Esercizi su: Risoluzione numerica di equazioni/sistemi differenziali
Anno Accademico 2002–2003

Esercizio 1 . Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6\ y'(x) + xy = 12x \\ y(0) \ = \ 9 \end{cases}$$

Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$. Allora il valore approssimato di $y(2)$ vale: $\boxed{}$

Esercizio 2 . Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) \ = \ 4x \\ y(0) \ = \ 2 \end{cases}$$

Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$.
Allora il valore approssimato di $y(2)$ vale: $\boxed{}$

Esercizio 3 . Applicare 2 passi del metodo di Eulero esplicito con passo $\Delta t = 0.5$ al seguente problema differenziale:

$$y'(t) \ = \ 2t\, y(t) \ + \ 4 \qquad\qquad y(0) \ = \ 1$$

Allora il valore approssimato di $y(1)$ è: $\boxed{}$

Esercizio 4 . Sia $y(x)$ la soluzione del seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) \ = \ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{y(x)}{x} & \text{per } x > 4 \\ y(4) \ = \ 2 \end{cases}$$

Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con $\Delta x = 2$
Allora si ha $y_1 \ = \ \boxed{}$

Esercizio 5 . Applicare due passi del metodo di Eulero implicito con passo $h = 2$ al problema:

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{1}{2}xy(x) + 1 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Allora il valore approssimato di $y(5)$ vale: $\boxed{}$

Esercizio 6 . Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $\Delta t = 2$ al seguente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 4 \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) + 10 \end{cases}$$

Partendo da $x_0 = 2,\ y_0 = -2$ si ha: $x_1 = \boxed{}$ $\quad y_1 = \boxed{}$

Esercizio 7 . Dato il problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = 2x - y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sia y_1 il valore ottenuto applicando un passo del metodo di Eulero esplicito e y^1 quello ottenuto applicando un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/3$.
Allora la quantità $y_1 - y^1$ vale: $\boxed{}$

Esercizio 8 . Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} 4\ x'(t) + 3\ y(t) - 1 = 0 \\ -\ 4\ y'(t) +\ x(t) + 2 = 0 \\ x(0) = 1, \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/3$. I valori approssimati di $x(1/3)$ e $y(1/3)$ così ottenuti sono: $x^1 = \boxed{}$ $\quad y^1 = \boxed{}$

b) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/3$. I valori approssimati di $x(1/3)$ e $y(1/3)$ così ottenuti sono $x^1 = \boxed{}$ $y^1 = \boxed{}$

Esercizio 9 . Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} 2\ x'(t) + 3\ y(t) + 17 = 0 \\ y'(t) +\ \ x(t) + 2 = 0 \end{cases} \qquad x(0) = 1 \text{ e } y(0) = 0\ .$$

a) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$. I valori approssimati di $x(2)$ e $y(2)$ così ottenuti sono $x^2 = \square$, $y^2 = \square$

b) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1$. I valori approssimati di $x(1)$ e $y(1)$ così ottenuti sono $x_1 = \square$, $y_1 = \square$

Esercizio 10 . Dato il problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) \ = \ 5\ \dfrac{y(x)}{x} + 2 \\ y(1) \ = \ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sia y_1 il valore ottenuto applicando un passo del metodo di Eulero esplicito e y^1 il valore ottenuto applicando un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1$. Allora la quantità $2\ y_1 + 3\ y^1$ vale: $\square$

Esercizio 11 . Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) +\ x^2 y(x) \ = \ 3\ x - 1 \\ y(0) \ = \ -1 \end{cases}$$

a) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 2$. Allora il valore approssimato di $y(2)$ vale: $\square$.

b) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 2$. Allora il valore approssimato di $y(2)$ è: $\square$

Il valore approssimato di $y(4)$ è: $\square$

Esercizio 12 . Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2\ y(x) \ = \ 16\ x + 4 \\ y(0) \ = \ 3 \end{cases}$$

a) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = \frac{1}{2}$. Allora il valore approssimato di $y(2)$ vale: $\boxed{}$.

b) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$. Allora il valore approssimato di $y(2)$ vale: $\boxed{}$.

Esercizio 13 . Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \begin{cases} y'(t) = t + e^{-y(t)} & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Sia $h > 0$ un parametro dato, siano $t_n = nh$ e $u_n \approx y(t_n)$, con $n = 0, 1, 2 \ldots$. Si svolgano i punti seguenti:

a) applicare al problema $(*)$ il metodo di Eulero esplicito per calcolare la generica iterata u_n e calcolare poi l'approssimazione di $y(t_1)$;

b) applicare al problema $(*)$ il metodo di Eulero implicito per calcolare la generica iterata u_n e calcolare un'approssimazione di u_1 applicando un passo del metodo di Newton;

Esercizio 14 . Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} u'(t) = (u(t))^4 - \dfrac{t^2}{1+t^2} & t > 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Sia h un parametro positivo dato, sia $t_n = 1 + nh$ e sia u_n un'approssimazione di $u(t_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

a) Scrivere lo schema dei trapezi per la risoluzione numerica di un generico problema di Cauchy $u'(t) = f(t, u(t))$, $u(t_0) = u_0$. Applicare poi tale schema al problema $(*)$.

b) A partire dallo schema di cui al punto **a)**, calcolare u_1 applicando un passo del metodo di Newton, partendo da u_0 (condizione iniziale del problema $(*)$).

c) Calcolare u_1 usando lo schema di Heun.

d) Confrontare fra di loro le due approssimazioni di $u(t_1)$ ottenute ai punti precedenti.

Esercizio 15 . Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \begin{cases} y'(t) = t + (y(t))^2 & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sia $h > 0$ un parametro dato, siano $t_n = nh$ e $u_n \approx y(t_n)$, con $n = 0, 1, 2 \ldots$. Si svolgano i punti seguenti:

a) applicare al problema $(*)$ il metodo di Eulero esplicito per calcolare la generica iterata u_n e calcolare poi l'approssimazione di $y(t_1)$;

b) applicare al problema $(*)$ il metodo di Eulero implicito per calcolare la generica iterata u_n e calcolare un'approssimazione di u_1 applicando un passo del metodo di Newton.

Esercizio 16 . Sia dato il seguente problema differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & t > 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Dopo averlo trasformato in un sistema si equazioni differenziali del primo ordine, si svolgano i punti seguenti:

a) Applicare il metodo di Eulero esplicito con passo h e scrivere la generica iterata.

b) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con $f(t, y(t), y'(t)) = \cos(y(t))^2 + t^3$, $\alpha = \sqrt{\pi}$, $\beta = 1$.

c) Applicare il metodo di Eulero implicito con passo h e scrivere la generica iterata.

d) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con $f(t, y(t), y'(t)) = \cos(y(t))^2 + t^3$, $\alpha = \sqrt{\pi}$, $\beta = 1$.

Esercizio 17 . Sia dato il seguente problema differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & t > 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Dopo averlo trasformato in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, si svolgano i punti seguenti:

a) indicato con h il passo di discretizzazione, applicare i metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito e dei trapezi e scrivere per ognuno la generica iterata.

b) Posto $f(t, y(t), y'(t)) = (y(t))^2 + \frac{t}{1+t^2}$, applicare un passo del metodo di Eulero implicito.

Esercizio 18 . Sia dato il seguente problema differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & t > 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Dopo averlo trasformato in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, applicare i metodi di Eulero esplicito ed Eulero implicito con passo h e scrivere per ognuno la generica iterata.

Esercizio 19 . Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(t) = e^{-y(t)} & \qquad t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Sia h un parametro positivo dato, sia $t_n = nh$ e sia y_n un'approssimazione di $y(t_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

a) Scrivere lo schema dei trapezi per la risoluzione numerica di un generico problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$.

b) Applicare lo schema di cui al punto **a)** al problema $(*)$. Sia y_1 l'approssimazione di $y(t_1)$ ottenuta con tale schema. Calcolare un'approssimazione di y_1 applicando un passo del metodo di Newton, partendo da y_0 (condizione iniziale del problema $(*)$).

Esercizio 20 . Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(*) \begin{cases} y'(t) = -10(y-1)^2 & \qquad t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Sia $h > 0$ un parametro dato, siano $t_n = nh$ e $u_n \approx y(t_n)$, con $n = 0, 1, 2 \ldots$. Si svolgano i punti seguenti:

a) applicare al problema $(*)$ i metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito e dei trapezi per calcolare la generica iterata u_n;

b) a partire dal metodo di Eulero implicito calcolare un'approssimazione di u_1 applicando un passo del metodo di Newton; applicare lo stesso procedimento a partire dal metodo dei trapezi per fornire una diversa approssimazione di u_1;

c) confrontare ciascuna delle approssimazioni ottenute al punto precedente con quella fornita dal metodo di Eulero esplicito.
