Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni parziali degli esercizi del foglio 1.

1. Si tratta di una serie geometrica di ragione

$$r(\lambda) = 4^{\lambda} - 5$$

la quale, come noto, converge se e solo se $-1 < r(\lambda) < +1$ (nel qual caso la convergenza è assoluta). Ora $r(\lambda) = -1$ per $\lambda = 1$, $r(\lambda) = +1$ per $\lambda = \ln 6/\ln 4$ e la ragione è funzione strettamente crescente di λ. Pertanto la serie converge se e solo se

$$+1 < \lambda < \frac{\ln 6}{\ln 4} \simeq 1.29.$$

2. Si tratta anche in questo caso di una serie geometrica, la cui ragione

$$r(q) = \frac{q-1}{q+2}, \quad q > 0$$

è funzione strettamente crescente del parametro, come risulta dal calcolo della sua derivata prima

$$r'(q) = \frac{3}{(q+2)^2} > 0, \quad q > 0.$$

Poiché $r(0) = -0.5$ e $r(q) \to 1$ per $q \to \infty$, la serie converge $\forall q > 0$. La sua somma $s(q)$ può determinarsi mediante la nota formula per le serie geometriche, che in questo caso fornisce

$$s(q) = \frac{1}{1 - r(q)} = \frac{q+2}{3}, \quad q > 0.$$

3. Si consideri, per esempio, la quarta serie proposta. Il suo termine generale

$$a_n = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n + 27}$$

è asintoticamente equivalente a

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

nel senso che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{n+27} = \frac{1}{1+\frac{27}{n}} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Dalla divergenza della serie armonica generalizzata di termine generale b_n, mediante il criterio del confronto asintotico, segue la divergenza della serie di termine generale a_n.

4. Si consideri, per esempio, la quarta serie proposta. Il suo termine generale

$$a_n = \frac{1}{\sinh(n)} = \frac{2}{e^n - e^{-n}}$$

è asintoticamente equivalente a

$$b_n = \frac{2}{e^n}$$

nel senso che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2 \cdot e^n}{(e^n - e^{-n}) \cdot 2} = \frac{1}{1 + e^{-2n}} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Dalla convergenza della serie geometrica di ragione e^{-1}, mediante il criterio del confronto asintotico, segue la convergenza della serie studiata.

5. Si consideri, per esempio, la terza serie proposta. Il rapporto tra due suoi termini consecutivi vale

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1) \cdot n!}{\ln(n) \cdot (n+1)!} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n)}.$$

Poiché $r_n \to 0$, per $n \to \infty$, come può dimostrarsi, per esempio, mediante la seconda regola di *de l'Hospital*, il criterio del rapporto garantisce la convergenza.

6. Si consideri, per esempio, la terza serie proposta. La radice n-esima del suo termine n-esimo vale

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n!}{n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \to 0, \quad n \to \infty$$

pertanto si tratta di una serie convergente.

7. Si consideri, per esempio, la terza serie proposta. Il suo termine generale

$$a_n = n^{-\frac{3}{4}} \sin(n^{-\frac{1}{2}})$$

è asintoticamente equivalente a

$$b_n = n^{-\frac{5}{4}}$$

nel senso che

$$\frac{a_n}{b_n} = n^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} \sin(n^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\sin(n^{-\frac{1}{2}})}{n^{-\frac{1}{2}}} \to 1, \quad n \to \infty$$

come segue dal limite notevole

$$\frac{\sin(x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Dalla convergenza della serie armonica generalizzata di termine generale b_n, mediante il criterio del confronto asintotico, segue la convergenza della serie di termine generale a_n.

8. Dalla convergenza della serie armonica generalizzata di termine generale n^{-6}, mediante il criterio del confronto, segue la convergenza della prima serie proposta per
$$x^2 + y^2 \leq 36$$
cioè nel cerchio chiuso di raggio 6 centrato nell'origine. Per gli altri valori di x e y si ha invece divergenza, perché il termine generale non è infinitesimo. Analogamente, la seconda serie proposta converge se e solo se
$$1 - (x-16)^2 - y^2 \geq 0$$
cioè nel cerchio chiuso di raggio unitario centrato nel punto $(16, 0)$. L'insieme A richiesto non è altro che l'unione dei due cerchi sopra descritti.

9. Con argomentazioni del tutto simili a quelle svolte per risolvere l'esercizio precedente, si mostra che la prima serie proposta converge se e solo se
$$x^2 - y - 36 \leq 0$$
cioè nell'epigrafo chiuso della parabola di equazione $y = x^2 - 36$ (avente vertice in $(0, -36)$, asse di simmetria coincidente con quello delle ordinate e intersecante l'asse delle ascisse per $x = \pm 6$). La seconda serie proposta è una serie armonica generalizzata e dunque converge se e solo se
$$y - |x| + 5 < -1$$
cioè nell'ipografo aperto della curva di equazione $y = |x| - 6$. L'insieme A richiesto non è altro che l'intersezione delle due regioni di piano sopra descritte.

10. Considerando, per esempio, la terza serie proposta, si ha, per il suo termine generale, la minorazione
$$a_n = \frac{\ln n}{n+2} > \frac{1}{n+2}, \quad n > e.$$
Poiché il carattere di una serie non dipende da un numero finito di suoi termini, dalla divergenza della serie armonica si deduce la divergenza della serie oggetto di studio.

11. Si consideri, per esempio, la terza serie proposta. La radice n-esima del suo termine n-esimo vale
$$a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{\sinh^{\frac{1}{n}}(n)}{n^{\frac{n}{n}}} = \frac{(e^n - e^{-n})^{\frac{1}{n}}}{n2^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{-1}(e^{2n} - 1)^{\frac{1}{n}}}{n2^{\frac{1}{n}}}$$
e pertanto è maggiorata da
$$\frac{e^{-1}e^{\frac{2n}{n}}}{n2^{\frac{1}{n}}} = \frac{e}{n2^{\frac{1}{n}}} \to 0, \quad n \to \infty.$$
Di conseguenza il criterio della radice permette di affermare che la serie è convergente.

12. Si consideri, per esempio, la terza serie proposta. Il rapporto tra due suoi termini consecutivi vale

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n! + 5n}{(n+1)! + 5(n+1)} \sim \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty$$

dove si è indicata con $\sim$ l'equivalenza asintotica. Dunque la serie converge.

13. Occorre dimostrare che le serie sono oscillanti e i loro termini generali, presi in valore assoluto, decrescenti e infinitesimi. Nel caso della prima serie proposta l'asserto è vero, perché la funzione logaritmo è crescente, continua e si annulla sull'unità. Nel caso della seconda serie proposta è sufficiente osservare che la funzione seno è decrecente per valori dell'argomento minori dell'unità, oltre che continua e nulla in zero. Nel caso della terza serie, infine, se ne può esprimerne il termine generale, preso in modulo, come $f(n)$, dove

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \quad x > 0.$$

Per mostrare la decrescenza di f se ne può studiare la derivata

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}, \quad x > 0$$

che, in effetti, risulta sempre negativa. Inoltre

$$f(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1 - x^{-1}} \to 0, \quad x \to \infty.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni dei primi 8 esercizi del foglio 2.

1. Si tratta di una serie a termini positivi. Indicato con a_n il suo termine generale, si ha
$$a_n^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha n^2 - \frac{\ln n}{n}} \cos^4 x.$$
Il criterio della radice permette allora di affermare che
   - se $\alpha > 0$, la serie converge solamente per $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \, (k \in \mathcal{N})$;
   - se $\alpha < 0$, la serie converge per ogni x reale;
   - se $\alpha = 0$, la serie converge per ogni $x \neq k\pi \, (k \in \mathcal{N})$.

   Lo sviluppo notevole in serie di Mc-Laurin
$$\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad \forall y \in]-1,1]$$
può riscriversi
$$\ln(1-y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad \forall y \in [-1,1[$$
e di conseguenza
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n} = \frac{\ln(1+y) + \ln(1-y)}{2}, \quad \forall y \in]-1,1[.$$
Prendendo $y = \cos^2 x$, si ottiene
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^{4n} x}{n} = -\ln(1+\cos^2 x) - \ln(1-\cos^2 x) - \cos^4 x$$
per ogni $x \neq k\pi \, (k \in \mathcal{N})$.

2. Si osservi preliminarmente che l'espressione $f(x) = \log(e-x) - \cos\sqrt{\alpha x}$, dove $\alpha > 0$, è ben definita per ogni $x \in [0, e[$. Il primo termine si riscrive
$$\log(e-x) = \log e + \log\left(1 - \frac{x}{e}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)}, \quad \forall x \in [-e, e[$$
ove, nell'ultimo passaggio, si è assunta la base e per i logaritmi (altrimenti occore ricordare che $\log y = (\log e) \cdot \ln y$. Per quanto riguarda invece il secondo termine, si ha
$$\cos\sqrt{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n x^n}{(2n)!}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$
come si ricava dallo sviluppo in serie di Mc-Laurin del coseno. In definitiva, risulta
$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ne^n} + \frac{(-1)^n \alpha^n}{(2n)!} \right) x^n, \quad \forall x \in [0, e[.$$

3. La serie degli indici pari è
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2m}}{2m} = \frac{-\ln(1+3x) - \ln(1-3x)}{2}, \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right[$$
in accordo con quanto visto sopra, mentre la serie degli indici dispari è
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$
come si verifica in modo analogo. Se ne deduce
$$\sum_{n=1}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n \, \frac{x^n}{n} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) - \ln(1+3x) - \ln(1-3x)}{2}$$
per ogni $x \in]-1/3, +1/3[$.

4. Se $x = 0$, la serie converge banalmente. Altrimenti si può considerare il rapporto tra due suoi termini consecutivi, presi in valore assoluto, cioè
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} |x|^{\frac{1}{2}}$$
e dedurre dal criterio del rapporto che la serie converge assolutamente per $|x| < 1$, mentre diverge per $|x| > 1$. Se infine $|x| = 1$, allora la serie diverge, perché in tal caso il suo termine generale non è infinitesimo. Al fine di calcolare la somma, conviene osservare che il termine generale
$$a_n = x(-1)^n x^{\frac{n}{2}} + (-1)^n \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$$
si scrive come somma di un termine riconducibile alla serie geometrica di ragione $-\sqrt{x}$ e di un termine riconducibile allo sviluppo di Mc-Laurin del logaritmo naturale. La somma vale pertanto
$$s(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \ln(1+\sqrt{x}), \quad \forall x \in]-1, +1[.$$

5. Riscrivendo
$$f_\lambda(x) = x^\lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2!\, x^4} + \frac{1}{3!\, x^6} + \cdots \right)$$
e ricordando che le serie di potenze possono integrarsi termine a termine, ci si rende subito conto che $\lambda \geq 1$ implica $\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx = +\infty$. Se d'altra parte $\lambda < 1$, allora
$$\int_1^M f_\lambda(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^M \frac{x^{\lambda-2n}}{n!}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(\lambda - 2n + 1)} \left(M^{\lambda-2n+1} - 1\right)$$
dove si ha la somma di una serie convergente e di una serie di potenze di argomento $1/M$, senz'altro continua nell'origine. Pertanto
$$\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(2n - \lambda - 1)} < \infty$$
e, nel caso $\lambda = -3$, si ritrova lo sviluppo di Mc-Laurin della funzione esponenziale, cioè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)!} = (e-2)/2$.

6. Il termine generale può scriversi

$$a_n(x) = \frac{1}{x}\frac{x^{2n}}{n} + \frac{3}{x}\frac{(3x^2)^n}{n!}$$

e pertanto la somma risulta essere

$$s(x) = \frac{3}{x}(e^{3x^2} - 1) - \frac{1}{x}(\ln(1+x) + \ln(1-x))$$

per ogni $x \in]-1, 1[$.

7. La serie delle derivate è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sinh x = f'(x), \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che le serie di potenze possono essere derivate termine a termine. Poiché il primo termine dello sviluppo di f è $x^3/3$, si ha $f(0) = f'(0) = f''(0)$ e l'andamento in un intorno dell'origine è in prima approssimazione cubico.

8. In virtù della derivabilità termine a termine delle serie di potenze, posto

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+6}}{(2n)!} = x^6 \cos x$$

si ha

$$S(x) = \frac{T'(x)}{2}$$

e di conseguenza

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3x^5 \cos x - \frac{x^6}{2} \sin x \bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^6}{2^7} \simeq -7.51.$$

La risposta richiesta è pertanto $-S(\pi/2) = \pi^6/128$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni di alcuni esercizi del foglio 3.

1. Affinché la funzione f sia continua nell'origine, occorre e basta mostrare che $|f(x,y)|$ può essere reso piccolo a piacere, a patto di rendere piccola la distanza euclidea $\sqrt{x^2+y^2}$ del punto (x,y) dal punto $(0,0)$. A tal fine, si osservi che

$$f(x,y) = \frac{\sin^2(x+y)}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^2|xy|^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}.$$

Il primo fattore tende a 1, per $(x,y) \to 0$, in virtù del limite notevole

$$\frac{\sin z}{z} \to 1, \quad z \to 0$$

e della maggiorazione

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

geometricamente evidente. Basta pertanto considerare il secondo fattore, il cui valore assoluto può riscriversi

$$\left|1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \cdot |xy|^{\frac{1}{2}} \leq |xy|^{\frac{1}{2}} + 2\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}.$$

Analogamente a quanto visto sopra, si ha

$$|xy| = |x||y| \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2+y^2)$$

e pertanto il primo termine tende evidentemente a 0, per $(x,y) \to 0$, mentre il secondo termine si maggiora con

$$2\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

che, senz'altro, tende a 0, per $(x,y) \to 0$.

Le derivate parziali di f in $(0,0)$ sono entrambe nulle, perché f è identicamente nulla sugli assi coordinati. Provando, invece, a calcolare la derivata direzionale secondo il versore

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

si trova

$$\frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right)}{h} = \frac{1}{h}\frac{|h|}{\sqrt{2}}\frac{\sin^2\left(\sqrt{2}h\right)}{h^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(h)\frac{\sin(\sqrt{2}h)}{\sqrt{2}h}\frac{\sin(\sqrt{2}h)}{\sqrt{2}h}$$

e pertanto la suddetta derivata non è ben definita; più esattamente, da destra, cioè prendendo il limite per $h \downarrow 0$, si ottiene il valore $\sqrt{2}$, mentre da sinistra, cioè prendendo il limite per $h \uparrow 0$ si ottiene il valore $-\sqrt{2}$.

4. L'espressione di cui si vuole calcolare il limite per $(x, y) \to 0$ può riscriversi, mediante semplici manipolazioni algebriche, come

$$f(x,y) := \frac{xy^2 - y^2 - x^3 - x^2y^2}{(1 + x + y^2)(\sin x^2 + \sin y^2)}.$$

Procedendo lungo l'asse delle x si trova

$$f(x,0) = \frac{-x^3}{(1+x)\sin x^2} = \frac{x^2}{\sin x^2}\frac{-x}{(1+x)}$$

che tende a 0 per $x \to 0$, mentre procedendo lungo l'asse delle y si trova

$$f(0,y) = \frac{-y^2}{(1+y^2)\sin y^2} = \frac{y^2}{\sin y^2}\frac{-1}{(1+y^2)}$$

che tende a -1 per $y \to 0$. Di conseguenza, non esiste il limite richiesto.

5. Vale la maggiorazione

$$|f(x,y)| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-a}$$

e pertanto f risulta continua nell'origine se

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - a > 0$$

cioè se $a < 5/2$. Se viceversa $a \geq 5/2$, allora lungo la retta $y = x$ si ha

$$|f(x,x)| = \frac{1}{2^a}|x|^{5-2a}$$

e pertanto f non può essere continua nell'origine.

6. Le derivate richieste possono calcolarsi a partire dalla funzione

$$g(x) = x^4 \sin(2x^3)$$

derivando termine a termine il suo sviluppo in serie di Mc-Laurin

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{6n+7}.$$

Si ottiene così

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{(6n+7)!}{(6n+7-k)!} x^{6n+7-k}$$

dove la somma infinita è estesa ai valori di n tali che $6n + 7 - k \geq 0$ (il primo indice di sommatoria è pertanto $n_0 = \lceil (k-7)/6 \rceil$). Nel caso $k = 61$ si ha $n_0 = 9$ e la potenza di ordine più basso che compare nello sviluppo di $g^{(k)}$ è x^0, pertanto

$$g^{(61)}(0) = -\frac{2^{19}}{19!}\frac{61!}{0!} = -2^{20}\frac{61!}{20!}10 \simeq -2.2 \cdot 10^{72};$$

d'altra parte, nel caso $k = 23$ si ha $n_0 = 3$ e la potenza di ordine più basso che compare nello sviluppo di $g^{(k)}$ è x^2, pertanto risulta $g^{(23)}(0) = 0$.

7. Le funzioni di cui si richiede il "dominio naturale" sono quattro.

   a) La funzione
   $$f(x,y) = xy\ln(3xy)$$
   è senz'altro definita per $xy > 0$, cioè nel primo e terzo quadrante. Da $\lim_{z\downarrow 0} z\ln z = 0$ segue poi la possibilità di definire f per $x = 0$ e $y = 0$, cioè sugli assi coordinati (e in particolare nell'origine). Il suddetto limite unidimensionale può essere ricavato, per esempio, mediante la regola di *de L'Hospital* e applicato al caso bidimensionale scrivendo $f(x,y) = xy(\ln 3 + \ln xy)$.

   b) La funzione
   $$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$
   è senz'altro definita per $4 - x^2 - y^2 > 0$, cioè nel cerchio aperto di raggio 2 centrato nell'origine. D'altra parte, se (x_0, y_0) è un punto sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e $x_0 \neq 0$, allora f non può essere definita per continuità in (x_0, y_0), dal momento che $\lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = +\infty$. Se infine $x_0 = 0$, in virtù di quanto appena affermato, comunque si fissi $\epsilon > 0$, è possibile trovare un punto che disti meno di ϵ da (x_0, y_0) e nel quale la f assuma un valore grande a piacere. Dunque f non può definirsi per continuità in $(0, \pm 2)$.

   c) La funzione
   $$f(x,y) = \frac{\sqrt{\tan x}}{y}$$
   è senz'altro definita per $0 \leq x < \pi/2$ e $y \neq 0$ (ove, per semplicità, si è limitata la variabilità di x ad un solo periodo). Fissata y, $\lim_{x\to\pi/2} |f(x,y)| = \infty$ e perciò non è possibile definire per continuità f sulla retta di equazione $x = \pi/2$. D'altra parte, fissata x, $\lim_{y\to 0} |f(x,y)| = \infty$ e perciò non è possibile definire per continuità f sul segmento $[(0,0), (\pi/2, 0)]$. Di conseguenza, il "dominio naturale" di f non si estende oltre la striscia di piano sopra descritta (chiusa a sinistra, aperta a destra e privata dell'origine).

   d) La funzione
   $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - \frac{9}{4}}}{\cos(\pi x)}$$
   è senz'altro definita per $x^2 + y^2 \geq 9/4$ e $x \neq 1/2 + n\pi$, $n \in \mathcal{N}$. In altre parole f è definita al di fuori del cerchio aperto di raggio $3/2$ centrato nell'origine, ma non sulle rette di equazione $x = 1/2 + n\pi$, $n \in \mathcal{N}$; in prossimità di tali rette vengono assunti valori arbitrariamente grandi in modulo e perciò il dominio non può essere esteso.

8. Il rapporto incrementale relativo al punto $(1, 1)$ e alla direzione individuata dal versore $v = (v_x, v_y)$ è
$$\frac{f(1 + hv_x + 1 + hv_y) - f(1, 1)}{h} = e^2 \frac{e^{h(v_x+v_y)} - 1}{h} \xrightarrow{h\to 0} e^2(v_x + v_y)$$
e pertanto vale e^2 se e solo se $v_x + v_y = 1$. Dal momento che v deve essere un versore, si ha il vincolo $v_x^2 + v_y^2 = 1$; di conseguenza si hanno due sole soluzioni, vale a dire le direzioni individuate da $(0, 1)$ e $(1, 0)$ (che poi sono quelle degli assi coordinati).

9. Le funzioni di cui si richiedono le derivate parziali sono tre.

   a) La funzione
   $$f(x, y) = x^3y^3 + x \ln y, \quad y > 0$$
   ammette come derivate parziali le funzioni
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^3 + \ln y, \quad y > 0$$
   e
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^3y^2 + \frac{x}{y}, \quad y > 0.$$
   Ammette inoltre le derivate seconde
   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy^3, \quad y > 0 \\
   \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6x^3y - \frac{x}{y^2}, \quad y > 0 \\
   \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 9x^2y^2 + \frac{1}{y}, \quad y > 0 \\
   \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 9x^2y^2 + \frac{1}{y}, \quad y > 0
   \end{aligned}$$
   delle quali le ultime due (quelle miste) sono uguali non per caso.

b) La funzione
$$f(x, y, z) = \sin(3yz + 2x)$$
ammette come derivate parziali le funzioni
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2\cos(3yz + 2x) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 3z\cos(3yz + 2x) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 3y\cos(3yz + 2x)
\end{aligned}$$
ricavate per mezzo della regola di derivazione della funzione composta.

c) Analogamente si ricavano le derivate parziali della funzione
$$f(x, y) = \arcsin \frac{y}{2x - y^2}, \quad x \text{ e y “opportuni”}$$
ricordando che $\frac{d}{dz} \arcsin(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ per $-1 < z < 1$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni di alcuni esercizi del foglio 4.

1. Si cerca l'equazione del piano π tangente alla superficie $\mathcal{S}$ di equazione
$$z = f(x,y) = 2y^2 + 4xy - 3x^3$$
nel punto $P \equiv (-1, 4, f(-1,4))$. Dal momento che $f(-1,4) = 19$ e
$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,4) & = & 4y - 9x^2\big|_{x=-1,\,y=4} & = & 7 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,4) & = & 4y + 4x\big|_{x=-1,\,y=4} & = & 12 \end{array}$$
il piano π ammette equazione
$$z = 19 + 7(x+1) + 12(y-4).$$

2. Si cerca l'equazione della retta r normale alla superficie $\mathcal{S}$ di equazione
$$z = f(x,y) = -2\tan y$$
nel punto $P \equiv (-2, \pi/3, f(-2,\pi/3))$. Visto che $f(-2,\pi/3) = -2\sqrt{3}$, la derivata di f rispetto a x è identicamente nulla e
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(-2, \tfrac{\pi}{3}\right) \;=\; -2(1+\tan^2 y)\big|_{y=\frac{\pi}{3}} \;=\; -8$$
la retta r ammette equazione
$$\tfrac{x+2}{0} = \tfrac{y-\frac{\pi}{3}}{-8} = \tfrac{z+2\sqrt{3}}{-1},$$
vale a dire
$$\begin{cases} x = -2 \\ z = \frac{1}{8}y - \frac{\pi}{24} - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

3. Affinché il piano π tangente alla superficie $\mathcal{S}$ di equazione
$$z = f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 4$$
nel punto $P \equiv (x, y, f(x,y))$ sia orizzontale occorre e basta che si abbia
$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 8x - 8 & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 6y + 6 & = & 0 \end{array}$$
ovvero il piano tangente a $\mathcal{S}$ è orizzontale nel solo punto $P \equiv (1, -1, -3)$.

4. La funzione f è definita per $x + y \geq 0$. Dal momento che $f(1,0) = 0$ e
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left.\frac{\pi\cos(\pi\sqrt{x+y})}{2\sqrt{x+y}}\right|_{x=1,\,y=0} = -\frac{\pi}{2}$$
il piano π tangente al grafico di f nel punto $P \equiv (1, 0, f(1,0))$ ammette equazione
$$z = -\frac{\pi}{2}(x + y - 1).$$

5. Dal momento che

$$\nabla f(1,1) = (y\cos x, \sin x)_{x=1,\,y=1} = (\cos 1, \sin 1),$$

presa una direzione $\overrightarrow{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ che forma un angolo θ con la direzione positiva delle ascisse, si ha

$$D_{\overrightarrow{v}} f(1,1) = \overrightarrow{v} \cdot \nabla f(1,1) = \cos\theta\cos 1 + \sin\theta\sin 1 = \cos(\theta - 1).$$

Tale derivata direzionale vale $1/2$ se e solo se $\theta - 1 = \pm\pi/3$, cioè per le direzioni individuate da $\theta_1 = 1 + \pi/3$ e $\theta_2 = 1 - \pi/3$.

8. Affinché il piano π di equazione

$$z = 2x + 14y + 6$$

sia tangente alla superficie $\mathcal{S}$ di equazione

$$z = f(x,y) = 3x^2 + 4xy - 5y^2$$

nel punto $P \equiv (x, y, f(x,y))$ occorre che si abbia

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 6x + 4y & = & 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 4x - 10y & = & 14 \end{array}$$

e cioè che sia $P \equiv (1, -1, f(1,-1))$. In effetti, l'equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ in $P \equiv (1,-1,-6)$ si scrive

$$z = -6 + 2(x-1) + 14(y+1) = 2x + 14y + 6$$

e pertanto tale piano è proprio π.

9. Dal momento che

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{y}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 1, \quad x \neq 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \sqrt[3]{x-1}, \quad x \in \mathcal{R} \end{array}$$

il gradiente di f non è definito nel punto $P \equiv (1,0)$. Occorre pertanto calcolare $D_{\overrightarrow{v}} f(1,0)$, per $\overrightarrow{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$, a partire dalla definizione:

$$D_{\overrightarrow{v}} f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{h}{2}} + 1 + \frac{h}{2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3h}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

10. Dal momento che

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & -g(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & +g(y) \end{array}$$

l'equazione del piano π tangente alla superficie $\mathcal{S}$ di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $P \equiv (-\lambda, \lambda, f(-\lambda,\lambda))$ si scrive

$$z = \int_{-\lambda}^{\lambda} g(t)\,dt - g(-\lambda)(x+\lambda) + g(\lambda)(y-\lambda).$$

Poiché g è dispari, cioè si ha $g(-t) = -g(t)$ per ogni $t \in \mathcal{R}$, l'integrale è nullo e l'equazione si semplifica come segue:

$$z = g(\lambda)(x+y).$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni parziali dei primi 7 esercizi foglio 5.

1. Si considerano i termini generali delle prime tre serie proposte:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sin e^n}{n^2+1}\right| &\leq \frac{1}{n^2+1} && \Rightarrow \text{ serie convergente,}\\
\frac{1}{\sinh n!} \leq \frac{1}{\sinh n} &\sim \frac{2}{e^n} && \Rightarrow \text{ serie convergente,}\\
\lim_n \left|\frac{-n}{\ln^2 n}\right| = \lim_n \frac{n}{2\ln n} = \lim_n \frac{n}{2} &= \infty && \Rightarrow \text{ serie divergente.}
\end{aligned}$$

2. Per quanto riguarda la prima serie, dal momento che

$$\lim_n \frac{n|x-5|}{6(n+1)} = \frac{|x-5|}{6},$$

il criterio del rapporto fornisce raggio di convergenza 6. Se $x = -1$, la serie converge per il criterio di Leibniz. Se invece $x = 11$, la serie diverge perché è la serie armonica. Dunque la serie converge per $x \in [-1, 11[$.

Per quanto riguarda invece la seconda serie, si ha

$$\lim_n \frac{|x-7|}{n} = 0$$

e pertanto, per il criterio della radice, la serie converge per ogni $x \in \mathcal{R}$.

3. Nella prima serie si riconosce lo sviluppo di Mc Laurin del coseno, onde il valore $\cos 2$ per la sua somma.

Nella seconda serie si riconosce lo sviluppo di Mc Laurin dell'esponenziale, onde il valore $6e^{36}$ per la sua somma.

Nella terza serie si riconosce lo sviluppo di Mc Laurin del coseno iperbolico, onde il valore $7\cosh 7$ per la sua somma.

4. Dallo sviluppo di Mc Laurin del logaritmo, si ricava

$$\ln(1+2x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^4)^{n+1}}{n+1}$$

e pertanto

$$f(x) = 2x^2 - 2x^6 + \frac{8}{3}x^{10} - 4x^{14} + \cdots,$$

onde

$$P'_{12}(x) = 4x - 12x^5 + \frac{80}{3}x^9$$

e quindi

$$P'_{12}(1) = -\frac{112}{3}.$$

5. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy^3\cos(x^2y^3)\ln(1+7x^2y^6)+\sin(x^2y^3)\frac{14xy^6}{1+7x^2y^6}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3x^2y^2\cos(x^2y^3)\ln(1+7x^2y^6)+\sin(x^2y^3)\frac{42x^2y^5}{1+7x^2y^6}\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= 2\cos(1)\ln(8)+\sin(1)\frac{7}{4}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) &= 3\cos(1)\ln(8)+\sin(1)\frac{21}{4}.\end{aligned}$$

La derivata direzionale di f in $(1,1)$ vale dunque

$$D_{\vec{v}}f(1,1) = \vec{v}\cdot\nabla f(1,1) = \left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cos 1\ln 8+\left(\frac{7}{8}-\frac{21\sqrt{3}}{8}\right)\sin 1$$

in corrispondenza del versore $\vec{v} = (1/2, -\sqrt{3}/2)$.

6. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2\sin(x-y)\cos(x-y)-3\cos^2(x+y)\sin(x+y)\\ &= \sin(2(x-y))-3\sin(x+y)+3\sin^3(x+y)\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -2\cos(2(x-y))-3\cos(x+y)+9\sin^2(x+y)\cos(x+y).$$

Poiché si tratta di una funzione continua dell'argomento (x,y), non c'è bisogno di calcolare l'altra derivata mista: $f_{xy} = f_{yx}$ e si trova direttamente

$$f_{xy}(1,2)-f_{yx}(3,4) = 3(\cos 7-\cos 3)+9(\sin^2 3\cos 3-\sin^2 7\cos 7).$$

7. Sia $z = f(x,y)$ l'equazione della superficie considerata, allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left.\frac{2xe^{x^2-y^3}(1+x^2y^4-y^4)}{(1+x^2y^4)^2}\right|_{x=2}^{y=1} &= +\frac{16}{25}e^3\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \left.\frac{-y^2e^{x^2-y^3}(3+3x^2y^4+4x^2y)}{(1+x^2y^4)^2}\right|_{x=2}^{y=1} &= -\frac{31}{25}e^3\end{aligned}$$

e inoltre $f(2,1) = e^3/5$. Il piano tangente in $(2,1)$ ha equazione

$$z = \frac{1}{5}e^3+\frac{16}{25}e^3(x-2)-\frac{31}{25}e^3(y-1)$$

la sua distanza dall'origine $A(0,0,0)$ vale

$$d(\pi,A) = \frac{\left|\frac{4}{25}e^3\right|}{\sqrt{\left(\frac{16}{25}e^3\right)^2+\left(\frac{31}{25}e^3\right)^2+1}} = \frac{\left|\frac{4}{5}e^3\right|}{\sqrt{16^2e^6+31^2e^6+25}}.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni di alcuni esercizi del foglio 6.

2. Per determinare massimi e minimi relativi della funzione f definita da

$$f(x,y) = (x+y)(x-y)^2, \qquad x,y \in \Re$$

si può procedere risolvendo il sistema (non lineare) di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x-y)(3x+y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -(x-y)(x+3y) &= 0. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni (punti critici) è la retta di equazione $y = x$. Per classificarli si può studiare l'incremento

$$\Delta f = f(x+h, x+k) - f(x,x) = (2x+h+k)(h-k)^2$$

e distinguere i seguenti casi:

(a) se $x > 0$, allora $\Delta f > 0$ in un intorno di (x,x) e pertanto (x,x) è un punto di minimo relativo;

(b) se invece $x < 0$, allora $\Delta f < 0$ in un intorno di (x,x) e pertanto il punto (x,x) è di massimo relativo;

(c) se infine $x = 0$, allora $\Delta f = (h+k)(h-k)^2$ e pertanto (x,x) è un punto di sella.

3. Per determinare massimi e minimi relativi della funzione f definita da

$$f(x,y) = y^2[(y+1)^2 - x^2], \qquad x,y \in \Re$$

si può procedere risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2xy^2 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y[(y+1)^2 - x^2 + y(y+1)] &= 0. \end{cases}$$

L'insieme dei punti critici è formato dall'asse delle ascisse (retta di equazione $y = 0$) e dai punti $(0,-1)$ e $(0,-1/2)$. Per classificarli si può studiare la matrice hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -2y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -2x^2 + 12y^2 + 12y + 2. \end{cases}$$

Il punto $(0,-1)$ è di sella, perché

$$H_f(0,-1) \quad = \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +2 \end{bmatrix}.$$

Il punto $(0,-1/2)$ è invece di massimo, perché

$$H_f(0,-1/2) \quad = \quad \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda infine i punti $(x,0)$ della retta delle ascisse, si ha

$$H_f(x,0) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2x^2+2 \end{bmatrix}$$

e pertanto la matrice hessiana non permette di caratterizzarli. Si può allora studiare l'incremento

$$\Delta f = f(x+h,k) - f(x,0) = k^2[(k+1)^2 - (x+h)^2],$$

osservando che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} [(k+1)^2 - (x+h)^2] = 1 - x^2,$$

e distinguere i seguenti casi:

(a) se $|x| < 1$, allora $\Delta f > 0$ in un intorno di $(x,0)$ e pertanto $(x,0)$ è un punto di minimo relativo;

(b) se invece $|x| > 1$, allora $\Delta f < 0$ in un intorno di $(x,0)$ e pertanto il punto $(x,0)$ è di massimo relativo;

(c) se infine $x = \pm 1$, allora $\Delta f = k^2[(k+1)^2 - (h \pm 1)^2]$ e pertanto i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti di sella.

Per quanto riguarda eventuali massimi e minimi assoluti, da

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty} y^2(y+1)^2 = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim_{x\to+\infty} 4 - x^2 = -\infty$$

si deduce che non ve ne sono.

4. La funzione definita da

$$f(x,y) = e^{x+y}, \qquad x,y \in \Re$$

non ammette punti critici, perché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) \neq 0, \qquad \forall (x,y) \in \Re^2.$$

7. Denotando col simbolo $\simeq$ l'uguaglianza a meno di termini di ordine superiore al quarto, si ha

$$\begin{aligned} \cos x &\simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \qquad x \in \Re \\ \frac{1}{1+y^2} &\simeq 1 - y^2 + y^4, \qquad |y| < 1 \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \cos^6 x &\simeq 1 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{6}{24}x^4 + \frac{15}{4}x^4, \qquad x \in \Re \\ \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^6 &\simeq 1 - 6y^2 + 6y^4 + 15y^4, \qquad |y| < 1. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor di ordine 4 nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \cos^6 x \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^6$$

si scrive allora

$$P_4(x,y) = 1 - 6y^2 + 21y^4 - 3x^2 + 18x^2y^2 + 4x^4.$$

10. Per determinare massimi e minimi relativi della funzione f definita da

$$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x), \qquad x,y \in \Re$$

si può procedere risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + 4y^3 - 4xy = 0. \end{cases}$$

L'insieme dei punti critici è formato dall'asse delle ascisse e dai punti $(1, \pm\sqrt{2}/2)$. Per classificarli si può studiare la matrice hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy - 4y \\ 4xy - 4y & 12y^2 + 2x^2 - 4x \end{bmatrix}.$$

I punti $(1, \pm\sqrt{2}/2)$ sono entrambi di minimo relativo, perché

$$H_f\left(1, \pm\sqrt{2}/2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda invece i punti della retta delle ascisse, occorre studiare direttamente l'incremento

$$\Delta f = f(x+h,k) - f(x,0) = k^2((x+h)^2 + k^2 - 2(x+h)).$$

Se $x < 0$ o $x > 2$, allora $\Delta f > 0$ in un intorno di $(x,0)$ che pertanto risulta un punto di minimo relativo; al contrario, se $0 < x < 2$, allora $\Delta f < 0$ in un intorno di $(x,0)$ che è dunque un punto di massimo relativo; se invece $x = 0$, allora $\Delta f = k^2((h-1)^2 + k^2 - 1)$ e pertanto $(0,0)$ è un punto di sella; se infine $x = 2$, allora $\Delta f = k^2((h+1)^2 + k^2 - 1)$ e dunque anche il punto $(2,0)$ è di sella.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni di alcuni esercizi del foglio 7.

1. La funzione f definita da

$$f(x, y) = 7x^2 + 12y^2 \qquad x, y \in \Re \tag{1}$$

è continua sull'insieme compatto rappresentato in Figura 1 e pertanto ammette massimo e minimo assoluti. Si ha $f \geq 0$ e $f(x, y) = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$, quindi l'origine è l'unico punto di minimo assoluto. Comunque si fissi P interno al dominio di interesse (o al limite sugli assi coordinati) è possibile (si veda la Figura 1) trovare P' sulla circonferenza unitaria tale che $f(P') > f(P)$. Ne segue che è sufficiente cercare il massimo assoluto di

$$f\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) = 12 - 5x^2 \qquad x \in [-1, 0],$$

ovvero f ammette un unico massimo assoluto in $(0, 1)$, dove vale 12. Più in generale, è un fatto notevole che il massimo assoluto di una forma quadratica definita positiva, ristretta alla circonferenza unitaria, si ottiene nella direzione dell'autovalore più grande (che in questo caso vale 12).

2. La funzione f definita da

$$f(x, y) = 1 + 3x + 4y \qquad x, y \in \Re \tag{2}$$

è continua sull'insieme compatto rappresentato in Figura 2 e pertanto ammette massimo e minimo assoluti. Le curve di livello di f, definite da $f(x, y) = k$ per $k \in \Re$, sono le rette di equazione

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{k - 1}{4}.$$

È allora evidente dalla Figura 2 che f ammette un unico minimo assoluto in $(0, 0)$, dove vale 1, e un unico massimo assoluto in $(0, 4)$, dove vale 17. Più in generale, è un fatto notevole che per trovare gli estremi assoluti di una forma lineare, ristretta a un simplesso, è sufficiente esplorare i vertici del simplesso (algoritmo di Dantzing).

3. La funzione f definita da

$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^3 \qquad x, y \in \Re \tag{3}$$

è continua sull'insieme compatto rappresentato in Figura 3 e pertanto ammette massimo e minimo assoluti. Si vede subito che $(0, 0)$ è l'unico punto di minimo assoluto ($f(0, 0) = 0$), mentre $(1, 1)$ è l'unico punto di massimo assoluto ($f(1, 1) = 5$); infatti f è funzione strettamente crescente di entrambi i suoi argomenti e il dominio di interesse è rettangolare.

7. Si vuole integrare la funzione f definita da

$$f(x, y) = \sin(x + y) \qquad x, y \in \Re \tag{4}$$

sull'insieme rappresentato in Figura 4. Risulta

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} \sin(x + y)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} (\sin x \cos y + \cos x \sin y)\ dxdy \\
&= \int_0^1 \cos y\, dy \int_{1-y}^{1+y} \sin x\, dx + \int_0^1 \sin y\, dy \int_{1-y}^{1+y} \cos x\, dx \\
&= \int_0^1 cosy[\cos(1 - y) - \cos(1 + y)] + \sin y[\sin(1 + y) - \sin(1 - y)]\, dy \\
&= \int_0^1 [\cos(y + 1 - y) - \cos(y + 1 + y)]\, dy \\
&= \cos 1 \int_0^1 dy + \frac{1}{2} \int_0^1 2\cos(2y + 1)\, dy \\
&= \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 3 - \frac{1}{2} \sin 1
\end{aligned}$$

cioè $I \simeq 0.19$.

8. Si vuole integrare la funzione f definita da

$$f(x, y) = xe^y \qquad x, y \in \Re \tag{5}$$

sull'insieme rappresentato in Figura 5. Risulta

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{-x}^{1-x^2} xe^y\, dxdy \\
&= \int_0^1 x\, dx \int_{-x}^{1-x^2} e^y\, dy \\
&= \int_0^1 x(e^{1-x^2} - e^{-x})\, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2xe^{1-x^2}\, dx + \int_0^1 -xe^{-x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}(1 - e) + xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\, dx \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 1 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

cioè $I \simeq 0.59$.

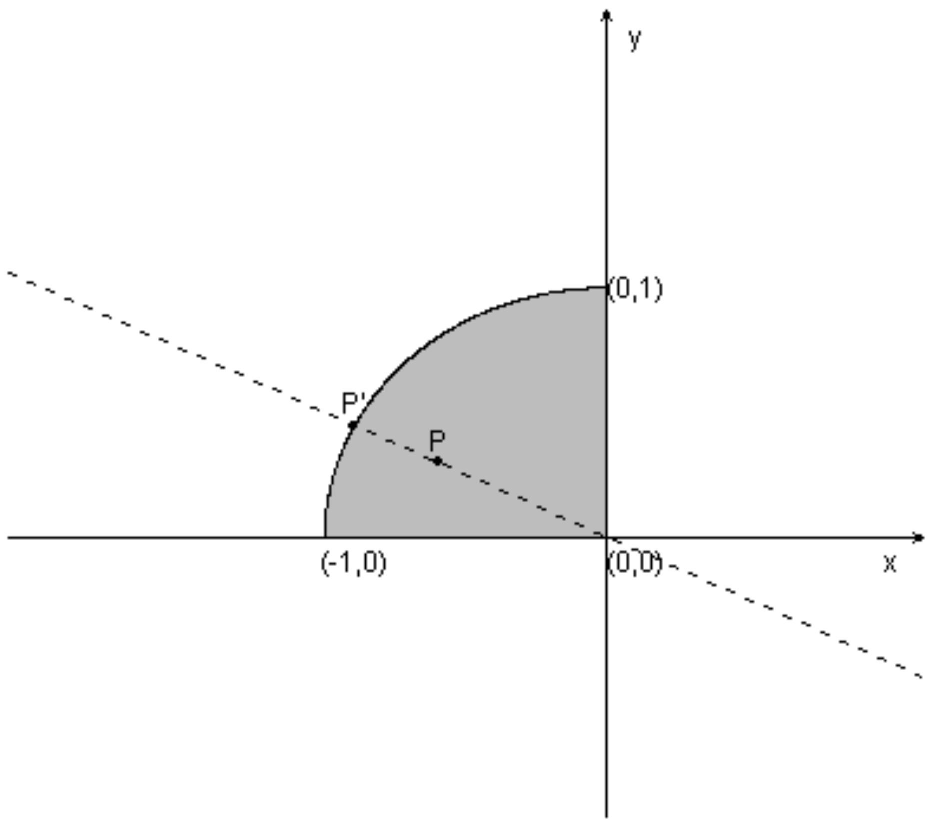


Figura 1: Dominio su cui ottimizzare la funzione definita da (1).

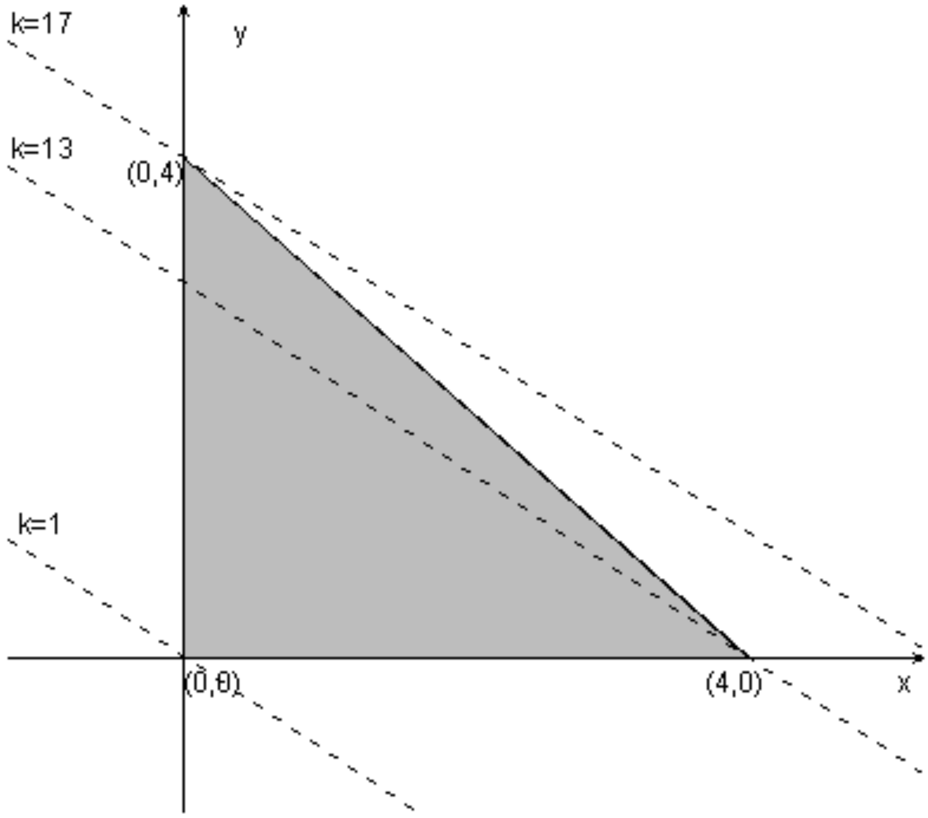


Figura 2: Dominio su cui ottimizzare la funzione definita da (2).

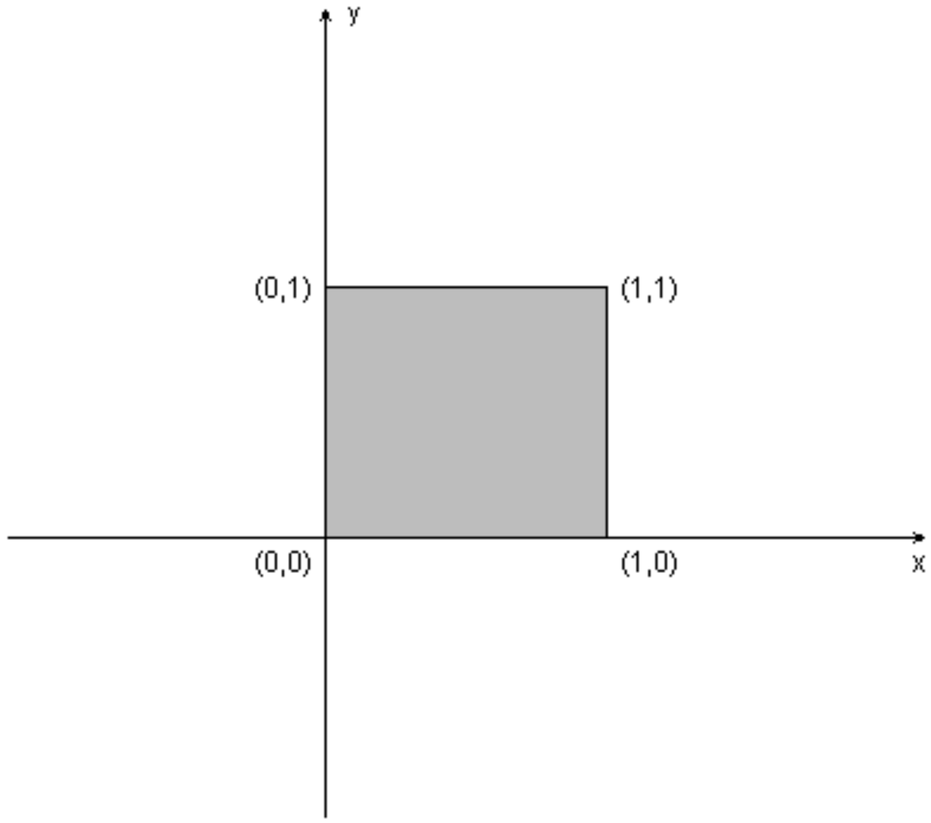


Figura 3: Dominio su cui ottimizzare la funzione definita da (3).

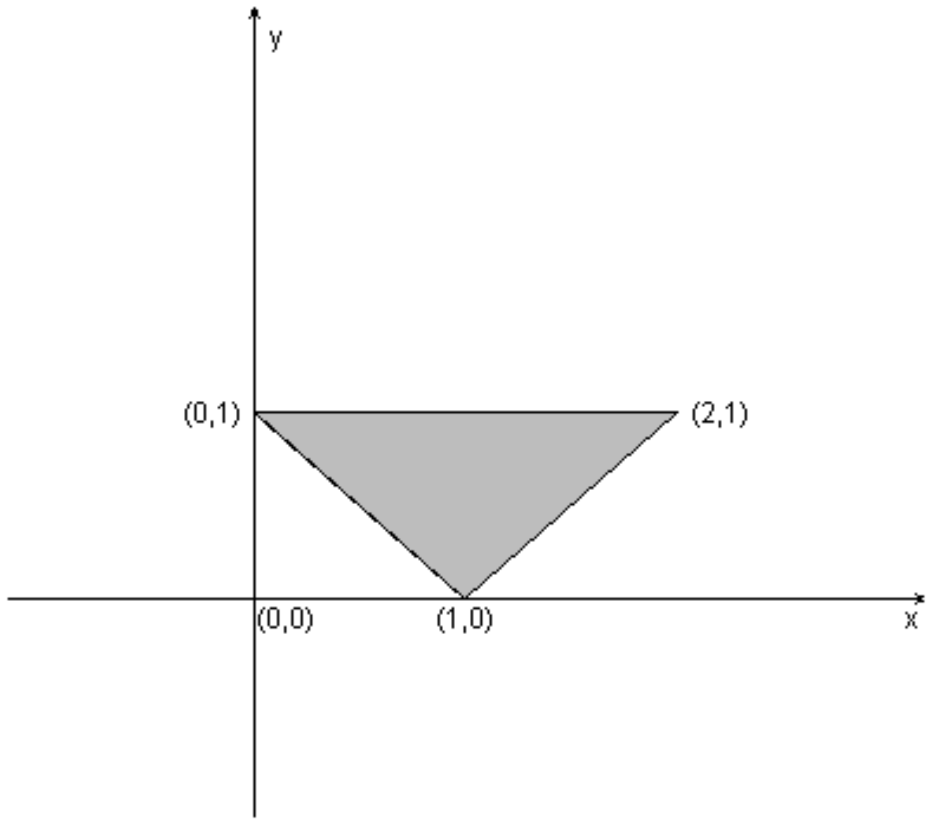


Figura 4: Dominio su cui integrare la funzione definita da (4).

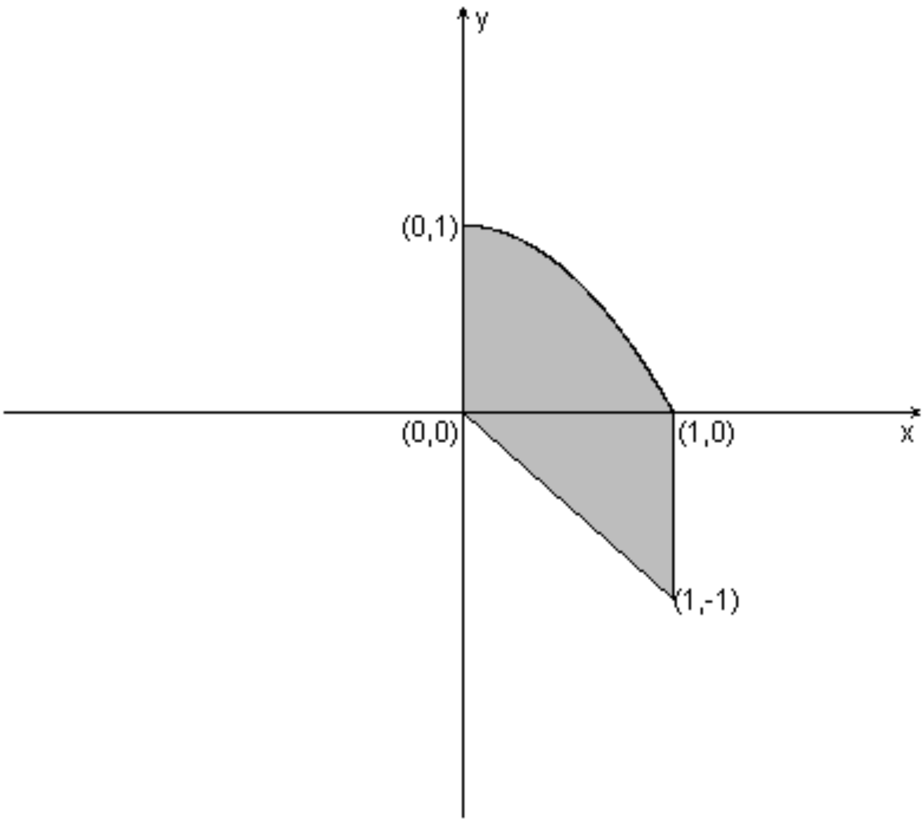


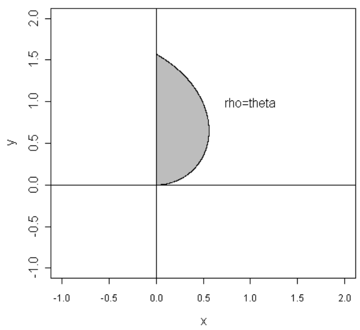
Figura 5: Dominio su cui integrare la funzione definita da (5).

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni degli esercizi dispari del foglio 8.

1. Passando in coordinate polari, l'integrale richiesto vale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 \, d\theta = \frac{1}{20} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \simeq 0.478.$$

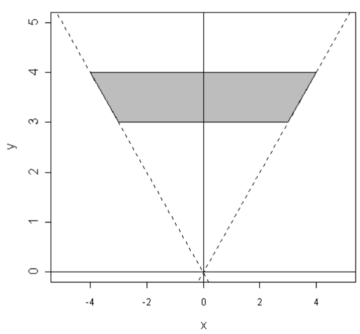


3. Passando in coordinate polari, l'integrale richiesto vale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \rho \cos\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin 2\theta \, d\theta \int_1^2 \rho \, d\rho = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \simeq 0.188.$$

5. Passando in coordinate polari, l'integrale richiesto vale

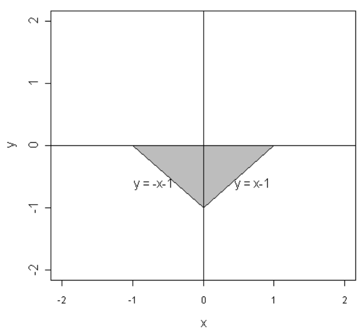
$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{3}{\sin\theta}}^{\frac{4}{\sin\theta}} \rho \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{2} \left(\frac{16}{\sin^2\theta} - \frac{9}{\sin^2\theta} \right) d\theta \\ &= 4\pi - \frac{9\pi}{4} \simeq 5.50. \end{aligned}$$



7. L'integrale richiesto vale

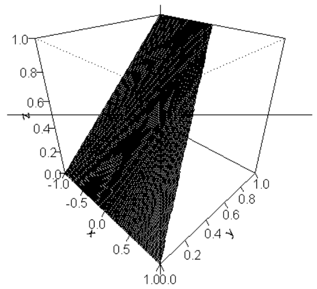
$$\begin{aligned}\int\int_T (x+y)\,dx\,dy \int_{-4}^{1} z\,dz &= -\frac{15}{2}\int\int_T (x+y)\,dx\,dy \\ &= -\frac{15}{2}\int\int_T y\,dx\,dy \\ &= -\frac{15}{2}\int_{-1}^{0} y\,dy \int_{-y-1}^{y+1} dx \\ &= -15\int_{-1}^{0}(y^2+y)\,dy \\ &= \frac{5}{2} \quad = \quad 2.5\end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che l'integrale di una funzione dispari in x, su un dominio simmetrico rispetto all'asse delle y, è senz'altro nullo.



9. Il volume richiesto vale

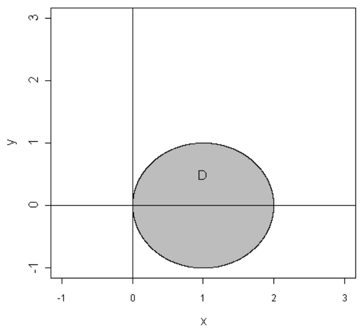
$$\begin{aligned}\int\int_T dx\,dy \int_{0}^{y+2} dz &= \int_{0}^{1}(y+2)\,dy \int_{-1}^{1-y} dx \\ &= \int_0^1 (4-y^2)\,dy \\ &= \frac{11}{3} \quad \simeq \quad 3.67.\end{aligned}$$



11. L'integrale richiesto vale

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_T \frac{xy}{\sqrt{|y|}}\,dx\,dy\,dz &= \int\!\!\int_D \frac{xy}{\sqrt{|y|}}\,dx\,dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\
&= \int\!\!\int_D \frac{xy(x^2+y^2)}{\sqrt{|y|}}\,dx\,dy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dove D è il cerchio di raggio unitario centrato in $(1,0)$ e si è sfruttato il fatto che l'integrale di una funzione dispari in y, su un dominio simmetrico rispetto all'asse delle x, è senz'altro nullo.

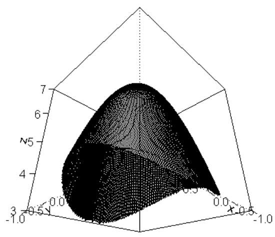


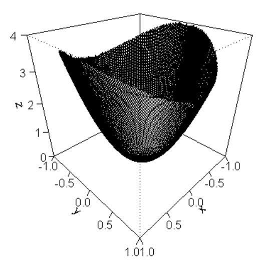
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettrica, Elettronica, Energetica ed Informatica (A–K).

Analisi Matematica B: soluzioni dei primi 6 esercizi del foglio 9.

1. Applicando il teorema della divergenza in $\Re^3$, quindi integrando rispetto a z e infine passando in coordinate polari, si ottiene:

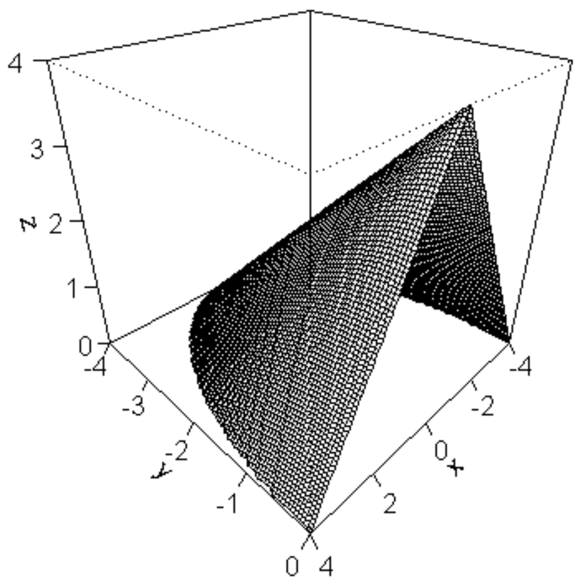
$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n_e}\, dS &= \int_V \operatorname{div} \vec{F}\,(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \int_V (x^2+y^2)\, dxdydz \\
&= \int_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\, dxdy \int_{4x^2+3y^2}^{7-3x^2-4y^2} dz \\
&= \int_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)(7-7x^2-7y^2)\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 7\rho^2(1-\rho^2)\rho\, d\rho d\theta \\
&= 14\pi \int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\, d\rho \\
&= 14\pi \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}$$





2. Applicando il teorema della divergenza in $\Re^3$, quindi integrando rispetto a z e infine passando in coordinate polari, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial T} \vec{v} \cdot \vec{n_e}\, dS &= \int_T \operatorname{div} \vec{v}\,(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \int_T 2y\, dxdydz \\
&= \int_{\substack{x^2+y^2\le 16 \\ y\le 0}} 2y\, dxdy \int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dz \\
&= \int_{\substack{x^2+y^2\le 16 \\ y\le 0}} 2y \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy \\
&= \int_{\substack{x^2+y^2\le 16 \\ y\le 0}} 8y\, dxdy - \int_{\substack{x^2+y^2\le 16 \\ y\le 0}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \\
&= 8\int_\pi^{2\pi}\int_0^4 \rho\sin\theta\rho\, d\rho d\theta - \int_\pi^{2\pi}\int_0^4 \rho\rho\, d\rho d\theta \\
&= 8\int_\pi^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^4 \rho^2\, d\rho - \int_\pi^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho^2\, d\rho \\
&= 8(-2)\frac{64}{3} - \pi\frac{64}{3} \\
&= -\frac{64}{3}(\pi+16).
\end{aligned}
$$

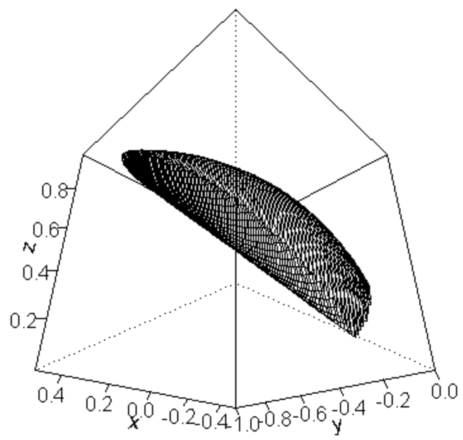


3. Si può applicare il teorema della divergenza in $\Re^3$ e successivamente integrare rispetto a z, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \vec{v} \cdot \vec{n_e}\, dS &= \int_T \operatorname{div} \vec{v}\,(x,y,z)\, dxdydz \\
&= -\int_T z\, dxdydz \\
&= -\int_{x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-(y+1)^2}} z\, dz \\
&= -\frac{1}{2}\int_{x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}} (1-x^2-(y+1)^2-x^2-y^2)\, dxdy \\
&= \int_{x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}} (x^2+y^2+y)\, dxdy.
\end{aligned}$$

Conviene a questo punto considerare la traslazione definita da $\eta = y+1/2$, $\xi = x$ e (solo) successivamente passare in coordinate polari, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \vec{v} \cdot \vec{n_e}\, dS &= \int_{\xi^2+\eta^2\le\frac{1}{4}} \left(\xi^2+\eta^2-\frac{1}{4}\right) d\xi d\eta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)\rho\, d\rho d\theta \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3\, d\rho - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \rho\, d\rho\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^5}\right) \\
&= -\frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

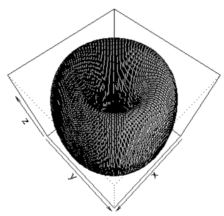


4. Applicando il teorema della divergenza in $\Re^3$, quindi integrando rispetto a z e infine passando in coordinate polari, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{n_e}\, dS &= \int_T \operatorname{div} \vec{F}\,(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \int_T \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz \\
&= \frac{3}{2}\int_{1\le x^2+y^2\le 9} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \int_{-\sqrt{1-(2-\sqrt{x^2+y^2})^2}}^{\sqrt{1-(2-\sqrt{x^2+y^2})^2}} dz \\
&= 3\int_{1\le x^2+y^2\le 9} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-(2-\sqrt{x^2+y^2})^2}\, dxdy \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_1^3 \rho\sqrt{1-(\rho-2)^2}\rho\, d\rho d\theta \\
&= 6\pi\int_1^3 \rho^2\sqrt{1-(\rho-2)^2}\, d\rho.
\end{aligned}$$

A questo punto conviene effettuare il cambio di variabile $\xi = \rho - 2$, sfruttare le simmetrie dell'integrale risultante e concludere con l'ulteriore cambio di variabile $\xi = \sin\phi$, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{n_e}\, dS &= 6\pi\int_{-1}^1 (\xi+2)^2\sqrt{1-\xi^2}\, d\xi \\
&= 6\pi\int_{-1}^1 (\xi^2+4)\sqrt{1-\xi^2}\, d\xi \\
&= 12\pi\int_0^1 (\xi^2+4)\sqrt{1-\xi^2}\, d\xi \\
&= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\phi+4)\cos\phi\cos\phi\, d\phi \\
&= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\sin^2 2\phi + 4\cos^2\phi\right) d\phi \\
&= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\phi + 2 + 2\cos 2\phi\right) d\phi \\
&= 12\pi\left(\frac{\pi}{16} - 0 + \pi + 0\right) \\
&= \frac{51}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$



5. Per la superficie Γ si può considerare la parametrizzazione

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= e^{\rho^2\cos 2\theta} \end{cases}$$

con $0 \le \theta \le \pi/2$ e $\theta \le \rho \le \pi/2$, la quale fornisce

$$\begin{aligned} \vec{n}\, dS &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= 2\rho^2 e^{\rho^2\cos 2\theta}(-\sin 2\theta\sin\theta - \cos 2\theta\cos\theta)\ \vec{i}\ + \\ &\quad +2\rho^2 e^{\rho^2\cos 2\theta}(\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta)\ \vec{j}\ + \\ &\quad +\rho\ \vec{k} \end{aligned}$$

ove $\vec{n}$ è il versore normale orientato verso l'alto. Su Γ il campo $\vec{F}$ vale

$$\begin{aligned} \vec{F}\,(\rho,\theta) &= \frac{\rho e^{\rho^2\cos 2\theta}}{1+\rho^2}\sin\theta\ \vec{i}\ + \\ &\quad +\frac{\rho e^{\rho^2\cos 2\theta}}{1+\rho^2}\cos\theta\ \vec{j}\ + \\ &\quad -\frac{1}{1+\rho^2}\ \vec{k} \end{aligned}$$

e pertanto per il flusso Φ si trova

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\rho^3 e^{2\rho^2\cos 2\theta}}{1+\rho^2}(\sin 2\theta\cos 2\theta - \cos 2\theta\sin 2\theta)\, d\rho d\theta\ + \\ &\quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{1+\rho^2}\, d\rho d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\pi^2}{4}}{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\theta^2)\, d\theta - \frac{\pi}{4}\log\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Dal momento che

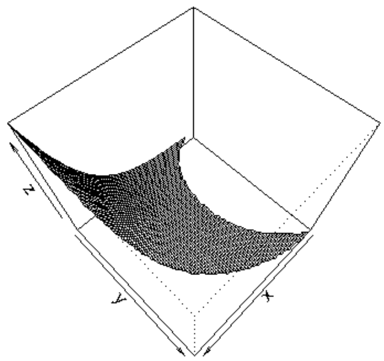
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\theta^2)\, d\theta &= \theta\log(1+\theta^2)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\frac{2\theta}{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^2}{1+\theta^2}\, d\theta \end{aligned}$$

risulta

$$\Phi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^2}{1+\theta^2}\, d\theta$$

e cioè

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\theta^2}\, d\theta \\
&= -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\pi}{2} \\
&\simeq -0.567.
\end{aligned}
$$



6. Applicando il teorema di Stokes e passando il coordinate polari, si trova

$$
\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \frac{3\rho^2\cos^2\theta}{\rho\sin\theta}\rho\, d\rho d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta \int_1^2 3\rho^2\, d\rho \\
&= 7\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta \\
&= 7\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta - 7\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \\
&= \log\left|\frac{1-cos\theta}{\sin\theta}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + 7\cos\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} \\
&\simeq 0.349.
\end{aligned}
$$