

CALCOLO NUMERICO: Appello del 21/07/2003

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

dove α è un parametro reale.

(a) Il metodo di Jacobi è convergente se e solo se α

(b) Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, ponendo $\alpha = 3$ e partendo da $x^{(0)} = (1, -1, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \text{[]}, \quad x_2^{(1)} = \text{[]}, \quad x_3^{(1)} = \text{[]}$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 3y(t) + 2 = 0 & x(0) = 1 \\ 3y'(t) + x(t) - 1 = 0 & y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$. I

valori approssimati di $x(2)$ e $y(2)$ sono $x_2 = \text{[]}$ e $y_2 = \text{[]}$

(b) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/2$.

I valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ sono

$$x_1 = \text{[]} \quad \text{e} \quad y_1 = \text{[]}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 4}{\cos(\pi x) + 2}.$$

(a) Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi

$\{-1, 0, 1\}$. Allora $P_2(2) - P_2(-2)$ vale

(b) Sia $r(x)$ la retta di regressione per f rispetto ai nodi $\{-1, 0, 1\}$. Allora

$r(2)$ vale

Esercizio 4. Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{5}f(-1) + \omega_1 f(-c) + \omega_2 f(c) + \frac{1}{5}f(1).$$

Determinare ω_1 , ω_2 e $0 < c < 1$ in modo che la formula di quadratura abbia ordine di precisione almeno 2.

$$\omega_1 = \boxed{}, \omega_2 = \boxed{}, c = \boxed{}.$$

Esercizio 5. Dato il parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha/2 & -1 \\ \alpha/2 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Per quali valori di α la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$? $\boxed{}$

(b) Per quali valori di α la matrice A ammette la decomposizione di Cholesky $A = LL^T$? $\boxed{}$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -7 \\ 3 & -7 & 22 \end{pmatrix},$$

(a) Si consideri la fattorizzazione di Cholesky $A = LL^T$.

Allora $l_{31} + l_{33}$ vale $\boxed{}$

(b) Si consideri la fattorizzazione di Gauss $A = LU$. Allora $l_{31} + l_{32} + u_{33}$ vale $\boxed{}$

Esercizio 7. Sia

$$E = \int_{-1}^2 \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 3} dx.$$

Se A_T è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula dei trapezi negli intervalli $[-1, 0]$, $[0, 2]$, allora A_T vale $\boxed{}$

Ogni risposta esatta vale 2 punti. Ogni risposta sbagliata oppure non data vale 0 punti. Lo scritto si intende superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**. Durata della prova: **2 ore**.
