Analisi Matematica I - 18/06/15 - Tempo a disposizione: 3h

Cognome e Nome - Firma

A1.* Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n+3}\right)}{n!}$

Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma della serie è maggiore di e.

A2. Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2|x| + x\arctan(2x^2)\cos(x^2)\,dx.$

A3. Si calcoli $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^x-1} + 3^x + x\sin\frac{1}{x^2} =$

A4.* Si consideri, per $n \geq 1$, la successione $a_n = q^n$, dipendente dal parametro $q \geq 0$. Si calcoli, in funzione di q, il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n =$

A5. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 10 di $f(x) = \sin(2x^3)+4+x^4$.

A6. Siano $z = 1-i$ e $w = \dfrac{i}{2}$. Si calcoli, in forma algebrica, il numero complesso

$$\frac{z}{\bar{z}-w} =$$

A7. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + 4u(t) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -2. \end{cases}$$

A8.* Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^1 2x\arctan x^2\,dx.$

A9.* Trovare e classificare i punti stazionari della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x (t-1)(t^2-4)\,dt$ per $x \in \mathbb{R}$.

A10. Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ e la funzione $g(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$. Sia $h(x) = g(f(x))$. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto di ascissa $x = 0$.

B1. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua e sia $c\in(a,b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to c^+} f(x) < \lim_{x\to c^-} f(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to c^+} f(x) > \lim_{x\to c^-} f(x)$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$.

B2. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\ln(x^\lambda)$ per $x\ge 1$ e $f(x)=k(x^2-x)$ per $x<1$. Se f è derivabile in $\mathbb{R}$ allora $\boxed{\text{A}}$ $k=2\lambda+1$ $\boxed{\text{B}}$ $k=\lambda$ $\boxed{\text{C}}$ $k=\lambda+1$ $\boxed{\text{D}}$ $k=\lambda-1$.

B3. Si consideri il numero complesso $w=-3\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$. Si può scrivere $w=\rho e^{i\theta}$ per $\boxed{\text{A}}$ $\rho=6$ e $\theta=3\pi/4$ $\boxed{\text{B}}$ $\rho=6$ e $\theta=-\pi/4$ $\boxed{\text{C}}$ $\rho=3$ e $\theta=-3\pi/4$ $\boxed{\text{D}}$ $\rho=3$ e $\theta=\pi/4$.

B4. Si consideri l'integrale $\int_0^1 e^{-3\alpha}\,x^{2\alpha}\,dx$ per $\alpha\in\mathbb{R}$; $\boxed{\text{A}}$ $\alpha<1/2$ se e solo se l'integrale converge $\boxed{\text{B}}$ $\alpha>-1/2$ se e solo se l'integrale converge $\boxed{\text{C}}$ $\alpha\ge -1/2$ se e solo se l'integrale diverge $\boxed{\text{D}}$ $\alpha>1/2$ se e solo se l'integrale converge.

B5. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ limitata e integrabile. Se $c\in(a,b)$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ si può scrivere come $\boxed{\text{A}}$ $\int_a^c -f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_c^a -f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$ $\boxed{\text{D}}$ $-\int_c^a f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$.

B6.* Sia $f(x)=x+\text{segno}(x-1)+1$ e $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F è monotona in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ F è derivabile in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$ F è continua in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ F è limitata in $\mathbb{R}$.

B7. Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(1/n)$ $\boxed{\text{A}}$ diverge $\boxed{\text{B}}$ converge assolutamente $\boxed{\text{C}}$ oscilla $\boxed{\text{D}}$ converge semplicemente.

B8. * Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell$. Allora la successione $b_n=(-1)^n a_n$ è $\boxed{\text{A}}$ limitata $\boxed{\text{B}}$ monotona $\boxed{\text{C}}$ convergente $\boxed{\text{D}}$ non-convergente.

B9. * Sia $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ continua, pari e derivabile in $(-a,a)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un unico $x_0\in(-a,a)$ tale che $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0\neq 0$ tale che $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{C}}$ per ogni $x_0\in(-a,a)$ si ha $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0\in(-a,a)$ tale che $f'(x_0)=0$.

B10. * Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ superiormente limitata. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste il minimo di f in (a,b) $\boxed{\text{B}}$ esiste l'estremo inferiore di f in (a,b) $\boxed{\text{C}}$ esiste l'estremo superiore di f in (a,b) $\boxed{\text{D}}$ esiste il massimo di f in (a,b).

Soluzioni della prova del 18/06/15

Parte A

A1. per ogni α, $\alpha > 0$

A2. 2

A3. 3

A4. 0 se $q \in [0, 1)$, 1 se $q = 1$, $+\infty$ se $q > 1$

A5. $P_{10}(x) = -\frac{4}{3}x^9 + x^4 + 2x^3 + 4$

A6. $\frac{2}{5}(1 - 3i)$

A7. $u(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$

A8. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

A9. massimo locale in 1, minimo locale in 2, minimo globale in -2

A10. $y = \frac{3}{2}(1 - x)$

Parte B

B1. A

B2. B

B3. A

B4. B

B5. C

B6. C

B7. D

B8. A

B9. D

B10. C