

# Sur la classification des coques linéairement élastiques

Adel BLOUZA

Laboratoire d'Analyse et Modélisation Stochastique,  
Université de Rouen, F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France

Franco BREZZI

Istituto di Analisi Numerica del CNR, v. Abbiategrosso 209, 27100 Pavia, Italy

Carlo LOVADINA

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale, Università degli Studi di Trento,  
38050 Via Mesiano, 77, Italy

---

**Résumé.** Les classifications des coques linéairement élastiques sont basées sur l'espace des déplacements inextensionnels (cf. [6], [10] et [11]) ou sur un critère de comparaison des énergies élastiques membranaire et en flexion (voir [8]). Nous proposons dans ce travail une autre classification selon certaines propriétés des charges agissant sur la coque.

## On the classification of linearly elastic shells

**Abstract.** *The classifications of linearly elastic shells are based on the space of inextensional displacements (cf. [6], [10] et [11]) or on a comparison criterion between the bending and membrane energy terms ([8]). The purpose of this note is to give another classification, based on certain properties of the loads applied to the shell.*

---

## Abridged English Version

In the sequel, Greek indices take their values in the set  $\{1, 2\}$  while Latin indices take their values in the set  $\{1, 2, 3\}$ . We also employ the summation convention. Let  $\omega$  be a domain of  $\mathbf{R}^2$ . The midsurface of the shell is given by  $S = \varphi(\bar{\omega})$  where  $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbf{R}^3)$  is an injective mapping. Let  $a_i$  be the covariant basis and  $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$  be the Christoffel symbols of  $S$ . We note  $a = |a_1 \wedge a_2|^2$ . If  $u \in H^1(\omega; \mathbf{R}^3)$  is a displacement of the midsurface, the linearized strain tensor and the linearized change of curvature tensor are given componentwise respectively by  $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha) \in L^2(\omega)$ , and  $\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = (\partial_{\alpha\beta} u - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho u) \cdot a_3 \in H^{-1}(\omega)$ . Let  $V = \{v \in H^1(\omega; \mathbf{R}^3), \partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3 \in L^2(\omega), v = \partial_\alpha v \cdot a_3 = 0 \text{ on } \gamma_0\}$  be the Hilbert space introduced in [2], equipped with the norm  $\|v\|_V = (\|v\|_{H^1(\omega; \mathbf{R}^3)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3\|_{L^2(\omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ . The Koiter

problem :

$$\text{Find } u_\varepsilon \in V \text{ such that } \varepsilon a^m(u_\varepsilon, v) + \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon, v) = \langle g_\varepsilon, v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V, \quad (1)$$

where  $a^m$  and  $a^f$  are defined in the French version and  $g_\varepsilon \in V'$ , has a unique solution (cf. [1] and [2]). We recall (see [10]) that  $V_1 = \{v \in V, a^m(v, w) = 0, \forall w \in V\} = \{v \in V, \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0 \text{ in } \omega\}$  is the space of linearized inextensional displacements of the midsurface  $S$ . Thanks to the continuity of the form  $a^m(v, v)$  on  $V$ ,  $V_1$  is a closed subspace of  $V$ . Thus,  $V_1$  is a Hilbert space.

The already known shell classifications of Sanchez-Palencia [10][11] and Ciarlet and his co-workers (see [6]) make an essential use of the inextensional displacement space. More precisely, a shell is *bending-dominated* if  $V_1 \neq \{0\}$ , while it is *membrane-dominated* if  $V_1 = \{0\}$ . The method used in engineering is simply based on a comparison between the bending energy term and the membrane energy term. The shell is called membrane-dominated if  $\varepsilon a^m(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \gg \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ , while it is called bending-dominated if  $\varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \gg \varepsilon a^m(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ . This point of view is not rigorous, in that the meaning of *much greater than* ( $\gg$ ) is at best “vague”. The purpose of this Note is to provide a rigorous foundation to this classification. The main novelty is that conditions on the applied loads explicitly enter as one of the leading criteria for the shell classification. In order to study the asymptotic behaviour of the problem (1) as  $\varepsilon \rightarrow 0$  we scale the load in such a way that  $g_\varepsilon(\alpha) = \varepsilon^\alpha g$ , where  $\alpha$  is a real parameter and consider the problem : Find  $u_\varepsilon(\alpha) \in V$  such that  $\varepsilon a^m(u_\varepsilon(\alpha), v) + \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon(\alpha), v) = \varepsilon^\alpha \langle g, v \rangle_{V', V}, \forall v \in V$ .

Our idea is that a proper  $\alpha$  should produce a solution  $u_\varepsilon(\alpha)$  whose elastic energy, namely  $\varepsilon a^m(u_\varepsilon(\alpha), u_\varepsilon(\alpha)) + \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon(\alpha), u_\varepsilon(\alpha))$ , is of the same order of magnitude as  $\varepsilon^\alpha$ . We show that if such an  $\alpha$  exists, then it is unique. We furthermore give a range of variability of such  $\alpha$ 's. Finally, we show that the right choice of exponent depends on the load applied to the shell. This procedure leads us to propose a shell classification which is independent of the thickness  $\varepsilon$ , but depends on the loads. It will be remarked that our approach is as rigorous as the one proposed by E. Sanchez-Palencia and P. G. Ciarlet and, at the same time, much closer to the engineering classification based on an energy criterion. This latter feature is important when considering the finite element approximation, because the knowledge of which one of the two energy terms dominates the other is crucial in designing the discrete scheme (cf. [5]).

---

## 1 Notations

Les indices et exposants grecs varient dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ , tandis que les indices et exposants latins varient dans  $\{1, 2, 3\}$ . On utilise la convention usuelle de sommation des indices répétés. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base orthonormale canonique de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^3$  muni du produit scalaire usuel. On note  $u \cdot v$  le produit scalaire de deux vecteurs de  $\mathbf{R}^3$ ,  $|u| = \sqrt{u \cdot u}$  la norme euclidienne associée et  $u \wedge v$  leur produit vectoriel.

Soit  $\omega$  un domaine lipschitzien de  $\mathbf{R}^2$ . On considère une coque de surface moyenne  $S = \varphi(\bar{\omega})$  où  $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbf{R}^3)$  est une application injective telle que les vecteurs  $a_\alpha = \partial_\alpha \varphi$  sont

linéairement indépendants en tout point de  $\bar{\omega}$ . On définit le vecteur normal unitaire  $a_3 = a_1 \wedge a_2 / |a_1 \wedge a_2|$  à la surface. En tout point, les vecteurs  $a_i$  définissent la base covariante. Les vecteurs  $a^j$  de la base contravariante sont définis par les relations  $a_i \cdot a^j = \delta_i^j$  (en particulier,  $a^3 = a_3$ ) et l'on a  $a_i \in W^{1,\infty}(\omega; \mathbf{R}^3)$  et  $a^i \in W^{1,\infty}(\omega; \mathbf{R}^3)$ . On note  $a = |a_1 \wedge a_2|^2$ . Les symboles de Christoffel de la surface sont donnés par  $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \Gamma_{\beta\alpha}^\rho = a^\rho \cdot \partial_\beta a_\alpha$  et l'on a  $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \in L^\infty(\omega)$ . On suppose que la surface est encadrée par une partie  $\gamma_0$  de son bord  $\partial\omega$  et soumise à une résultante de force  $g_\varepsilon$ . Soit l'espace de Hilbert (introduit dans [2]) :

$$V = \{v \in H^1(\omega; \mathbf{R}^3), \partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3 \in L^2(\omega), v = \partial_\alpha v \cdot a_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\},$$

muni de la norme  $\|v\|_V = (\|v\|_{H^1(\omega; \mathbf{R}^3)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\partial_{\alpha\beta} v \cdot a_3\|_{L^2(\omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Le problème bidimensionnel de Koiter, qui a été justifié dans [7], consiste à trouver  $u_\varepsilon \in V$  tel que

$$\int_\omega \varepsilon a^{\alpha\beta\rho\sigma} [\gamma_{\alpha\beta}(u_\varepsilon) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{\varepsilon^2}{12} \Upsilon_{\alpha\beta}(u_\varepsilon) \Upsilon_{\rho\sigma}(v)] \sqrt{a} \, dx = \langle g_\varepsilon, v \rangle_{V',V}, \quad \forall v \in V, \quad (2)$$

où  $a^{\alpha\beta\rho\sigma} \in W^{1,\infty}(\omega)$  est un tenseur d'élasticité vérifiant les symétries usuelles, qui est uniformément strictement positif. Les tenseurs, respectivement donnés par leurs composantes covariantes,  $\gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v \cdot a_\beta + \partial_\beta v \cdot a_\alpha) \in L^2(\omega)$  et  $\Upsilon_{\alpha\beta}(v) = (\partial_{\alpha\beta} v - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho v) \cdot a_3 \in L^2(\omega)$  sont les tenseurs linéarisés de changement de la métrique et de changement de courbure de  $S$ . Il est bien connu (cf. [1] et [2]) que le problème (2) admet une unique solution dans  $V$ . Posons

$$a^m(u, v) = \int_\omega a^{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) \sqrt{a} \, dx \quad \text{et} \quad a^f(u, v) = \frac{1}{12} \int_\omega a^{\alpha\beta\rho\sigma} \Upsilon_{\alpha\beta}(u) \Upsilon_{\rho\sigma}(v) \sqrt{a} \, dx. \quad (3)$$

On rappelle (cf. [10]) que  $V_1 = \{v \in V, a^m(v, w) = 0, \forall w \in V\} = \{v \in V, \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0 \text{ dans } \omega\}$  est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles laissant invariante "au premier ordre" la métrique de  $S$ . Notons que  $V_1$  est un sous-espace fermé de  $V$  grâce à la continuité de la forme  $a^m(v, v)$ . Cet espace  $V_1$  est donc un espace de Hilbert muni de la métrique induite par celle de  $V$ . Désignons par  $V_{1,\perp}$  l'orthogonal de  $V_1$  dans  $V$  et par  $V_1^0 \subset V'$  son ensemble polaire. Lorsqu'on munit  $V$  du produit scalaire  $((a^m(v, v) + a^f(v, v))$ , l'orthogonal de  $V_1$  dans  $V$  est donné par :  $V_{1,\perp} = \{u \in V, a^f(u, v) = 0, \forall v \in V_1\}$ . Grâce à l'inégalité de Korn sur la surface  $S$ , il existe une constante  $C > 0$  vérifiant  $a^m(v, v) + a^f(v, v) \geq C \|v\|_V^2, \forall v \in V$ . Par conséquent, le problème en flexion :

$$\text{Trouver } u_1 \in V_1 \text{ tel que } a^f(u_1, v) = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in V_1, \quad (4)$$

admet une unique solution  $u_1$  dans  $V_1$ . Enfin, nous désignons par  $V_{1,\perp}^c$  le complété de  $V_{1,\perp}$  pour la norme  $a^m(v, v)^{\frac{1}{2}}$ , et par  $V^c$  le complété de  $V$  pour la norme  $(a^m(v, v) + \|v\|_{L^2(\omega; \mathbf{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}}$ . Si  $g \in (V_{1,\perp}^c)'$ , alors le problème de type membranaire :

$$\text{Trouver } u_2 \in V_{1,\perp}^c \text{ tel que } a^m(u_2, v) = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in V_{1,\perp}^c, \quad (5)$$

admet une unique solution  $u_2$  dans  $V_{1,\perp}^c$ .

## 2 Le résultat principal

L'espace des déplacements inextensionnels  $V_1$  joue un rôle fondamental dans l'approche asymptotique des coques proposée par E. Sanchez-Palencia. Dans ses travaux [10] et [11], Sanchez-Palencia a montré que le comportement asymptotique d'une coque de Koiter est décrit par un modèle limite (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) en flexion si  $V_1 \neq \{0\}$  ou par un modèle membranaire si  $V_1$  est réduit au déplacement nul. La caractérisation de l'espace  $V_1$  dépend seulement de la géométrie de la coque et des conditions aux limites cinématiques imposées. *A priori*, aucune hypothèse sur la nature des charges exercées n'intervient dans l'étude du comportement asymptotique de la coque.

Dans une autre approche, celle des ingénieurs, l'épaisseur  $\varepsilon$  de la coque ainsi que la force  $g_\varepsilon$  sont des données du problème. Il s'ensuit, en utilisant un critère de comparaison des énergies élastiques, la classification de coques suivante : si l'énergie élastique membranaire est dominante, *i.e.*,  $\varepsilon a^m(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \gg \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ , alors la coque est dite membranaire, alors que si  $\varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \gg \varepsilon a^m(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ , elle est dite en flexion. Il importe de noter que cette caractérisation est globale. Dans les couches limites, les densités locales d'énergie se comportent différemment et ce critère devient alors totalement flou.

Le but de cette note est de donner une classification de coques conciliant les deux approches décrites plus haut.

D'abord, supposons que la force  $g_\varepsilon$  est *a priori* mise à l'échelle comme suit :  $g_\varepsilon(\alpha) = \varepsilon^\alpha g$ , où  $\alpha$  est un paramètre réel. On considère alors le problème

$$\text{Trouver } u_\varepsilon(\alpha) \in V \text{ tel que } \varepsilon a^m(u_\varepsilon(\alpha), v) + \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon(\alpha), v) = \varepsilon^\alpha \langle g, v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V. \quad (6)$$

Nous étudions alors le comportement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon(\alpha)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et sa dépendance par rapport à  $\alpha$ . Un choix convenable de la mise à l'échelle, et donc du paramètre  $\alpha$ , doit fournir une solution  $u_\varepsilon(\alpha)$  pour laquelle l'énergie élastique associée,  $E(u_\varepsilon(\alpha)) = \varepsilon a^m(u_\varepsilon(\alpha), u_\varepsilon(\alpha)) + \varepsilon^3 a^f(u_\varepsilon(\alpha), u_\varepsilon(\alpha))$ , est du même ordre que  $\varepsilon^\alpha$ , signifiant ainsi que la rigidité de la coque décroît en  $\varepsilon^\alpha$ . Nous verrons qu'un tel  $\alpha$ , lorsqu'il existe, est unique. On donne aussi l'ensemble des valeurs possibles de  $\alpha$ . Enfin, on montre que le meilleur choix de  $\alpha$  dépend de la nature de la force à laquelle la coque est soumise.

Notre méthode est aussi rigoureuse que celle de Sanchez-Palencia, et en même temps assez proche de la classification des ingénieurs utilisant un critère de comparaison des énergies.

En vue d'étudier le comportement asymptotique de la coque, nous introduisons les définitions suivantes :

**Définitions 2.1** . – i) Le problème (2) est dit d'ordre  $\alpha$  s'il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\varepsilon$  telles que  $0 < C_1 \leq \varepsilon^{-\alpha} E(u_\varepsilon(\alpha)) \leq C_2$ .

ii) Le problème (2) est dit de classe  $(\alpha, 0)$  si  $\alpha = \inf\{\beta \in \mathbf{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\beta} E(u_\varepsilon(\beta)) = 0\}$ .

iii) Le problème (2) est dit de classe  $(\alpha, \infty)$  si  $\alpha = \sup\{\beta \in \mathbf{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\beta} E(u_\varepsilon(\beta)) = +\infty\}$ .

Nous avons alors les propriétés suivantes du problème de Koiter.

**Théorème 2.1** . – *Le problème (2) de Koiter possède les propriétés suivantes :*

- i) *Si le problème (2) est à la fois d'ordre  $\alpha$  et d'ordre  $\beta$ , alors  $\alpha = \beta$ .*
- ii) *Si le problème (2) est d'ordre  $\alpha$ , alors il est de classe  $(\alpha, 0)$  et de classe  $(\alpha, \infty)$ .*
- iii) *Si le problème (2) est de classe  $(\alpha_1, \infty)$  et de classe  $(\alpha_2, 0)$ , alors  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ .*

Nous montrons maintenant que les ordres et les classes du problème de Koiter se trouvent dans un intervalle bien défini. C'est l'objet des résultats suivants.

**Théorème 2.2** . – *L'énergie élastique associée au problème (6) vérifie les assertions :*

- i) *Si  $\alpha > 3$ , alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-\alpha} E(u_\varepsilon(\alpha))) = 0$ .*
- ii) *Si  $\alpha < 1$ , alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-\alpha} E(u_\varepsilon(\alpha))) = +\infty$ .*

Comme conséquence immédiate, on a le résultat suivant :

- Corollaire 2.1** . – i) *Il existe  $\alpha \geq 1$  tel que le problème (2) soit de classe  $(\alpha, \infty)$ .*  
 ii) *Il existe  $\beta \leq 3$  tel que le problème (2) soit de classe  $(\beta, 0)$ .*  
 iii) *Si le problème (2) de Koiter est d'ordre  $\alpha$ , alors  $1 \leq \alpha \leq 3$ .*

### 3 Exemples

Nous présentons dans ce paragraphe quelques exemples illustrant les résultats du corollaire 2.1. Il s'agit de résultats connus (voir [5], par exemple) sur le comportement asymptotique de la solution du problème de Koiter (2). Notons que certaines conditions sur la force fournissent l'ordre  $\alpha$  du problème. Le théorème qui suit couvre seulement les cas extrêmes  $\alpha = 1$  et 3.

**Théorème 3.1** . – *Soit  $g \in V'$  et  $g \neq 0$ .*

- i) *Supposons que  $g \notin V_1^0$ . Alors le problème (2) est d'ordre  $\alpha = 3$  et la solution  $u_1$  du problème en flexion (4) est non nulle. De plus, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a*

$$\|u_\varepsilon(3) - u_1\|_V \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^{-2} a^m(u_\varepsilon(3), u_\varepsilon(3)) \longrightarrow 0. \quad (7)$$

- ii) *Supposons que  $g \in V_1^0$ . Alors le problème (2) est d'ordre  $\alpha = 1$ . Supposons de plus que  $g \in (V_{1,\perp}^c)'$ , alors la solution  $u_2 \in V_{1,\perp}^c$  du problème de type membranaire (5) est non nulle. De plus,*

$$u_\varepsilon(1) \in V_{1,\perp}, \quad a^m(u_\varepsilon(1) - u_2, u_\varepsilon(1) - u_2) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 a^f(u_\varepsilon(1), u_\varepsilon(1)) \longrightarrow 0 \quad (8)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Remarques 3.1** . – 1) Si  $g \notin V_1^0$ , alors l'ordre du problème de Koiter est égal à 3. Il s'ensuit de (7) que le modèle limite est en flexion ou encore que l'énergie membranaire est dominée par l'énergie en flexion. Si l'ordre de Koiter est égal à 1, on déduit de (8) que le modèle limite est membranaire et que l'énergie en flexion est dominée par l'énergie membranaire lorsque  $\varepsilon$  est

suffisamment petite.

2) Les preuves des théorèmes énoncés plus haut et qui sont détaillées dans [3], utilisent essentiellement des estimations sur l'énergie élastique de la coque.

3) L'existence des comportements asymptotiques intermédiaires ( $1 < \alpha < 3$ ) a été déjà mentionnée dans ([9]). Nous illustrons, ici, ces cas par un exemple abstrait où l'on considère l'espace  $\tilde{V} \subset l^2$  défini par  $\tilde{V} = \{v = (v_n) \in l^2, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 < \infty\}$ . Son dual est donné par  $\tilde{V}' = \{g = (g_n), \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} g_n^2 < \infty\}$ . Les formes bilinéaires  $\tilde{a}^f(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n$  et  $\tilde{a}^m(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$  sont définies sur  $\tilde{V}$  et vérifient les hypothèses des sections précédentes. Alors pour  $g = (g_n) = (n^\delta)$  avec  $-1/2 < \delta < 1/2$ , nous montrons que le problème : Trouver  $u_\varepsilon \in \tilde{V}$  tel que  $\varepsilon \tilde{a}^m(u_\varepsilon, v) + \varepsilon^3 \tilde{a}^f(u_\varepsilon, v) = \langle g, v \rangle_{\tilde{V}', \tilde{V}}, \forall v \in \tilde{V}$  est d'ordre  $\alpha = 2\delta + 2$ .

**Remerciement.** Les auteurs remercient P.G. Ciarlet pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

## Références

- [1] Bernadou M., Ciarlet P.G., *Sur l'ellipticité du modèle linéaire de W. T. Koiter*, in Computing Methods and Engineering, eds. R. Glowinski and J. L. Lions, Springer, 1976.
- [2] Blouza A., Le Dret H., *Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity*, à paraître dans Quarterly of Applied Mathematics.
- [3] Blouza A., Brezzi F., Lovadina C., *A New Classification for Shell Problems*, à paraître dans Pubblicazioni IAN-CNR.
- [4] Caillerie D., *Étude générale d'un type de problèmes raides et de perturbation singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1996, 323, série I, 835-840.
- [5] Chapelle D., Bathe K.J., *Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures*, Computer and Structures, 1998, 66(1), 19-36.
- [6] Ciarlet P.G., *Introduction to Linear Shell Theory*, Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars, 1998.
- [7] Ciarlet P.G., Lods V., *Asymptotic analysis of linear elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 136, 191-200, Springer-Verlag, 1996.
- [8] Leino Y., Pitkaranta J., *On the membrane locking of h-p finite elements in a cylindrical shell problem*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37, 1053-1070.
- [9] Piila J., Leino Y., Ovaskainen O., Pitkaranta J., *Shell deformation states and the finite element method : a benchmark study of cylindrical shells*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1995, 128, 81-121.
- [10] Sanchez-Palencia E., *Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1989, 309 série I, 411-417.
- [11] Sanchez-Palencia E., *Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1989, 309 série I, 531-537.