Analisi Matematica I - 22/09/17 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x-\alpha| & \text{per } -1 < x \le 0, \\ \dfrac{2x^2-5x+4}{4x^3+5} e^{-4x} & \text{per } 0 < x < 1, \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

A2.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos(x)\sin^2(x)}{(x-\pi)^3}$.

A3. Stabilire se l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)+2x^5}{5x^2+\sin(x^5)}\,dx$ converge o diverge.

A4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = 6u(x) - \cos(x)e^{6x} \\ u(\frac{\pi}{2}) = -e^{3\pi}. \end{cases}$$

A5. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx$.

A6.* Sia λ un parametro reale positivo. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^n+n^2}{3^n+n\ln(n)}$. Stabilire per quali valori di λ la serie converge.

A7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = -5i$ (riportare le soluzioni in forma esponenziale).

A8.* Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x) = \dfrac{2x}{1-6x}e^x$ nel suo dominio di definizione.

Stabilire se i punti trovati sono punti di massimo o minimo assoluto.

A9.* Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(4n)}{4n} + \frac{e^{-n+1}-3n^2}{(4n-\sqrt[3]{n^2})^2} \right)$.

A10. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sin\big(\ln(9x^2)\big) - 4$ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$.

B1. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^x t^2 f(t)\,dt$. Allora, $\boxed{\text{A}}$ F è una funzione monotona crescente $\boxed{\text{B}}$ $F(x) = f(x) - f(1)$ $\boxed{\text{C}}$ F è una funzione convessa $\boxed{\text{D}}$ $F(0) = 0$.

B2. Quale delle seguenti funzioni verifica le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \cos(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \sin(x)$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = \tan(x)$.

B3.* Se $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$, allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per $x \in (1, 1+\delta)$ $\boxed{\text{B}}$ $f(1) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > -1$ per $x \in (1, 1+\delta)$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per $x \in (1, 1+\delta)$.

B4. Sia $p(x) = (x - x_0)^2 + 2$ il polinomio di Taylor con centro x_0 per la funzione f. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x_0) = 2$ e $f''(x_0) = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x_0) = 2$ e $f''(x_0) = 2$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x_0) = 2$ e $f''(x_0) = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x_0) = 1$ e $f''(x_0) = 2$.

B5. La funzione $f(x) = \cos(x^3)$ $\boxed{\text{A}}$ è pari e limitata $\boxed{\text{B}}$ è dispari e periodica $\boxed{\text{C}}$ è pari e periodica $\boxed{\text{D}}$ è dispari e limitata.

B6. * Sia $f : [a, b] \to [0, 1]$ integrabile e sia $\displaystyle\fint_a^b f(x)\,dx$ la sua media integrale su $[a, b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $0 \le \displaystyle\fint_a^b f(x)\,dx \le (b-a)$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\fint_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}$ $\boxed{\text{C}}$ $0 \le \displaystyle\fint_a^b f(x)\,dx \le 1$ $\boxed{\text{D}}$ $(b-a) \le \displaystyle\fint_a^b f(x)\,dx$.

B7. Sia (a_n) una successione che tende a $+\infty$. Allora, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n}$ $\boxed{\text{A}}$ è uguale a 0 $\boxed{\text{B}}$ è uguale a 1 $\boxed{\text{C}}$ non esiste $\boxed{\text{D}}$ è uguale a $+\infty$.

B8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e sia $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$. $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) \ne \lim_{x\to 0^-} h(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) < \lim_{x\to 0^-} h(x)$ $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) > \lim_{x\to 0^-} h(x)$.

B9. * Sia a_n una successione reale positiva. $\boxed{\text{A}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge $\boxed{\text{B}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge $\boxed{\text{C}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ diverge $\boxed{\text{D}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

B10. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ derivabile $\boxed{\text{B}}$ monotona $\boxed{\text{C}}$ iniettiva $\boxed{\text{D}}$ integrabile.

Soluzioni della prova del 22/09/17

Parte A

A1. In questo caso è sufficiente sostituire $x = 0$ per ottenere la condizione $|\alpha| = 4/5$ e quindi $\alpha = \pm 4/5$.

A2. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital si ottiene $-\infty$.

A3. La funzione integranda è asintotica a $\frac{2}{5}x^3$ quindi l'integrale diverge.

A4. $u(x) = -\sin(x)e^{6x}$

A5. Scrivendo la funzione integranda come $\frac{1}{2}(2x)(x^2+2)^{-1/5}$ si calcola facilmente la primitiva $\frac{5}{8}(x^2+2)^{4/5}$.

A6. Se $0 < \lambda \leq 1$ la successione è asintotica a 3^{-n} la cui serie è convergente. Se $\lambda > 1$ la successione è asintotica a $(\lambda/3)^n$ la cui serie è convergente per $\lambda < 3$. Quindi $0 < \lambda < 3$.

A7. $z = \sqrt[3]{5}e^{i\theta}$ cone $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

A8. Calcolare la drivata di f e trovare un minimo in $-1/3$ e un massimo in $1/2$. Entrambi sono relativi perché f non è limitata in $x = 1/6$.

A9. La prima successione è infinitesima, la seconda è asintotica a $\frac{-3n^2}{16n^2}$ e ha quindi limite $-3/16$.

A10. $y = 6(x - \frac{1}{3}) - 4$.

Parte B

B1. A

B2. B

B3. C

B4. B

B5. A

B6. C

B7. D

B8. A

B9. B

B10. D