Consistenza e normalità asintotica

Definizioni ed esempi

Luca La Rocca[1]

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Insegnamento di Analisi Statistica dei Dati
Corsi di Laurea Magistrale in Informatica e Matematica
Anno Accademico 2018/2019

[1] http://personale.unimore.it/rubrica/dettaglio/llarocca

Definizione di consistenza in media quadratica

Una successione di stimatori

$$T_1 = g_1(X_1), T_2 = g_2(X_{1:2}), \ldots, T_n = g_n(X_{1:n}), \ldots$$

per $\xi = h(\theta)$ si dice consistente in media quadratica quando si abbia $T_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{P}_\theta)} h(\theta)$, per $n \to \infty$, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}_{T_n,\xi}(\theta) \to 0,$$

comunque si prenda $\theta \in H$.

Due esempi di consistenza in media quadratica

Nel caso di un campione casuale da una popolazione normale:

- $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ è consistente in media quadratica, per μ, perché $\mathrm{MSE}_{\bar{X}_n,\mu}(\mu, \sigma^2) = \sigma^2/n \to 0$, per $n \to \infty$, comunque si prendano $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$;
- $D_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$ è consistente in media quadratica, per σ^2, perché $\mathrm{MSE}_{D_n^2,\sigma^2}(\mu, \sigma^2) = \sigma^4(2n-1)/n^2 \to 0$, per $n \to \infty$, comunque si prendano $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$.

Due implicazioni della consistenza in media quadratica

Se $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ è una successione di stimatori per $\xi = h(\theta)$ consistente in media quadratica, allora necessariamente:

- $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ è asintoticamente corretta per $\xi = h(\theta)$, nel senso che
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta(T_n) = h(\theta),$$
comunque preso $\theta \in H$ (in virtù della decomposizione dell'errore quadratico medio in termini di distorsione quadratica e varianza);
- $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ è consistente in probabilità per $\xi = h(\theta)$, nel senso che $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} h(\theta)$, per $n \to \infty$, vale a dire
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(|T_n - h(\theta)| < \epsilon) \to 1, \qquad \text{per ogni } \epsilon > 0,$$
comunque preso $\theta \in H$ (in virtù della disuguaglianza di Markov).

Campione casuale da una popolazione normale

In effetti, per esempio, possiamo verificare che

- $\mathrm{B}_{\mu,\sigma^2}(D_n^2;\sigma^2) = -\sigma^2/n \to 0$, per $n \to \infty$,
  quindi D_n^2 è uno stimatore asintoticamente corretto per σ^2;
- $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}} \mu$, per $n \to \infty$,
  in virtù della Legge dei Grandi Numeri (versione debole),
  quindi $\bar{X}_n$ è uno stimatore consistente per μ.

Definizione di normalità asintotica

Una successione di stimatori

$$T_1 = g_1(X_1), T_2 = g_2(X_{1:2}), \ldots, T_n = g_n(X_{1:n}), \ldots$$

per $\xi = h(\theta)$ si dice asintoticamente normale (di ordine $1/\sqrt{n}$) quando esista una funzione $v_\infty : H \to \mathbb{R}_+^*$ (detta varianza limite) tale che $\sqrt{n}\{T_n - h(\theta)\} \xrightarrow{\mathbb{L}_\theta} \mathrm{Norm}(0, v_\infty(\theta))$, per $n \to \infty$, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta \left\{ \frac{T_n - h(\theta)}{\sqrt{v_\infty(\theta)/n}} \leq t \right\} = \Phi(t), \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

comunque preso $\theta \in H$, dove $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-x^2/2\right\}/\sqrt{2\pi}\, dx$, $t \in \mathbb{R}$, è la funzione di ripartizione normale standard.

Normalità asintotica in pratica

Se T_n è asintoticamente normale (di ordine $1/\sqrt{n}$, con varianza limite v_∞) per $\xi = h(\theta)$, quando n è "grande", possiamo approssimare la sua distribuzione con una distribuzione normale di media $h(\theta)$ e varianza $v_\infty(\theta)/n$:

$$T_n \approx \mathrm{Norm}\left(h(\theta), \frac{v_\infty(\theta)}{n}\right);$$

possiamo pertanto considerare T_n approssimativamente corretto con $\mathrm{RMSE}_{T_n,\xi}(\theta) = \sqrt{v_\infty(\theta)/n}$ e regolarci di conseguenza.

Teorema Limite Centrale

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. come X con $\mu = \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \in \mathbb{R}^*_+$, allora $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathrm{Norm}(0, \sigma^2)$, di modo che $\bar{X}_n$ è uno stimatore asintoticamente normale (di ordine $1/\sqrt{n}$) per μ con varianza limite costante (pari a σ^2) nel modello statistico di tutte le distribuzioni con varianza finita e non nulla.

In pratica, se n è "grande" e vogliamo stimare la media della popolazione X con lo stimatore $\bar{X}_n$, possiamo regolarci come se X fosse normale, purché sia ragionevole supporre che X abbia varianza finita e non nulla.