Analisi Matematica I - 20/06/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1* Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} xy'(x) + 2y(x) = x^{-2} \\ y(e) = 7 \end{cases}$

A2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2^2 - x^2)^2$.
Determinare i punti stazionari di f.
Determinare i punti di massimo locale per f.

A3. Sia $f(x) = 2(\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{2x}$ per $x \in \mathbb{R}$. Sia f^{-1} la sua inversa. Calcolare $f^{-1}(2)$ e $(f^{-1})'(2)$.

A4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine due centrato in $x_o = 2$ della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{2-x}{x}}$.

A5. Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2-t}{6+t^2}\,dt$. Determinare l'ascissa x_o dell'unico punto di flesso del grafico di F.

A6* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} + 2\ln(1+x) - 1}{2x^2 - 2x^3}$.

A7* Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z(z + 3i) = 1$.

A8* Utilizzando il Teorema di de l'Hôpital, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \int_2^x \frac{\ln\left(\frac{t}{2}\right)}{t-2}\,dt \Big/ \sin(x-2)$.

A9. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^5)e^{\sin x} \arctan\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ converge in senso generalizzato.

A10. Stabilire se le seguenti serie: convergono, divergono (indicando se a $+\infty$ o a $-\infty$) oppure oscillano (i.e., non convergono e non divergono).

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 + \arctan(n)}{n^2 + n^{1/3}}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + 4^n}{3^n + n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}.$$

B1. Sia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(1-x^2)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ 0 è un punto di minimo assoluto per f. $\boxed{\text{B}}$ f non ha punti di massimo locale. $\boxed{\text{C}}$ 0 è un punto di massimo assoluto per f. $\boxed{\text{D}}$ f non ha punti stazionari.

B2. Siano $f : [a,b] \cup [c,d] \to \mathbb{R}$, con $b < c$, continua in $[a,b] \cup [c,d]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \lim_{x \to b^-} f(x)$. $\boxed{\text{B}}$ f ha minimo m e massimo M in $[a,b] \cup [c,d]$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists x_o \in [a,b] \cup [c,d]$ t.c. $f(x_o) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ f assume tutti valori compresi fra il minimo m e il massimo M.

B3. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ se $x \in [0,1]$ e $f(x) = 1 + x$ se $x \in (1,2]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ L'inversa f^{-1} è crescente nel suo insieme di definizione. $\boxed{\text{B}}$ L'inversa f^{-1} è decrescente nel suo insieme di definizione. $\boxed{\text{C}}$ L'inversa f^{-1} è definita in tutto $[0,3]$. $\boxed{\text{D}}$ L'inversa f^{-1} non è monotona nel suo insieme di definizione.

B4. Sia $P_2(x) = a + bx + cx^2$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ il polinomio di Mac-Laurin di f. Allora $\boxed{\text{A}}$ $c = f''(0)$. $\boxed{\text{B}}$ $b = f''(0)$. $\boxed{\text{C}}$ $a = \frac{1}{2} f''(0)$. $\boxed{\text{D}}$ $c = \frac{1}{2} f''(0)$.

B5.* Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (0,1)$ tale che $f(x_n) > n$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall x \in (0,1)$ $f(x) > x$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (0,1)$ tale che $f(x_n) \leq n$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists\, \bar{x} \in (0,1)$ tale che $f(\bar{x}) < \bar{x}$.

B6. * Sia a_n una successione di numeri reali tali che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Allora $\boxed{\text{A}}$ a_n è infinitesima. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. $\boxed{\text{C}}$ a_n è decrescente. $\boxed{\text{D}}$ a_n è a termini positivi.

B7. Sia $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ una funzione integrabile e sia $c \in (a,b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^c f(x)\,dx$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^c f(x)\,dx$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^c f(x)\,dx$.

B8. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$. Allora $\operatorname{Im}\left(|z| + \dfrac{1}{z}\right)$ è
$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{b}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{ib}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{b}{a^2-b^2}$

B9. * Sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $f(b) > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $x_0 \in (a,b)$ in cui $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(b)$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0 \in (a,b)$ in cui $\lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $x_0 \in (a,b)$ in cui $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(b)$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0 \in (a,b)$ in cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

B10.* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convessa in $[a,b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f' è decrescente in $[a,b]$. $\boxed{\text{B}}$ f è continua in (a,b). $\boxed{\text{C}}$ f' è crescente in $[a,b]$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall x \in [a,b]$ è $f''(x) \geq 0$.

Soluzioni della prova del 20/06/19

Parte A

A1. La soluzione del problema di Cauchy è definita in $(0,+\infty)$. Dopo aver diviso l'equazione per x, un fattore integrante è $e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$. Quindi l'equazione si riscrive nella forma $(x^2y)' = x^{-1}$. Integrando e imponendo la condizione iniziale si trova $y = x^{-2}(\ln x + 7e^2 - 1)$.

A2. La derivata di f è $f'(x) = -2(2^2 - x^2)2x$. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -2$ oppure $x = 0$ oppure $x = 2$. I soli punti stazionari sono -2, 0, 2. f è derivabile su $\mathbb{R}$, pertanto i punti di massimo relativo sono da ricercare tra i punti stazionari. Studiando il segno di f' si vede che f' è negativa nell'intervallo $(-\infty,-2)$ e nell'intervallo $(0,2)$ mentre è positiva nell'intervallo $(-2,0)$ e nell'intervallo $(2,+\infty)$. Pertanto f è strettamente crescente nell'intervallo $(-2,0)$ e nell'intervallo $(2,+\infty)$ ed è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty,-2)$ e nell'intervallo $(0,2)$. Da questo studio della monotonia si ha che 0 è punto di massimo relativo, mentre -2 e 2 sono punti di minimo (assoluto). Pertanto l'unico punto di massimo relativo è 0. Allo stesso risultato si poteva pervenire calcolando f'' e osservando che $f''(0) < 0$ e $f''(-2) = f''(2) > 0$.

A3. Si ha $f(0) = 2$ e quindi $f^{-1}(2) = 0$. Inoltre $f'(x) = 2xe^{2x} + 4(\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{2x}$. Quindi $(f^{-1})'(2) = 1/f'(0) = 1/4$.

A4. Dalla teoria è noto che l'espressione del polinomio di Taylor di ordine 2 della f centrato in $x_o = 2$ è $P_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \dfrac{f''(2)}{2}(x-2)^2$. Riscrivendo la f come $f(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}$, è facile verificare che $f'(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)$, $f''(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{4}{x^4} + \dfrac{4}{x^3}\right)$, da cui ricaviamo $f(2) = 1$, $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$, $f''(2) = \dfrac{3}{4}$. Pertanto, concludiamo che $P_2(x;2) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-2) + \dfrac{3}{8}(x-2)^2$.

A5. Osserviamo che F è derivabile con continuità infinite volte in $(0,+\infty)$. Cerchiamo i punti di flesso, studiando gli zeri ed il segno della derivata seconda di F. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo, abbiamo $F'(x) = \dfrac{2-x}{6+x^2}$, $F''(x) = \dfrac{x^2-4x-6}{(6+x^2)^2}$. Pertanto, lo studio del segno della derivata seconda si riduce a risolvere $x^2 - 4x - 6 \geq 0$ nell'intervallo $(0,\infty)$. Troviamo che, in tale intervallo, la soluzione della disequazione è $x \geq 2 + \sqrt{10}$, e concludiamo, dunque, che l'unico punto di flesso cercato è $x_o = 2 + \sqrt{10}$.

A6. Ricordando che $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)$, si ha $e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} \sim 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$. Essendo $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ il numeratore è asintotico a $\frac{3}{2}x^2$ mentre il denominatore è asintotico a $2x^2$, il limite è quindi uguale a $3/4$.

A7. Facendo i calcoli l'equazione diventa $z^2 + 3iz - 1 = 0$. Il discriminante è pari a -5, le cui radici quadrate complesse sono $\pm\sqrt{5}i$. Con la formula risolutiva delle equazioni algebriche di secondo grado si trovano dunque le soluzioni $z_{1/2} = (-3i \pm \sqrt{5}i)/2$. Allo stesso risultato si poteva giungere sostituendo a z la forma algebrica e determinando parte reale e parte immaginaria.

A8. Osserviamo innanzi tutto che, per il comportamento asintotico della funzione seno in un intorno del punto dove il suo argomento si annulla, abbiamo $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\int_2^x \frac{\ln(\frac{t}{2})}{t-2}\,dt}{\sin(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\int_2^x \frac{\ln(\frac{t}{2})}{t-2}\,dt}{x-2}$. Applicando una prima volta il Teorema di de l'Hôpital, ci riduciamo a calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2}$. Utilizzando il medesimo teorema una seconda volta, abbiamo $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

A9. La funzione integranda f è limitata in un intorno destro dell'origine e dunque risulta integrabile per ogni α. Per $x \to +\infty$, $f \sim x^{5-\alpha}$, se $\alpha > 0$, mentre $f(x) \sim x^5$, se $\alpha \leq 0$. Dunque $f(x)$ è integrabile a $+\infty$ se e solo se $\alpha - 5 > 1$, ossia $\alpha > 6$.

A10. Si ha $\dfrac{1+\arctan(n)}{n^2+n^{1/3}} \sim \dfrac{1+\pi/2}{n^2}$; per il criterio del confrontro asintotico la serie converge. Inoltre $\dfrac{n+4^n}{3^n+n} \sim (4/3)^n$; per il criterio del confrontro asintotico la serie diverge. L'ultima serie converge per il criterio di Leibniz.

Parte B

B1. $\boxed{\text{C}}$ f è strettamente crescente in $(-1,0]$ ed è strettamente decrescente in $[0,1)$, da cui 0 è punto di massimo assoluto per f.

B2. $\boxed{\text{B}}$ f è continua in un insieme chiuso e limitato, quindi assume minimo m e massimo M per il Teorema di Weierstrass. Tuttavia, tale insieme non è un intervallo, per cui non possiamo garantire che la f assuma tutti i valori compresi tra il minimo m ed il massimo M.

B3. $\boxed{\text{A}}$ Tracciandone il grafico, è facule vedere che f è monotona crescente e, dunque, anche la funzione inversa f^{-1} è monotona crescente nel suo insieme di definizione.

B4. $\boxed{\text{D}}$ per definizione

B5. $\boxed{\text{A}}$ definizione di limite con $M = n \in \mathbb{N}$.

B6. $\boxed{\text{A}}$ dalla condizione necessaria di convergenza

B7. $\boxed{\text{D}}$ in quanto $f \geq 0$

B8. $\boxed{\text{B}}$ $|z|$ ha parte immaginaria nulla, mentre $1/z$ ha parte immaginaria pari a $-b/(a^2+b^2)$.

B9. $\boxed{\text{D}}$ per il teorema degli zeri.

B10. $\boxed{\text{B}}$ La funzione è convessa, ma a priori non è dotata di derivata prima e seconda. Pertanto, possiamo unicamente concludere che f è continua in (a,b). In generale, tutte le funzioni convesse in $[a,b]$ (intervallo chiuso), sono continue in (a,b) (intervallo aperto).