Analisi Matematica I - 21/02/17 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 3\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1/2$.

A2.* Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(x) = 4xy(x)$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 4xy(x) + 2xe^{2x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A3. Stabilire il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{6e^{6x}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$.

A4.* Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9n^9 \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^2$$

è convergente.

A5. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^6+3n^5} - \sqrt{n^6+1}}{n^2\arctan(n^6)}$.

A6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^3+4^x}{3^x+x^4}\right)$.

A7.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{3x^2}-1}{1-\cos(3x)} + 2\arctan\left(\frac{1}{\sin(2x)}\right)$.

A8. Siano $z = 2-3i$ e $w = 2+i$. Calcolare la parte reale del numero complesso $\dfrac{z^2}{w-1}$.

A9. Calcolare $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 3x\ln(2x^2)\,dx$.

A10.* Determinare gli eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \int_{-2}^{x} \frac{(t^2-4)\arctan(t^2)}{4e^t}\,dt.$$

B1.* Sia $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to+\infty} g(x)x^2 = 1$. Allora l'integrale $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ [A] diverge a $-\infty$ [B] diverge a $+\infty$ [C] non converge [D] converge.

B2. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che [A] $f(x_0) > \int_0^1 f(x)\,dx$ [B] $f(x_0) < \int_0^1 f(x)\,dx$ [C] $f(x_0) = \int_0^1 f(x)\,dx$ [D] $f(x_0) = -\int_0^1 f(x)\,dx$.

B3. Sia (a_n) una successione tale che $a_n \to \ell$. Si ha che: [A] se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$, allora $\ell = +\infty$ [B] se $\ell \neq 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ [C] se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\ell = 0$ [D] se $\ell = 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

B4. Siano a_n e b_n due successioni reali tali che $a_n > b_n + \frac{1}{n}$ definitivamente.
[A] se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ [B] se $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esiste finito allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste finito [C] se $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ [D] se $\lim_{n\to+\infty} b_n$ non esiste allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste .

B5.* Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $y''(x) = \lambda$ è dato da tutte e sole le funzioni della forma [A] $y(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + c_1x + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ [B] $y(x) = c_1x + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ [C] $y(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$ [D] $y(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + cx$ con $c \in \mathbb{R}$.

B6. Sia f una funzione continua in x_0. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ [A] esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0+h) \leq f(x_0) + \varepsilon$ per $|h| < \delta$ [B] esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0+h) \geq \varepsilon - f(x_0)$ per $|h| < \delta$ [C] esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0+h) \geq f(x_0) + \varepsilon$ per $|h| < \delta$ [D] esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0+h) \leq f(x_0) - \varepsilon$ per $|h| < \delta$.

B7. La funzione $f(x) = |x|^3$ nel punto $x = 0$ [A] è derivabile e non continua [B] è continua e non derivabile [C] non è continua [D] è continua e derivabile.

B8.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora [A] $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ per $h > 0$ [B] $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < f'(x_0)$ per $h > 0$ [C] $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq f'(x_0)$ per $h > 0$ [D] $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0)$ per $h > 0$.

B9. * Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a,b) e sia $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = f(a) + 2$ e $f(b) = f(c) - 2$. Allora [A] esiste $x_0 \in (a,c)$ tale che $f'(x_0) = 0$ [B] $f'(c) = 0$ [C] esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ [D] esiste $x_0 \in (a,c)$ tale che $f'(x_0) = 2$.

B10. Siano $a > 0$ e $b < 0$. Allora la funzione $f(x) = e^{ax+b}$ è [A] positiva e crescente [B] negativa e crescente [C] negativa e decrescente [D] positiva e decrescente .

Soluzioni

A1. $y = 3 - 5\pi(x - \frac{1}{2})$

A2. L'integrale generale dell'equazione $y'(x) = 4xy(x)$ è $y(x) = ce^{2x^2}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (1 + x^2)e^{2x^2}$.

A3. L'integrale è improprio perché la funzione integranda non è limitata per x vicino a 1. Poiché per $x \to 1$ la funzione integranda è asintotica a

$$\frac{6e^6}{(x-1)^{1/2}}$$

e l'esponente $1/2$ è strettamente minore di 1, l'integrale converge.

A4. Per $\alpha \leq 0$ il termine generale della serie non tende a zero. Pertanto la serie non converge per alcun $\alpha \leq 0$. Se $\alpha > 0$, usando lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$, si ha

$$9n^9\Big(\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\Big)^2 \simeq 9n^9\Big(\frac{1}{6}\frac{1}{n^{3\alpha}}\Big)^2 = \frac{9}{36}\frac{1}{n^{6\alpha-9}}.$$

Pertanto la serie converge per $6\alpha - 9 > 1$, cioè $\alpha > 5/3$.

A5. Razionalizzando

$$\frac{\sqrt{n^6+3n^5} - \sqrt{n^6+1}}{n^2\arctan(n^6)} = \frac{3n^5-1}{n^2\arctan(n^6)(\sqrt{n^6+3n^5} + \sqrt{n^6+1})} \simeq \frac{3n^5}{n^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2n^3}.$$

Il limite è quindi $3/\pi$.

A6. Per $x \to +\infty$ l'argomento del logaritmo si comporta come $\left(\frac{4}{3}\right)^x$, che tende a $+\infty$ (perché $\frac{4}{3} > 1$). Poiché $\ln x \to +\infty$ per $x \to +\infty$, il limite è $+\infty$.

A7. Usando gli sviluppi di MacLaurin di e^x e di $\cos x$,

$$\frac{e^{3x^2}-1}{1-\cos(3x)} = \frac{3x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^4)} \to \frac{2}{3}.$$

Per $x \to 0^+$, si ha che $\sin(2x) \to 0^+$, quindi $\frac{1}{\sin(2x)} \to +\infty$ e $\arctan\left(\frac{1}{\sin(2x)}\right) \to \frac{\pi}{2}$. Il limite è quindi $\frac{2}{3} + \pi$.

A8. $-17/2$

A9. Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 3x\ln(2x^2)\,dx &= \Big[\frac{3}{2}x^2\ln(2x^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{3}{2}x^2\,\frac{4x}{2x^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\ln 2 - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 3x\,dx = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

A10. Poiché la funzione integranda è continua, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)\arctan(x^2)}{4e^x}.$$

Tenendo conto che e^x è sempre strettamente positivo, mentre $\arctan(x^2)$ è strettamente positivo per $x \neq 0$ e si annulla in $x = 0$, si ha che:

$f'(x) > 0$ per $x < -2$ e per $x > 2$
$f'(x) < 0$ per $-2 < x < 0$ e per $0 < x < 2$
$f'(x) = 0$ per $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$

Ne segue che $x = -2$ è punto di massimo relativo e $x = 2$ è punto di minimo relativo. Il punto $x = 0$ è un punto critico, ma non è di massimo relativo, né di minimo relativo.

B1. D

B2. C

B3. C

B4. C

B5. A

B6. A

B7. D

B8. C

B9. C

B10. A