Analisi Matematica I - 26/07/18 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2(5x)+\sin(2x)+5 & x\le 0\\ \ln(1+\alpha x)+\beta & x>0.\end{cases}$$

Determinare α e β in modo che f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$.

A2.* Stabilire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin(n)+n^2}{n^\alpha-3\ln(n+1)}$ converge.

A3.* Calcolare il seguente integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}+\frac{3x^2}{1+x^6}\,dx.$

A4. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+n^2)}{n^2}+2\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right)$

A5.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{3}\sin(\frac{1}{2}x^2)}{e^{-x/2}-\cos(x^{1/2})}.$

A6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases}y''+4y'+4y=0\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$$

A7. Si trovino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4+4=0$ esprimendo il risultato in forma algebrica.

A8. Si consideri $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\arctan\left(\frac{2}{x}+1\right)$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $P(-1,f(-1))$.

A9.* Sia $\alpha>0$ un parametro reale. Determinare per quali valori di α converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\frac{2}{x^{1/2}}}{(1+4x)^{3\alpha}+\ln(1+4x)}\,dx.$

A10. Sia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{\sqrt{x-2}}$. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale di f.

B1.* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall x_1,\, x_2 \in [a,b],\, x_1 \neq x_2,\ \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

B2.* Sia a_n una successione convergente con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \geq 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell > 0$.

B3.* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a,b)$. Allora
$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. $\boxed{\text{B}}$ f è superiormente limitata. $\boxed{\text{C}}$ f è inferiormente limitata. $\boxed{\text{D}}$ $\forall c \in (\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f)$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = c$.

B4. Siano a_n, b_n successioni di numeri reali tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sia convergente e b_n sia limitata. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ diverge. $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. $\boxed{\text{D}}$ se $b_n > 0$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ converge.

B5. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(1) \geq f(x)$ per ogni $x \in [0,2]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(1) > 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1)$ e $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (1,2]$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(1) = 0$.

B6. Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$. L'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) x^\alpha \, dx$ converge se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $\alpha > -1$. $\boxed{\text{B}}$ $\alpha \geq -1$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = -1$. $\boxed{\text{D}}$ $\alpha < -1$

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = g \circ h(x)$ dove $g(x) = |x|$ e $h(x) = \sin(x)$. Nel punto $x_0 = \pi$ la funzione f è $\boxed{\text{A}}$ continua e derivabile. $\boxed{\text{B}}$ discontinua e derivabile. $\boxed{\text{C}}$ continua e non-derivabile. $\boxed{\text{D}}$ discontinua e non-derivabile.

B8. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(a_n)$ converge. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n)$ non esiste. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

B9. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile nell'origine. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) + f(0)}{h}$. $\boxed{\text{B}}$ $f''(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) + f(0)}{h^2}$. $\boxed{\text{C}}$ $f''(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h^2}$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

B10.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $G'(x) = f(x^2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ $G'(x) = f(x)2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{C}}$ $G'(x) = f(x^2) - f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ $G'(x) = f(x^2)2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzioni della prova del 26/07/18

Parte A

A1. In questo caso per imporre la continuità di f e di f' è sufficiente sostituire $x = 0$. Si ottiene rispettivamente $\beta = 6$ e $\alpha = 2$.

A2. Per $\alpha > 0$ si ha $\dfrac{n\sin(n) + n^2}{n^\alpha - 3\ln(n+1)} \approx \dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$, quindi la serie converge per $\alpha - 2 > 1$. Per $\alpha \le 0$ si ha $\dfrac{n\sin(n) + n^2}{n^\alpha - 3\ln(n+1)} \approx \dfrac{n^2}{\ln(n)} \to +\infty$ e quindi la serie non converge.

A3. Una primitiva è $f(x) = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \arctan(x^3)$. Quindi l'integrale è $\frac{1}{4}\ln(2) + \dfrac{\pi}{4}$.

A4. $\dfrac{\ln(1+n^2)}{n^2} \to 0$ mentre $\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \approx \dfrac{e^n}{e^n} = 1$. Quindi il limite è uguale a 2.

A5. Ricordando che per $t \to 0$ si ha $\sin(t) \approx t$, $e^t \approx 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2$ e che $\cos(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{4!}t^4$ per sostituzione si ha

$$\frac{\frac{1}{3}\sin(\frac{1}{2}x^2)}{e^{-x/2} - \cos(x^{1/2})} \approx \frac{\frac{1}{6}x^2}{(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2)} = \frac{\frac{1}{6}x^2}{(\frac{1}{8} - \frac{1}{24})x^2} = 2.$$

A6. $y(x) = e^{-2x}(1 + 2x)$.

A7. Le soluzioni in forma esponenziale sono della forma $z_k = \rho e^{i\theta_k}$ done $\rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ e $\theta_k = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}$ per $k = 0, ..., 3$. In forma algenrica si ottiene $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 1 - i$.

A8. $y = -(x+1) - \dfrac{\pi}{4}$.

A9. Per $x \to +\infty$ la funzione integranda è asintotica a $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}x^{3\alpha}}$. Quindi l'integrale converge per $\dfrac{1}{2} + 3\alpha > 1$.

A10. Si calcola la derivata prima

$$f'(x) = -\frac{2(x-1)(x-2)^{1/2} - (x-1)^2\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}}{(x-2)} = -\frac{(x-1)[4(x-2) - (x-1)]}{2(x-2)^{3/2}}.$$

Nel dominio $(2, +\infty)$ sia $(x-1)$ che $(x-2)^{3/2}$ sono sempre positivi. È sufficiente studiare il segno di $4(x-2) - (x-1) = 3x - 7$. Si ottiene quindi che $x = 7/3$ è un punto di massimo.

Parte B

B1. C

B2. A

B3. A

B4. C

B5. D

B6. D

B7. C

B8. B

B9. D

B10. D