Analisi 4 - Scritto del 30/01/2012

1. Sia $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $f(z) = f(ze^{i\phi})$ con $\phi = 2\pi/k$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Siano c_n i coefficienti della espansione di Taylor centrata nell'origine. Dimostrare che $c_n = 0$ per ogni $n \notin k\mathbb{N}$.

2. Calcolare

$$\int_C \frac{1}{z\mathrm{senh}z}\, dz\,,$$

dove C è il circuito con supporto $\partial B_4(0)$ percorso una volta in senso antiorario.

3. Si consideri la successione $u_n(t) = n^\alpha \cos(nt)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u_n \to 0$ in $L^1(0, 2\pi)$.
- Per questi α si studi la convergenza q.o., q.u. e in misura in $(0, 2\pi)$.

4. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Siano $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ misurabili (secondo Lebesgue). Siano $\mu = f\mathcal{L}^n$ ed $\eta = g\mathcal{L}^n$. Stabilire se sono vere o false (fornendo dimostrazione o controesempio) le seguenti affermazioni:

- μ, η sono finite,
- μ, η sono σ-finite,
- $\mu \ll \mathcal{L}^n$ e/o $\mathcal{L}^n \ll \mu$,
- $\mu \ll \eta$ e/o $\eta \ll \mu$,
- $\mu \perp \eta$.

Tempo a disposizione: 2 ore