Inferenza basata sul punteggio

Un esempio particolare

Luca La Rocca[1]

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Insegnamento di Analisi Statistica dei Dati
Corsi di Laurea Magistrale in Informatica e Matematica
Anno Accademico 2018/2019

[1] http://personale.unimore.it/rubrica/dettaglio/llarocca

Pivot di Rao

L'inferenza basata sul punteggio considera come discrepanza[2] tra il parametro θ e il dato $X_{1:n}$ il pivot asintotico

$$\frac{S_{1:n}(\theta)}{\sqrt{J_{1:n}(\theta)}} \approx \mathrm{Norm}(0,1),$$

dove $S_{1:n}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(X_i|\theta)$, $\theta \in H$, è il processo di punteggio che si ottiene osservando $X_{1:n}$ come campione casuale da X avente densità $f(x|\theta)$, $x \in \mathcal{X}$, mentre $J_{1:n}(\theta) = n\,J_1(\theta) = n\,\mathbb{E}_\theta\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X|\theta)\right\}$, $\theta \in H$, è la corrispondente informazione di Fisher attesa.

La normalità asintotica del pivot di Rao è una conseguenza del Teorema Limite Centrale applicato alle variabili aleatorie $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i|\theta)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, i.i.d. con media nulla e varianza $J_1(\theta) \in\,]0, +\infty[$.

[2] si noti che $S_{1:n}(\hat{\Theta}) = 0$, se $\hat{\Theta}$ è lo stimatore di massima verosimiglianza per θ

Variazioni sul tema

Il pivot di Rao può equivalentemente scriversi come

$$\frac{S^2_{1:n}(\theta)}{J_{1:n}(\theta)} \approx \mathrm{Chisq}(1),$$

dal momento che il quadrato di una variabile normale standard segue una distribuzione chi-quadro con un singolo grado di libertà.

Una variante del pivot di Rao può scriversi come

$$\frac{S^2_{1:n}(\theta)}{I_{1:n}(\theta)} \approx \mathrm{Chisq}(1),$$

dove $I_{1:n}(\theta) = \frac{d}{d\theta} S_{1:n}(\theta)$, $\theta \in H$, è il processo di informazione di Fisher; la Legge dei Grandi Numeri comporta $n^{-1} I_{1:n}(\theta) \overset{\mathbb{P}_\theta}{\to} J_1(\theta)$ per $n \to \infty$.

Singola osservazione di Poisson

Se $Z \sim \mathrm{Pois}(e\lambda)$, si può pensare $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ con $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathrm{Pois}(e\lambda/n)$ e l'osservazione Z sarà equivalente per sufficienza all'osservazione $X_{1:n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Allora, dal processo di log-verosimiglianza $L(\lambda) \triangleq Z \log \lambda - e\lambda$, $\lambda > 0$, ricaviamo

$$S(\lambda) = \frac{Z}{\lambda} - e, \quad I(\lambda) = \frac{Z}{\lambda^2} \quad \& \quad J(\lambda) = \frac{e}{\lambda},$$

quindi

$$\frac{Z - e\lambda}{\sqrt{e\lambda}} \quad \text{oppure} \quad \frac{Z - e\lambda}{\sqrt{Z}} \; (= -\infty \text{ se } Z = 0)$$

come pivot di Rao, la cui distribuzione sarà tanto più normale quanto più $e\lambda$ sarà grande; si noti che non serve calcolare $\hat{\Lambda}$.