

---

## Analisi D - Scritto del 20/06/2011

---

1. Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa ed isometrica (i.e. tale che  $|f(z) - f(w)| = |z - w|$  per ogni  $z, w \in \mathbb{C}$ ). Sia  $f(0) = 0$ . Dimostrare che  $f$  è una rotazione attorno all'origine.

2. Sia

$$f(z) = \frac{3}{i - z}.$$

Trovarne le espansioni in serie di centro l'origine e di centro  $i$ . Determinarne i raggi di convergenza.

3. Sia  $\mu$  una misura boreliana, positiva e finita su  $\mathbb{R}$ . Si consideri la funzione  $m(x) = \mu(-\infty, x)$ .

- Mostrare che se  $\mu \ll \mathcal{L}^1$  allora  $m$  è continua.
- Trovare un esempio in cui  $m$  non sia continua.

4. Si consideri la successione di funzioni  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}.$$

Studiarne la convergenza (q.o., q.u., in misura e in  $L^1$ ).