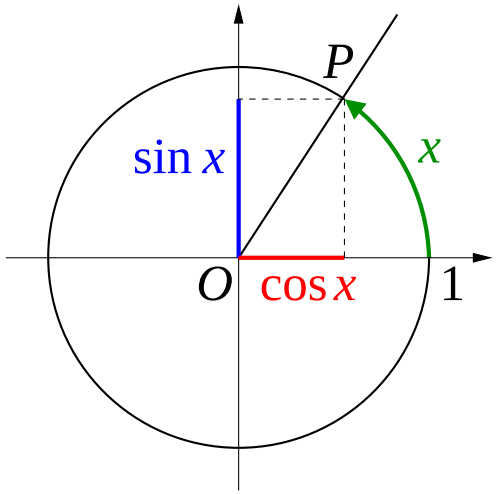
Funzioni Seno e Coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato $x \in \mathbb{R}$ si costruisce il punto P partendo da $(1,0)$ e percorrendo un arco di lunghezza $|x|$

- in senso *antiorario* se $x > 0$
- in senso *orario* se $x < 0$

Per definizione $P = (\cos x, \sin x)$.

Relazione fondamentale:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di $\sin x$:

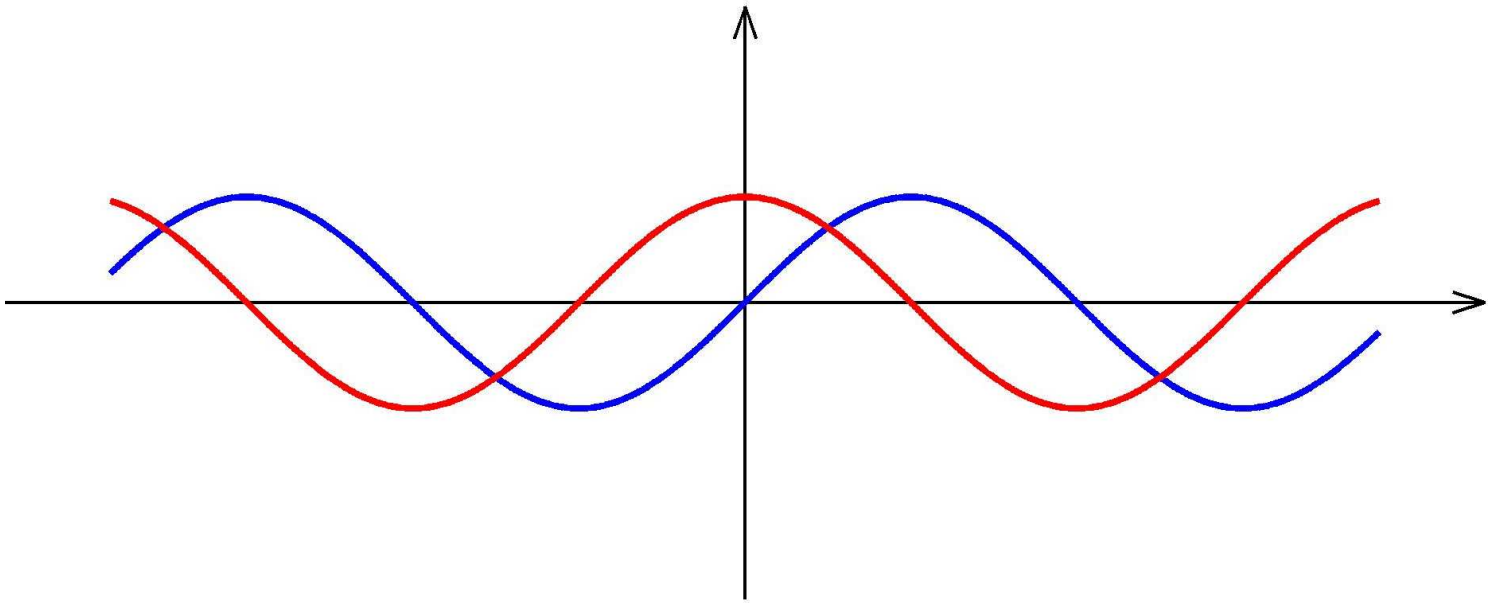
- periodica:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$
  $\sin x < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari: $\sin(-x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:
  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$
  $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

Funzioni Seno e Coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per $y = \sin x$.

Il grafico $y = \cos x$ si ottiene per traslazione poiché si ha

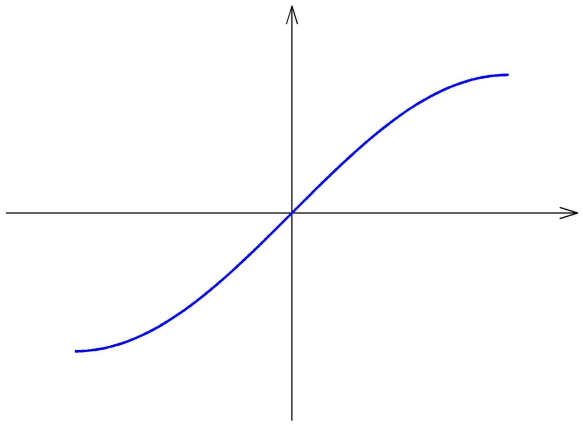
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Funzione Arcoseno

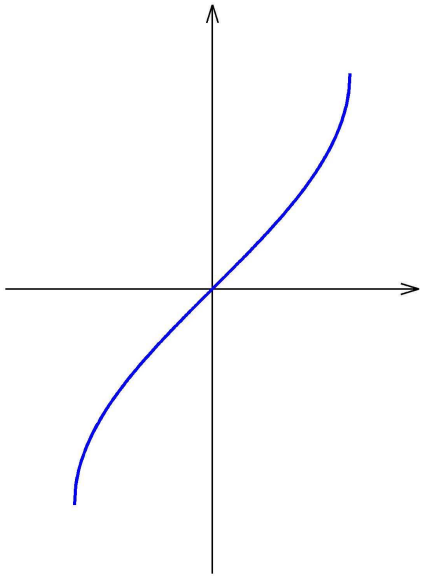
La funzione $f(x) = \sin x$ definita per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è la sua funzione inversa.



$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$f(x) = \sin x$



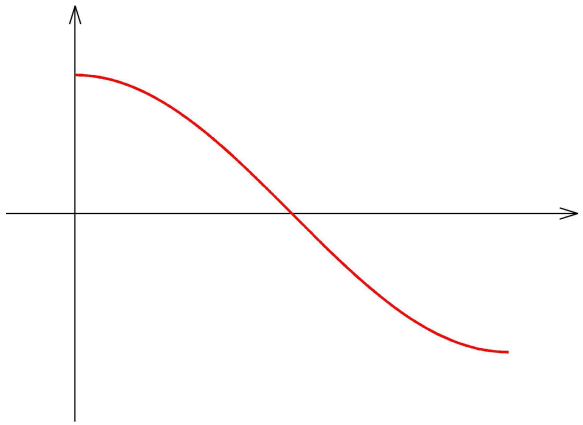
$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$

Funzione Arcocoseno

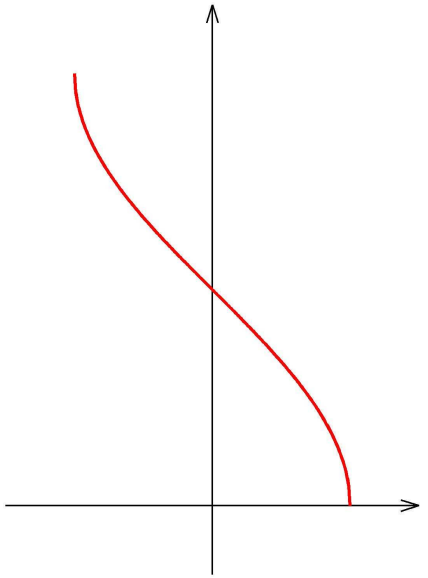
La funzione $g(x) = \cos x$ definita per $x \in [0, \pi]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ è la sua funzione inversa.



$g : [0, \pi] \to [-1, 1]$

$g(x) = \cos x$



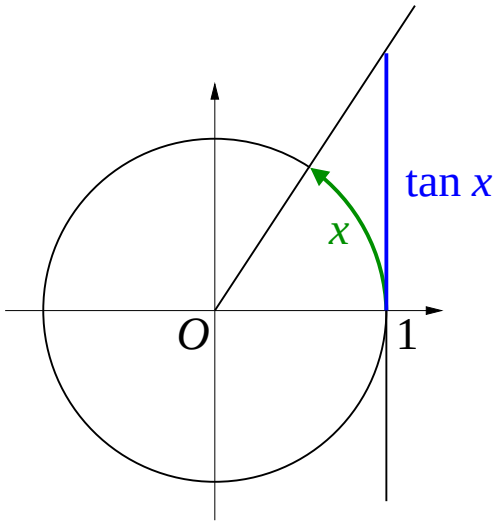
$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$g^{-1}(x) = \arccos x$

Funzione Tangente

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ per ogni $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

È una funzione periodica di periodo π e dispari.



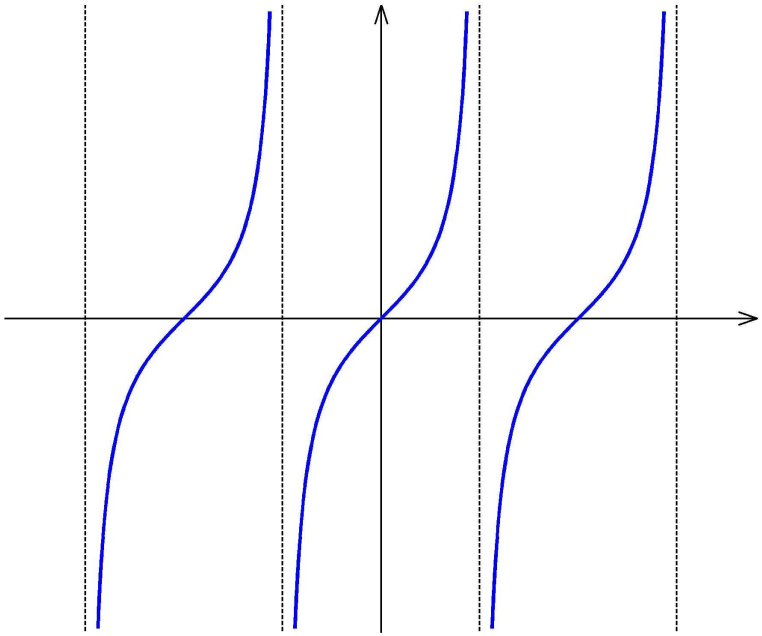
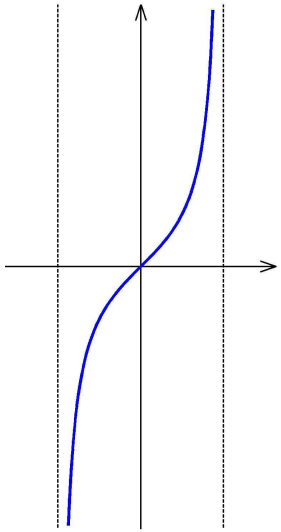


grafico di $f(x) = \tan x$

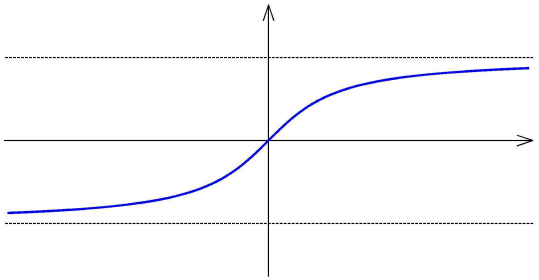
Funzione Arcotangente

La funzione $f(x) = \tan x$ definita per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a valori in $\mathbb{R}$ è biunivoca. $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è la sua funzione inversa.



$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \tan x$



$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f^{-1}(x) = \arctan x$