Metodi Matematici per l'Ingegneria - 06/09/2012

1-OT. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $\mathbf{x}^*$ un minimo relativo.

1. Scrivere la condizione necessaria del primo ordine.
2. Scrivere la condizione necessaria del secondo ordine.
3. Mostrare che le condizioni del primo e secondo ordine risultano solo necessarie verificando che per $f = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$ il punto $\mathbf{x}^* = (0,0)^T$ le verifica ma non risulta essere un punto di minimo relativo.

2-OT.

1. Assegnati il punto ed il raggio della regione di trust iniziale $(\mathbf{x}_0, h_0)$ si descrivano i passi dell'algoritmo della *trust region* per determinare a partire dalla coppia $(\mathbf{x}_k, h_k)$ l'update $(\mathbf{x}_{k+1}, h_{k+1})$:
   - dati di partenza $(\mathbf{x}_0, h_0)$
   - for k=0,......
   - con $(\mathbf{x}_k, h_k)$ ....
   - ....
   - update dell'iterata e del raggio della regione di affidabilità $(\mathbf{x}_{k+1}, h_{k+1})$
   - end
2. Si giustifichi l'utilizzo della cifra di merito η_k per valutare l'affidabilità dell'approssimazione fornita dal modello quadratico.
3. Si descrivano le proprietà di convergenza e la velocità di convergenza del metodo.

3-OT. Si consideri la funzione :

$$f(\mathbf{x}) \;=\; x_1\, e^{-x_1^2 - x_2^2} \;+\; \frac{x_1^2 + x_2^2}{20}\,.$$

1. Dal grafico della funzione dedurre il numero di minimi e massimi
2. Trovare il valore dei punti di minimo e massimo relativi mediante il metodo Quasi-Newton assegnado le seguenti **options** :
   - il tipo di problema non è LargeScale,
   - si sceglie l'update *bfgs* ,
   - la direzione iniziale sia determinata prendendo la matrice di identità scalata come matrice iniziale approssimante l'Hessiana,
   - tolleranze: TolFun:1.e-12; TolX: 1.d-12

   Si scelga inizialmente come punto di partenza $x_0 = (-6, 3)$. Allegare il listato della prova riportando i seguenti dati:

   iteration *Func-count* *f(x)* *step-size* *Firsto-Order condition*

   per le iterate 0, 1, 5, 10, 15, 20,.... e l'iterata finale.
3. Si confrontino le prestazioni del metodo *bfgs* in assenza di gradiente analitico rispetto al caso in cui si fornisce il gradiente.
4. Valutare la velocità di convergenza di convergenza del metodo senza e con utilizzo del gradiente analitico.

1-TD. Sia $f(x) = 0.75\sin(0.75x)$. Tracciare un grafico di f. Tracciare i grafici di $|c_i|$, $Re(c_i)$ e $Im(c_i)$. Commentare i risultati.

2-TD. Sia $f(x) = (x - x_0)^2 + y_0$, per $x_0 \in [0, 2\pi]$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$. Determinare analiticamente una coppia di parametri x_0 ed y_0 in modo tale che $c_0 = 0$ e $Im(c_i) = 0$ per ogni i.