Cognome e Nome	Firma

CALCOLO NUMERICO: Appello del 22/09/2003

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Applicare un passo del metodo di Jacobi, partendo da $x^{(0)} = (2, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$x_1^{(1)} =$ ☐ , $x_2^{(1)} =$ ☐ , $x_3^{(1)} =$ ☐

(b) Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, partendo da $x^{(0)} = (1, -1, 5)^T$. Si ottiene:

$x_1^{(1)} =$ ☐ , $x_2^{(1)} =$ ☐ , $x_3^{(1)} =$ ☐

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 4y(t) - 1 = 0 & x(0) = 1 \\ \\ y'(t) - 2x(t) + 5 = 0 & y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $x(1)$ e $y(1)$ sono $x_2 =$ ☐ e $y_2 =$ ☐

(b) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1$. I valori approssimati di $x(1)$ e $y(1)$ sono

$x_1 =$ ☐ e $y_1 =$ ☐

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x) + 3}{x^2 + 4}.$$

(a) Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{-1, 0, 2\}$. Allora $P_2(1)$ vale ☐

(b) Sia $r(x)$ la retta di regressione per f rispetto ai nodi $\{-1, 0, 1\}$. Allora $r(2)$ vale ☐

Esercizio 4. Dato il parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} .$$

(a) Per quali valori di α la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$? $\boxed{}$

(b) Per quali valori di α la matrice A ammette la decomposizione di Cholesky $A = LL^T$? $\boxed{}$

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 29 & -7 \\ -2 & -7 & 11 \end{pmatrix} ,$$

(a) Si consideri la fattorizzazione di Cholesky $A = LL^T$.
Allora $l_{31} + l_{22} + l_{33}$ vale $\boxed{}$

(b) Si consideri la fattorizzazione di Gauss $A = LU$. Allora $l_{31} + u_{33}$ vale $\boxed{}$

Esercizio 6. Sia

$$E = \int_{-2}^{1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} d\,x .$$

(a) Se A_T è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula dei trapezi negli intervalli $[-2, 0]$, $[0, 1]$, allora A_T vale $\boxed{}$

(b) Se A_{PM} è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula del punto medio negli intervalli $[-2, 0]$, $[0, 1]$, allora A_{PM} vale $\boxed{}$

Ogni risposta esatta vale 2 punti. Ogni risposta sbagliata oppure non data vale 0 punti. Lo scritto si intende superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**. Durata della prova: **2 ore**.
