Analisi 4 - Scritto del 28/02/2012

1. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C$ olomorfa. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia $g_n(z) = f(z^n)$. Sia inoltre $h(z) = f(e^z)$. Calcolare (dove ha senso in funzione di n)

$$\int_C g_n(\xi)\, d\xi\,, \qquad \int_C h(\xi)\, d\xi\,,$$

dove C é la circonferenza $\partial B_r(0)$ percorsa due volte in senso orario.

2. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}\,.$$

Calcolare lo sviluppo di Laurent nelle corone circolari $C_{0,1}(0)$ e $C_{1,\infty}(0)$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \big|1 - |x|\big|_+$ (dove $|\cdot|_+$ denota la parte positiva). Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = nf(nx - (-1)^n)$. Studiarne in $\mathbb{R}$ la convergenza q.o., q.u., in misura e in L^1.

4. Sia $\mathbb{Q} = \{q_n\}$ e sia

$$\mu^* = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\delta_{q_n}\,.$$

- Verificare che μ^* è una misura esterna in $\mathbb{R}$.
- Verificare che la σ-algebra dei misurabili è tutto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- Stabilire quando due funzioni coincidono μ^*-q.o.
- Trovare una rappresentazione di
$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu^*\,.$$
- Mostrare che f limitata implica $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu^*)$.
- Mostrare che $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu^*)$ non implica f limitata.

Tempo a disposizione: 2 ore