Analisi Matematica I - 21/06/18 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1.* Determinare (graficamente) quante soluzioni ammette l'equazione $-|x| = \ln(1+3x)$.

A2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$.

A3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{-2x^2}$. Determinare, se esistono, i punti di minimo assoluto e di massimo assoluto di f.

A4.* Determinare per quali valori del parametro a converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 2^n}{n^3 + 3^n}$.

A5.* Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(\tfrac{1}{2} + t^3) \, dt$. Determinare i punti di massimo e di minimo locale di F.

A6.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{3^2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\sin\left(\frac{5}{x^2}\right) + \frac{e^{1/x}}{x^3}}$.

A7. Si consideri $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \ln(e^4 x)$. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto 1.

A8. Calcolare $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2[\cos(\pi n) + \sin(4n)]}{e^n + (n+1)^4}$.

A9. Calcolare il modulo ρ e l'argomento θ delle soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = -4i$.

A10. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 2e^{\cos(x)} - y(x)\sin(x) \\ y(0) = e. \end{cases}$

B1. Sia $p(x) = 1 - x + x^3$ il polinomio di MacLaurin di ordine 3 per una funzione f. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = p(x)+o(x^7)$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = p(x)+o(x^4)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = p(x)+o(x^5)$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = p(x)+o(x^3)$.

B2. Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\boxed{\text{B}}$ esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile in x_0. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

B3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{-x}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è decrescente. $\boxed{\text{B}}$ f è limitata. $\boxed{\text{C}}$ f non è limitata. $\boxed{\text{D}}$ f è convessa.

B4.* Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $\boxed{\text{A}}$ $\int_a^b g(t)\,dt = g(c)(b-a)$. $\boxed{\text{B}}$ $\int_a^x g(t)\,dt = g(c)(b-a)$. $\boxed{\text{C}}$ $\int_a^c g(t)\,dt = g(x)(b-a)$. $\boxed{\text{D}}$ $\int_x^b g(t)\,dt = g(c)(b-a)$.

B5.* Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, finito e $L \neq 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon$ tale che $\forall\, n > n_\epsilon\ a_n - L > \epsilon$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{L}{L+1}$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists \bar{n}$ tale che $\forall\, n > \bar{n}\ a_n \leq L$.

B6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, continua in $[0, +\infty)$, tale che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge. $\boxed{\text{B}}$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|f(x)|}\,dx$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, M > 0$ $\int_0^M f(x)\,dx$ è finito. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

B7. * Sia a_n una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n^2)$ converge. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a_n)}{(n+1)^2}$ converge. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

B8. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = b\,x^{1/2}$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = \arctan(x)$ se $x > 1$. Per quali valori del parametro b la funzione è continua: $\boxed{\text{A}}$ $b = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ $b = \frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{C}}$ nessuno. $\boxed{\text{D}}$ $b = \frac{\pi}{3}$.

B9.* Sia $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ f non ha massimo. $\boxed{\text{B}}$ f ha massimo. $\boxed{\text{C}}$ f non ha minimo. $\boxed{\text{D}}$ f ha massimo e minimo.

B10. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $x \in (0, 1)$ tale che $f'(x) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $x \in (0, 1)$ tale che $f'(x) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$.

Soluzioni della prova del 21/06/18

Parte A

A1. Tracciando i grafici e ricordardo che $\ln(1+3x) \approx 3x$ per $x \to 0$ si vede che esiste una sola intersezione, nell'origine.

A2. Integrando per parti si ottiene 1.

A3. Calcolando la derivata $f'(x) = e^{-2x^2}(1-4x^2)$ e studiandone il segno si ottiene un minimo locale in $x_0 = -\frac{1}{2}$ e un massimo locale in $x_1 = \frac{1}{2}$. Dal comportamento della funzione per $x \to \pm\infty$ si deduce che i punti sono di minimo e massimo assoluti.

A4. Trascurando n^3 al denominatore e ricordando che la serie di $(\frac{2}{3})^n$ converge resta da studiare il comportamento della serie geometrica $\sum^{\infty}(\frac{a}{3})^n$ che converge per $\left|\frac{a}{3}\right| < 1$.

A5. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale derivando F si ottiene $F'(x) = \ln(\frac{1}{2}+x^3)$. Quindi $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale mentre $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ è un minimo locale.

A6. Usando la definizione di polinomio di Taylor si ottiene $p(x) = -\frac{1}{2} + 4x + \frac{1}{2}x^2$.

A7. Utilizzando le espansioni di MacLaurin per sin e cos si ottiene $\lim_{x\to 0} = -9/10$.

A8. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ perchè in numeratore è polinomiale mentre il denominatore è esponenziale.

A9. $\rho = \sqrt[3]{4}$ e $\theta = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ per $k = 0, 1, 2$.

A10. Soluzione $y(x) = e^{\cos(x)}(1+2x)$.

Parte B

B1. D

B2. A

B3. B

B4. A

B5. C

B6. C

B7. C

B8. B

B9. A

B10. B