Analisi 4 - Scritto del 24/09/2012

1. Siano $u(x,y) = e^x + \cos y$ e $v(x,y) = e^y - \cos y$ parti reali e immaginaria di f. Stabilire se f è olomorfa in $\mathbb{C}$.

2. Siano $z_2 = z_1 + 1$, $p(z) = (z - z_1)^2(z - z_2)$ ed f olomorfa in $\mathbb{C}$ con $f(z_1) = 0$. Si consideri la funzione $g(z) = f(z)/p(z)$. Classificare le singolarità di g. Sia $r > \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Dimostrare che

$$\int_{\partial B_r(0)} g(w)\, dw = 2\pi i(f(z_2) - f'(z_1))\,.$$

3. Sia $f \in L^1(X \times Y, \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}), \mu \times \nu)$. Per $t \in (0, +\infty)$ sia

$$E_t = \{x \in X : t < \int_Y |f(x,y)| d\nu\}\,.$$

Mostrare che $t\mu(E_t) \leq \int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\mu \times \nu)$.

4. Si consideri lo spazio $(I, \mathcal{B})$ dove $I = (-1, 1)$ e $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei Boreliani. Data una funzione f dispari e continua su $[-1, 1]$ si definisca

$$\mu(B) = \int_B f(x)\, dx\,, \qquad \text{per } B \in \mathcal{B}.$$

Verificare che μ è una misura boreliana con segno, trovarne la parte positiva e la parte negativa. Trovare un esempio in cui f è continua solo su $(-1, 1)$ e μ non è una misura con segno. Mostrare inoltre che

- $\mu \ll \mathcal{L}^1$,
- se B è simmetrico (rispetto allo zero) allora $\mu(B) = 0$,
- trovare un esempio in cui $\int_B g\, d\mu = 0$ non implica $g = 0$.

Tempo a disposizione: 2 ore