Analisi 4 - Scritto del 25/06/2012

1. Sia $\ell(z) = p(x) + iq(y)$ dove $z = x + iy$, p e q funzioni reali (di variabile reale). Mostrare che ℓ è olomorfa se e solo se $\ell(z) = \alpha z + \beta$.

2. Siano $w, \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcolare

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(wz)}{\xi z} dz \,,$$

dove C è la palla unitaria percorsa due volte in senso orario.

3. Sia $f : (1, +\infty) \to [-1, 1]$ definita da

$$f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} \,,$$

dove $[x]$ è la parte intera di x. Mostrare che

- f è misurabile
- f è integrabile sui compatti
- $\int_{(1,+\infty)} f \, dx$ non è ben definito
- la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(n,n+1)} f \, dx$ converge.

Si consideri la successione di funzioni semplici $s_n = f\chi_{(1,n]}$. Studiarne la convergenza quasi-ovunque, quasi-uniforme, in misura e in L^1.

4. Sia $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Si considerino gli insiemi $E_n = \{x : f(x) \geq n\}$. Mostrare che gli E_n sono misurabili e che $\lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = 0$.

Tempo a disposizione: 2 ore