

BV FUNCTIONS AND VARIATIONAL MODELS IN PLASTICITY  
(A.A. 2014/2015)

Traccia degli argomenti svolti.

PARTE I: FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA (15 ore)

**1. Introduzione.** Problema di minimo per funzionali a crescita 1: motivazione per un'estensione di  $W^{1,1}$ . Richiami di Teoria della misura (in particolare: misure di Radon scalari e vettoriali e dualità rispetto agli spazi di funzioni continue; convergenze deboli).

**2. Funzioni BV: prime proprietà e caso unidimensionale.** Definizione di funzione BV. Variazione di una funzione  $L^1_{\text{loc}}$ . Uguaglianza fra  $V(u, \Omega)$  e  $|Du|(\Omega)$  se  $u \in BV(\Omega)$ . Variazione di una funzione monotona.

Caso unidimensionale: variazione puntuale ed essenziale; decomposizione in differenza di funzioni monotone. Buoni rappresentanti e loro proprietà. Caso particolare delle funzioni monotone. La funzione di Cantor.

Richiamo sulle misure di Hausdorff. Insiemi di perimetro finito: definizione ed esempi. Semicontinuità.

**3. Approssimazione con funzioni regolari.** Richiamo sulla convoluzione e sulla regolarizzazione di funzioni. Regolarizzazione di misure. Teorema di approssimazione di funzioni BV mediante convoluzioni (Anzellotti-Giaquinta). Convergenza stretta e  $w^* - BV$ .

**4. Immersioni (e disuguaglianze isoperimetriche).** Immersione di Sobolev di BV in spazi di Lebesgue e Teorema di Rellich (sfruttando il precedente risultato di approssimazione). Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger. Compattezza  $w^* - BV$  degli insiemi limitati (corollario di Rellich).

**5. Tracce ed estensioni.** Definizione di traccia al bordo per approssimazione mediante formula di integrazione per parti. Ulteriori caratterizzazioni: *i*) continuità dell'operatore di traccia rispetto alla convergenza stretta; *ii*) punti di Lebesgue. Tracce su sottoinsiemi  $C^1$ .

Estensione di una funzione BV per aperti lipschitziani. Approssimazione mediante funzioni  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**6. Continuità e differenziabilità approssimate. Decomposizione di Du.** (Cenno).

**7. Funzionali di misure e problema di minimo in BV.** Definizione di  $f(\mu)$  nel caso in cui  $f$  è una funzione positiva, convessa e positivamente 1-omogenea. Estensione al caso non 1-omogeneo. Proprietà.

Estensione del funzionale  $\int_\Omega f(Du) dx$  da  $W^{1,1}$  a BV. Il caso dei dati al bordo.

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

*Nota bibliografica.* Il riferimento principale per quanto svolto è [AFP00]. Si veda anche [Giu84].

Un'ampia esposizione della teoria della misura nell'ottica del Calcolo delle Variazioni è contenuta in [FL07], Ch. 1; si vedano anche i riferimenti classici ivi citati.

Per un approfondimento sulle misure di Hausdorff e sulla Teoria geometrica della Misura, un'ottima opera introduttiva è [Mor09].

I risultati sulle immersioni, le tracce e le estensioni sono stati presentati come conseguenza del teorema di approssimazione mediante funzioni regolari. Alternativamente (si veda, ad esempio, quanto svolto in [AFP00], Prop. 3.21), l'estensione viene fatta per riflessione dopo aver deformato il dominio con una trasformazione lipschitziana. La possibilità dell'estensione permette di riportare i risultati di immersione dimostrati su  $\mathbb{R}^n$  anche su un aperto lipschitziano ([AFP00], Cor. 3.21); mentre i risultati di traccia su sottoinsiemi interni rettificabili possono essere dapprima definiti per funzioni semplici sfruttando la teoria degli insiemi di perimetro finito e poi estesi alle funzioni  $BV$  mediante la formula di coarea ([AFP00], Th. 3.77). Le tracce al bordo ([AFP00], Th. 3.87) sono a questo punto una conseguenza del precedente risultato di estensione.

L'estensione semicontinua di un funzionale da  $W^{1,1}$  a  $BV$  (per la quale, in un contesto in parte più generale, si veda il paragrafo 5.5 in [AFP00]) riprende i risultati Goffman e Serrin [GS64] e di Giaquinta e Modica [GMS79].

Infine, da segnalare due importanti argomenti non trattati: la formula di coarea e la struttura degli insiemi di perimetro finito (frontiera ridotta): per entrambi si rimanda a [AFP00].

# Bibliografia

- [AFP00] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [FL07] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern methods in the calculus of variations:  $L^p$  spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [Giu84] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkäuser, 1984.
- [GMS79] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Functionals with linear growth in the calculus of variations. I, II. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 20(1):143–156, 157–172, 1979.
- [GS64] C. Goffman and J. Serrin. Sublinear functions of measures and variational integrals. *Duke Math. J.*, 31:159–178, 1964.
- [Mor09] Frank Morgan. *Geometric measure theory*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fourth edition, 2009. A beginner’s guide.