Analisi Matematica I - 23/09/15 - Tempo a disposizione: 3h
Cognome e Nome - Firma

A1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(1+3x^2) + 3x + 3\arctan x$ nel punto di ascissa $x = 0$.

A2. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(4x)}{1-\cos(4x)} + 4^x$

A3. Trovare il modulo delle soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = 1+i$

A4.* Stabilire tutti e soli gli $\alpha > 0$ tali per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n} + n^\alpha}{n^6 \arctan \frac{1}{n}}$ converga.

A5. Sia $f(x) = x^2 - 6x^3$. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f ristretta all'intervallo $[0,1]$.

A6.* Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 3. \end{cases}$$

A7.* Calcolare $\int_0^{\pi/2} x\sin(4x)\,dx$

A8.* Sia $F(x) = \int_0^x (t^2 + \alpha t + 16)\,dt$. Calcolare $F'(x)$ e trovare tutti e soli gli α per i quali F sia crescente in tutto $\mathbb{R}$.

A9. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^6 + e^n}{e^{6n}} + 6\arctan(6^n)$

A10. Sia $f(x) = 9x^3 + 9e^x$. Sia $g(x)$ la sua funzione inversa. Si calcoli $g'(9)$.

B1. * Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e integrabile con $\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ per ogni $x \in [a,b]$ si ha $f(x) \le 1$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) > (b-a)$ $\boxed{\text{C}}$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) \le 1$ $\boxed{\text{D}}$ per ogni $x \in [a,b]$ si ha $f(x) \ge (b-a)$.

B2. * Siano $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ derivabili tali che $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \ge g'(x)$ per $x \in (0,+\infty)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x) \ge g(x)$ per $x \in (0,+\infty)$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) < g(x)$ per $x \in (0,+\infty)$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x) > g(x)$ per $x \in (-\infty,0)$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) \le g(x)$ per $x \in (0,+\infty)$.

B3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g''(x) = c \ne 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ g è un polinomio di grado due $\boxed{\text{B}}$ g è convessa $\boxed{\text{C}}$ g è concava $\boxed{\text{D}}$ g è un polinomio di grado uno.

B4. Siano a_n e b_n due successioni reali positive tali che $a_n \to 0^+$ e $b_n \to \ell$ con $\ell > 0$. Si consideri la successione $c_n = a_n/b_n$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $c_n \to 0^-$ $\boxed{\text{B}}$ $c_n \to 0^+$ $\boxed{\text{C}}$ c_n oscilla $\boxed{\text{D}}$ c_n diverge.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di minimo globale $\boxed{\text{B}}$ non esistono punti di minimo locale $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di massimo globale $\boxed{\text{D}}$ non esistono punti di massimo locale.

B6. Si consideri l'integrale $\int_0^{+\infty} (x+1)^a\,dx$ con $a \in \mathbb{R}$. Se l'integrale converge allora $\boxed{\text{A}}$ $a \le -1$ $\boxed{\text{B}}$ $a < -1$ $\boxed{\text{C}}$ $a \ge 1$ $\boxed{\text{D}}$ $a > 1$.

B7. Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora $z + \bar{z} =$ $\boxed{\text{A}}$ 2Re(z) $\boxed{\text{B}}$ Im(z) $\boxed{\text{C}}$ Re(z) $\boxed{\text{D}}$ Im(z)/2.

B8.* Sia $g(x) = |x-1|^{1/2} + o(|x-1|)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ g è derivabile in 1 $\boxed{\text{B}}$ g è continua in 1 $\boxed{\text{C}}$ g è convessa in un intorno di 1 $\boxed{\text{D}}$ g è monotona in un intorno 1.

B9. * Siano a_n una successione reale, con $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f(a_n)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ se la serie diverge allora $f(\ell) \ne 0$ $\boxed{\text{B}}$ se la serie converge allora $f(\ell) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ se la serie converge allora $f(\ell) \ne 0$ $\boxed{\text{D}}$ se la serie diverge allora $f(\ell) = 0$.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona decrescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è derivabile $\boxed{\text{B}}$ f è limitata $\boxed{\text{C}}$ f è invertibile $\boxed{\text{D}}$ f è continua.

Soluzioni della prova del 23/09/15

Parte A

A1. $y = 6x$

A2. $3/2$

A3. $\sqrt[8]{2}$

A4. $0 < \alpha < 4$

A5. $x_{max} = 1/9, \quad x_{min} = 1$

A6. $u(x) = e^{3x}$

A7. $-\pi/8$

A8. $F'(x) = x^2 + \alpha x + 16, \quad |\alpha| \leq 8$

A9. 3π

A10. $1/9$

Parte B

B1. C

B2. A

B3. A

B4. B

B5. A

B6. B

B7. A

B8. B

B9. B

B10. si consideri f strettamente decrescente - C