Analisi Matematica I - 23/09/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Sia $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti.

A2. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{n!}$.

A3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)(1-\cos^2(x))dx$

A4.* Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha^2+1)x}{\ln(1+2x)} & \text{per } x > 0, \\ |2x^2 - 3x - 5| & \text{per } x \leq 0, \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$.

A5. Sia $f(x) = 2\sin^2(x) + 3$. Calcolare la retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $\pi/4$.

A6.* Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 2. \end{cases}$$

A7. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione $f(x) = e^{x^2+5} + 2\tan(x^2)$.

A8.* Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\cos n}{n^2} + \frac{n^2 - 2 - e^{2n} - 3e^{4n}}{e^{4n}\arctan(4n)+1}\right)$.

A9. Calcolare $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z+w}{\bar{w}}\right)$ dove $z = 2+3i$ e $w = 2i$.

A10.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x) - 4\sin x}{e^{2x^3}-1}$.

B1.* Sia f una funzione di dominio $\mathbb{R}$, monotona. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile su $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ f è continua su $\mathbb{R}$.

B2. Sia $f(x) = 2x + \sin(x)$. Quanti punti soddisfano la tesi del teorema di Lagrange per f sull'intervallo $[0, 4\pi]$? $\boxed{\text{A}}$ esattamente 3 $\boxed{\text{B}}$ esattamente 4 $\boxed{\text{C}}$ nessuno $\boxed{\text{D}}$ esattamente 2.

B3.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ammette massimo in $[0,1] \cup [2,3]$ $\boxed{\text{B}}$ f ammette massimo in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$ f ammette massimo in $[0,1) \cup (2,3]$ $\boxed{\text{D}}$ f ammette massimo in $(0,3)$.

B4. Siano (a_n) e (b_n) due successioni infinitesime di numeri reali positivi. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ diverge $\boxed{\text{C}}$ se $a_n \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ diverge $\boxed{\text{D}}$ se $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

B5. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è continua in (a,b) $\boxed{\text{B}}$ f è invertibile in (a,b) $\boxed{\text{C}}$ f è monotona in (a,b) $\boxed{\text{D}}$ f è limitata in (a,b).

B6. Siano $w = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}$ e $z = i$. Allora $(w \cdot z)^9$ vale $\boxed{\text{A}}$ 2^9 $\boxed{\text{B}}$ i $\boxed{\text{C}}$ $2^9 e^{i\frac{5}{2}\pi}$ $\boxed{\text{D}}$ $2^{-9} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

B7.* Sia (a_n) una successione monotona di numeri reali. Allora $\lim_{n\to\infty} \arctan(a_n)$ $\boxed{\text{A}}$ non esiste $\boxed{\text{B}}$ esiste finito $\boxed{\text{C}}$ è $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$ è $-\infty$.

B8. Sia $f(x) = x^a$ per $x \in (0,1]$. Scegliere il parametro a in modo tale che f sia crescente e concava in $(0,1]$. $\boxed{\text{A}}$ $-1 < a < 0$ $\boxed{\text{B}}$ $a < -1$ $\boxed{\text{C}}$ $0 < a < 1$ $\boxed{\text{D}}$ $a > 1$.

B9.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ammette limite in x_0 $\boxed{\text{B}}$ f non è definita in x_0 $\boxed{\text{C}}$ f ammette limite finito in x_0 $\boxed{\text{D}}$ f è continua in x_0.

B10. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua con $0 < f(x) \leq e^{-2x}$. Allora $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{A}}$ converge $\boxed{\text{B}}$ diverge $\boxed{\text{C}}$ è uguale a 1 $\boxed{\text{D}}$ è uguale a $1/2$.

Soluzioni della prova del 23/09/16

Parte A

A1. Il dominio di f è $(0, +\infty)$. Calcolando la derivata prima si trova il punto di minimo assoluto in $\sqrt{2}$. Non ci sono massimi assoluti.

A2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{n!} = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} = 8e^4$ ricordando l'espansione in serie dell'esponenziale.

A3. La primitiva è $-\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x)$. Quindi l'integrale è $4/3$

A4. Usando l'espansione del logaritmo o un limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = (\alpha^2+1)/2$ mentre $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$. Quindi $\alpha = \pm 3$.

A5. $y = 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4$

A6. $u(x) = e^{-x}(1 + 3x)$

A7. Scrivendo $e^{x^2+5} = e^5 e^{x^2}$ ed espandendo al primo ordine e^t e $\tan(t)$ per $t = x^2$ si ottine $p_2(x) = e^5 + (e^5 + 2)x^2$

A8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos n}{n^2} = 0$ mentre $\dfrac{n^2 - 2 - e^{2n} - 3e^{4n}}{e^{4n}\arctan(4n) + 1} \approx \dfrac{-3e^{4n}}{e^{4n}\arctan(4n)} \to -6/\pi$

A9. $-5/2$

A10. Usando l'espansione di $\sin(t)$ al terzo ordine per $t = 4x$ e per $t = x$ e quella di e^t al primo ordine per $t = 2x^3$ si ottiene $\displaystyle\lim_{x\to 0} ... = \lim_{x\to 0} \frac{(-4^3/6)x^3 + (4/6)x^3}{2x^3} = -5$

Parte B

B1. B

B2. B

B3. A

B4. D

B5. A

B6. A

B7. B

B8. C

B9. A

B10. A