiamo ora al secondo termine, che è il più delicato:

$$\mathcal{T}_2 = \|w \nabla \ell\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \|w\|_{L^p(\Omega)} (1 + \|\nabla u\| \| |u|^{1-\epsilon} \|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla v\| \| |v|^{1-\epsilon} \|_{L^q(\Omega)}), \quad (169)$$

dove p e q sono tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

e $\epsilon > 0$ è esattamente pari a $3 - p$, dove p è la crescita di f (cfr. (151)). Scegliendo allora q tale che $(1 - \epsilon)q = 6$, osservando che di conseguenza $p < +\infty$ e quindi vale l'immersione continua $H^{3/2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, otteniamo allora

$$\mathcal{T}_2 \leq \|w\|_{3/2} (1 + \|\nabla u\| \| |u|^{1-\epsilon} \|_{L^6(\Omega)} + \|\nabla v\| \| |v|^{1-\epsilon} \|_{L^6(\Omega)}) \leq C \|w\|_{3/2}. \quad (170)$$

Infine, riguardo all'ultimo termine in (167), abbiamo

$$\mathcal{T}_3 = \|\ell \nabla w\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} (1 + \|u\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^6(\Omega)}^2) \leq C \|w\|_{3/2}. \quad (171)$$

Mettendo assieme le ultime relazioni e spaccando il secondo membro di (166) tramite la disuguaglianza di Young, possiamo riscrivere la (164) nella forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|w_t\|_{1/2}^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{3/2}^2 \right] \leq C(1 + \|w_t\|_{1/2}^2 + \|w\|_{3/2}^2), \quad (172)$$

da cui, applicando il lemma di Gronwall,

$$\frac{1}{2} \|w_t(t)\|_{1/2}^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_{3/2}^2 \leq C(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (173)$$

dove $C(t)$ dipende solo dal raggio dell'insieme assorbente e da t (e, in effetti, cresce esponenzialmente rispetto a t).

Mettendo assieme la (162) e la (173) si vede allora che, se \mathcal{B}_0 è un insieme limitato, assorbente e positivamente invariante per il sistema dinamico $S(\cdot)$ su $\mathcal{V}_0 = V \times H$ associato all'equazione (149), allora per ogni $t > 0$ esiste un insieme compatto $K(t)$ (in particolare, $K(t)$ è limitato in $H^{3/2}(\Omega) \times H^{1/2}(\Omega)$ grazie alla (173)) tale per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)\mathcal{B}_0, K(t)) = 0. \quad (174)$$

Tale condizione è sufficiente a garantire l'esistenza dell'attrattore universale per $S(\cdot)$ grazie ai risultati generali della teoria (vedi in particolare [4, Corollary 3.37]). ■

4 Attrattori di sistemi dipendenti da un parametro e semi-continuità superiore

References

- [1] V. Barbu, "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces", Noordhoff, Leyden, 1976.
- [2] H. Brézis, "Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert", North-Holland Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] H. Brézis, "Analisi Funzionale", Liguori Editore, 1986.

- [4] C. Cavaterra and E. Rocca, Dispensa del corso di “Equazioni alle Derivate Parziali II”, Università degli Studi di Milano.
- [5] G. Gilardi, Dispensa “Equazioni Paraboliche Astratte - Impostazione Variazionale”, Università degli Studi di Pavia.
- [6] V. Pata and S. Zelik, *A result on the existence of global attractors for semigroups of closed operators*, Commun. Pure Appl. Anal., **6** (2007), 481–486.
- [7] J.C. Robinson, “Infinite-dimensional Dynamical Systems”, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2001.
- [8] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. (4), **146** (1987), 65–96.
- [9] R. Temam, “Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics”, Springer-Verlag, New York, 1988.