Corso di Laurea in Bioingegneria, Ingegneria Elettronica ed Informatica, Ingegneria Industriale

1) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\pi} (\frac{x^2}{2\pi} + x) \cos(2x)\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \arctan(3 + \cos x)\, dx,$$

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \arctan \frac{1}{x+1}\, dx,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4x|\sin(2x)|\, dx,$$

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} \sqrt{x-1} \arcsin \sqrt{x-1}\, dx,$$

$$\int_1^2 (\arctan \frac{t-1}{t} + \sqrt[3]{(t-1)^2})\, dt,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \ln(2 - \cos^2 x)\, dx,$$

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x - 3}\, dx.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\, dx$$

2) Determinare i valori dei seguenti integrali al variare del parametro a:

$$\int_0^2 \frac{t^3}{4 + 3e^{at^4}}\, dt \qquad a \in \mathbf{R},$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{8}}^{a} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 - 16x^2}}\, dx, \qquad a \in]0, \frac{1}{4}[.$$

3) Determinare l'area della regione piana T definita da

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \ |\ln(x^2 + \frac{1}{4})| \le y \le 2\}.$$

4) Calcolare la primitiva che si annulla in $x = \frac{3}{4}\pi$ di

$$f(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{2})(\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(-x))}{\cos^3 x}.$$

5) Determinare la primitiva $F(x)$ di $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\cosh x}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

6) Data la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x (t+1)\cosh(t^2 - 2t)\, dt,$$

scrivere il suo polinomio di Mc-Laurin di ordine 2.

7) Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x (\cosh(t^2 - t) - 1)\, dt,$$

tracciarne il grafico.

8) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pari, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\arccos\sqrt{x} + \lambda, & 0 \le x \le 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{2e^t}{2t-1}\, dt & x > 1, \end{cases}$$

determinare λ in modo che f sia continua in $\mathbf{R}$ e per tale valore studiare f e tracciarne il grafico.

9) Calcolare per $x \to 0$ l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione x di

$$f(x) = \int_x^{3x} (t - \ln(1 + \sin t))\, dt.$$

10) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} \frac{\tanh t^2 - \tan(4t)}{t}\, dt,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_{x^3}^{x^5} \frac{\ln(1-4t)}{t}\, dt.$$

11) Sia data la successione $\{s_n\}$ definita da

$$s_n = \int_n^{n+\frac{1}{n}} \sqrt{x^2 + \sin^2 x}\, dx.$$

Calcolare il limite per $n \to +\infty$ e dedurne il carattere della successione.

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}+x\right)\cos(2x)\,dx = \cancel{\left[\left(\frac{x^2}{2\pi}+x\right)\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}} +$$

$$-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}\left(\frac{2x}{2\pi}+1\right)dx = \left[\frac{\cos 2x}{4}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\right]_0^{\pi} +$$

$$-\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{4}\,\frac{1}{\pi}\,dx = \frac{\cos 2\pi}{4}\left(\frac{\pi}{\pi}+1\right) - \frac{\cos 0}{4}\cdot 1$$

$$-\left[\frac{\sin 2x}{8\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,\mathrm{arctg}(3+\cos x)\,dx = -\left[\frac{\cos 2x}{2}\,\mathrm{arctg}(3+\cos x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2x}{1+(3+\cos x)^2}\cdot(-\sin x)\,dx = -\left[\frac{\cos\pi}{2}\,\mathrm{arctg}\,3\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,4\right] - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x+6\cos x+10}\,\sin x\,dx$$

$$= +\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3 + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,4 + \frac{1}{2}\int_1^0\frac{2t^2-1}{t^2+6t+10}\,dt$$

[avendo effettuato la sostituzione $\cos x = t$] =

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,4+\mathrm{arctg}\,3) - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t^2-1}{t^2+6t+10}\,dt$$

Tralasciamo l'ultimo integrale, che è l'integrale (standard) di una funzione razionale fratta. Si noti che il denominatore ha radici complesse coniugate.

$\blacksquare$

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} 1\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\,dx = (\text{per parti}) \left[(x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\right]_0^{\sqrt{3}-1} +$$

$$-\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{x+1}{1+(x+1)^2}\,dx = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 1 +$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left[1+(x+1)^2\right]\right]_0^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/2} 4x|\sin 2x|\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4x\,|\sin 2x| + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4x\,|\sin 2x|\,dx$$

Il primo integrale è zero, perché si tratta dell'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico. Ci riduciamo al secondo

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4x\,|\sin 2x|\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4x \sin 2x\,dx$$

infatti $\sin 2x > 0 \qquad 0 < 2x < \pi \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ora integriamo per parti

$$= \left[-4x\,\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{4}{2}\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{4}{2}\frac{\pi}{2}\cos\pi + \cancel{\frac{4}{2}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}} + \left[\sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \pi - 1$$

$$\int_{5/4}^{7/4} \sqrt{x-1}\,\arcsin\sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\arcsin\sqrt{x-1}\right]_{5/4}^{7/4} +$$

$$-\frac{2}{3}\int_{5/4}^{7/4} \frac{(x-1)^{3/2}}{2\sqrt{x-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\frac{\pi}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\frac{\pi}{6}\right]$$

$$-\frac{2}{3}\int_{5/4}^{7/4} \frac{(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,dx$$

Concentriamo su quest'ultimo integrale. Abbiamo

$$+\frac{1}{3}\int_{5/4}^{7/4}\left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)dx = +\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(2-x)^{3/2} - 2(2-x)^{1/2}\right]_{5/4}^{7/4}$$

$$\int_1^2\left[\operatorname{arctg}\frac{t-1}{t}+\sqrt[3]{(t-1)^2}\right]dt = \left[\frac{3}{5}(t-1)^{5/3}\right]_1^2 + \left[t\operatorname{arctg}\frac{t-1}{t}\right]_1^2$$

$$-\int_1^2 t\,\frac{1}{1+\left(\frac{t-1}{t}\right)^2}\left(\frac{t-t+1}{t^2}\right)dt = \frac{3}{5}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+$$

$$-\int_1^2\frac{t^2 t}{t^2+(t-1)^2}\,\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{3}{5}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\underbrace{\int_1^2\frac{t}{2t^2-2t+1}\,dt}_{-\frac{1}{4}\int_1^2\frac{4t-2}{2t^2-2t+1}dt-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{2t^2-2t+1}}$$

Concentriamoci sul secondo integrale

$$\int_1^2\frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{t^2-t+\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)^2+1\right]}\,dt = \left[2\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)dt\right]_1^2$$

$$=\left[2\operatorname{arctg}(2t-1)\right]_1^2 = 2\left[\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}1\right]$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\ln(2-\cos^2x)\,dx = \left[\sin x\ln(2-\cos^2x)\right]_0^{\pi/2}+$$

$$-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2-\cos^2x}\,2\cos x\sin x\cdot\sin x\,dx$$

$$=\ln 2-\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2x}{1+\sin^2x}\cos x\,dx = \ln 2-\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

dopo aver fatto la sostituzione $\sin x = t$.

Tralasciamo la conclusione [redacted]

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x-3}\,dt = \left(\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix}\right) = \int_e^{e^2} \frac{t}{t^2+2t-3}\,dt$$

$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-1} \right) dt \qquad A(t-1) + B(t+3) = t$$

$t = 1 \qquad B = 1/4$

$t = -3 \qquad A = +3/4$

$$= \left[+\frac{3}{4} \ln(t+3) + \frac{1}{4} \ln(t-1) \right]_e^{e^2}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{x} \right]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^2 \frac{t^3}{4+3e^{at^4}}\,dt = \left(\begin{matrix} at^4 = s \\ 4at^3\,dt = ds \end{matrix}\right) = \frac{1}{4a}\int_0^{16a} \frac{ds}{4+3e^s}$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^{16a} \frac{e^s}{e^s(4+3e^s)}\,ds = \left(\begin{matrix} e^s = t \\ e^s ds = dt \end{matrix}\right) = \frac{1}{4a}\int_1^{e^{16a}} \frac{1}{t(4+3t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{4a}\int_1^{e^{16a}} \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{3t+4} \right) dt \qquad A(3t+4) + Bt = 1$$

$t = 0 \qquad A = 1/4$

$t = -\frac{4}{3} \qquad B = -\frac{3}{4}$

$$= \frac{1}{4a}\left[\frac{1}{4}\ln t - \frac{1}{4}\ln(3t+4) \right]_1^{e^{16a}}$$

$$= \frac{1}{16a}\left[16a - \ln(3e^{16a}+4) + \ln 7 \right]$$

Questo è il risultato per $a \neq 0$

[redacted]

Se $a = 0$, ci riduciamo a

$$\int_0^2 \frac{t^3}{7}\,dt = \left[\frac{1}{28}t^4\right]_0^2 = \frac{16}{28}.$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{8}}^{a} \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \left(\begin{array}{c} 1-16x^2 = t^2 \\ -32x\,dx = 2t\,dt \end{array}\right) = \int_{\sqrt{3}/8}^{a} \frac{1}{x^2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-16a^2} -\frac{1}{32}\frac{2\cdot 16\,t}{(1-t^2)\,t}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2\int_{1/2}^{1-16a^2}\frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{1/2}^{1-16a^2}\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{1/2}^{1-16a^2}\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\,2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_{1/2}^{1-16a^2}\,dt$$

$A(t+1)+B(t-1) = 1$

$t = 1 \qquad A = 1/2$

$t = -1 \qquad B = -1/2$

$$a(T) = \int_0^1 \left[2 - \left|\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right|\right]dx$$

Studiamo il segno di $\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$. Abbiamo

$$\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right) > 0 \qquad x^2+\frac{1}{4} > 1 \qquad x^2 > \frac{3}{4}$$

$x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pertanto

$$a(T) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left[2-\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]dx + \int_0^{\sqrt{3}/2}\left[2+\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

Concentriamoci sul calcolo della primitiva di $\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

Abbiamo

$$\int \ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)dx = x\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right) +$$

[redacted]

$$- \int \frac{x \cdot 2x}{x^2+1/4}\,dx = x \ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right) - 2\int \frac{x^2+1/4}{x^2+1/4}\,dx$$

$$+ \frac{2}{4}\int \frac{1}{x^2+1/4}\,dx = x \ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right) - 2x +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\left[\frac{\cancel{2}x}{2}\right]^2} = x \ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right) - 2x + \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}$$

Tralasciamo il resto dei calcoli. ∎

$$F(x) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{x} \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-t)\right]}{\cos^3 t}\,dt$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{x} \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{\sin t + \cos t}{\cos^3 t}\right] dt$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{x} \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\sin t}{\cos^3 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\,dt\right) =$$

$$= \left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[+\frac{1}{2\cos^2 t} + \mathrm{tg}\,t\right]\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{x} - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{x}\left(\frac{1}{2\cos^2 t} + \mathrm{tg}\,t\right)dt$$

$$= \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \mathrm{tg}\,x\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2\cos^2 \frac{3\pi}{4}} + \mathrm{tg}\,\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$- \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,t - \ln|\cos t|\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{x}$$

∎

Cerchiamo la generica primitiva di $f(x) = \frac{e^{-x}}{\mathrm{ch}\,x}$

Abbiamo $\int \frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2e^{-x}e^{x}\,dx}{e^{2x}+1} = 2\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$

$= 2\int \frac{e^x}{e^x(1+e^{2x})}\,dx =$ [redacted]

$$\begin{pmatrix} e^{x} = t \\ e^{x}dx = dt \end{pmatrix} = 2\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = 2\int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \right) dt$$

$$A + At^2 + Bt^2 + Ct = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C &= 0 \\ A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

Quindi

$$= 2\left[\ln|t| - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]$$

Ritornando alla funzione originale abbiamo

$$\int \frac{e^{-x}}{Ch\, x}\, dx = 2\left[\ln e^{x} - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C \right]$$

$$= 2\left[x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C \right]$$

$$= 2\left[x - \frac{1}{2} \ln\left[e^{2x}(1+e^{-2x})\right] + c \right]$$

$$= 2\left[x - \frac{1}{2}\left[2x + \ln(1+e^{-2x}) \right] + C \right]$$

$$= 2\left[x - x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) + C \right]$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{2} \ln(1+e^{-2x}) + 2C$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{\cancel{2}}{2} \ln(1+e^{-2x}) + 2C$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{\cancel{2}}{2} e^{-2x} + 2C \qquad -2C$$

Quindi la primitiva che cerchiamo è

$$F(x) = 2x - \ln(1+e^{2x})$$

[redacted]

$$F(x) = \int_0^x (t+1)\,\mathrm{Ch}\,(t^2-2t)\,dt$$

Dobbiamo scrivere $P_2(x,0)$. Utilizziamo gli sviluppi noti

$$\mathrm{Ch}\, s = 1 + \frac{s^2}{2} + o(s^2)$$

$$\mathrm{Ch}\,(t^2-2t) = 1 + \frac{(t^2-2t)^2}{2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[4t^2 - 4t^3 + t^4\right] + \dots$$

Quindi in un intorno di $x=0$

$$F(x) = \int_0^x (1+t)(1+2t^2)\,dt$$

$$= \int_0^x (1+t+2t^2+2t^3)\,dt$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$P_2(x,0) = x + \frac{x^2}{2}$$

Vogliamo tracciare il grafico di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \left[\mathrm{Ch}\,(t^2-t) - 1\right] dt$$

Osserviamo che $g(t) = \mathrm{Ch}\,(t^2-t) - 1 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Perciò $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$. Inoltre $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{Ch}\,(t^2-t) - 1\right] dt = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} \left[\mathrm{Ch}\,(t^2-t) - 1\right] dt = -\infty$$

[redacted]

$f'(x) = Ch(x^2 - x) - 1$ per il Teorema fondamentale del Calcolo.

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$ e $f'(0) = 0$

Quindi in $x = 0$ la f presenta un flesso a tangente orizzontale

$f''(x) = (2x-1)\, Sh(x^2 - x)$

$f'' \geq 0$ $\quad (2x-1)(x^2-x) \geq 0$ $\quad$ [Infatti il Sh ha il segno del suo argomento]

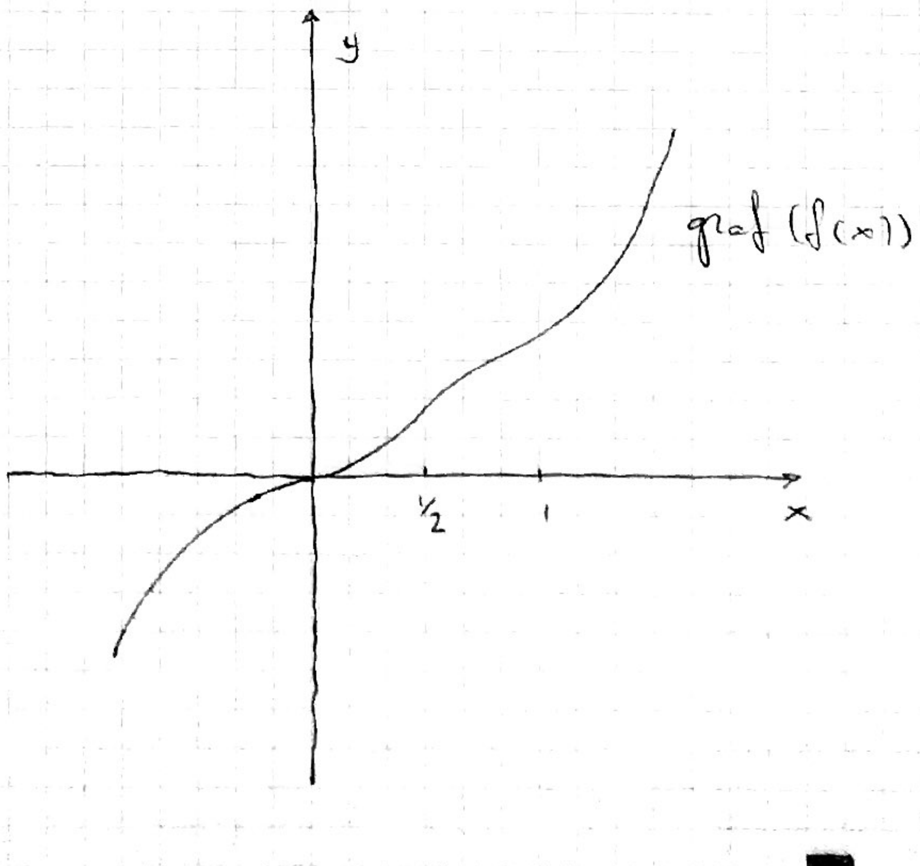
$x(2x-1)(x-1) \geq 0$

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
segno	$-$		$+$		$-$		$+$

In $x = 0$ flesso ascendente

In $x = \frac{1}{2}$ flesso discendente

In $x = 1$ flesso ascendente



[redacted]

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>pari</u> definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \arccos \sqrt{x} + \lambda & 0 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{2e^t}{2t-1}\, dt & x > 1 \end{cases}$$

determinare λ in modo che f sia continua in $\mathbb{R}$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 2 \arccos 1 + \lambda$$
$$= 1 + 2 \cdot 0 + \lambda = 1 + \lambda$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \qquad \text{(per il T.F.C.)}$$

Quindi dobbiamo richiedere che $1 + \lambda = 0 \Rightarrow X = -1$

Essendo, poi, la f pari

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 1$$

Tralasciamo il grafico di f

Calcolare per $x \to 0$ l'ordine di infinitesimo rispetto a x di

$$f(x) = \int_x^{3x} (t - \ln(1 + \sin t))\, dt$$

È stato svolto a lezione

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} \frac{\operatorname{Th} t^2 - \operatorname{tg}(4t)}{t}\, dt$$

Possiamo applicare la formula di De L'Hopital. Al riguardo, combinando il T.F.C. con il Teorema di [redacted] derivazione della funzione composta, si ricordi che

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = f(g_2(x))\,g_2'(x) - f(g_1(x))\,g_1'(x)$$

Pertanto, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{(\mathrm{Th}\,x^2 - \mathrm{tg}\,4x)\cdot 1}{x} - \dfrac{\mathrm{Th}\,(\sin x)^2 - \mathrm{tg}\,(4\sin x)}{\sin x}\cos x}{3x^2}$$

ma è troppo complicato.

Più semplicemente, osserviamo che

$$\mathrm{Th}\,s = s + \frac{1}{3}s^3 + o(s^3) \qquad \mathrm{tg}\,s = s + \frac{1}{3}s^3 + o(s^3)$$

$$\mathrm{Th}\,t^2 = t^2 + \frac{1}{3}t^6 + o(t^6) \qquad \mathrm{tg}\,4t = 4t + \frac{1}{3}64t^3 + o(t^3)$$

Dunque

$$\frac{\mathrm{Th}\,t^2 - \mathrm{tg}\,4t}{t} = \frac{t^2 + 1/3\,t^6 - 4t - 64/3\,t^3}{t}$$

$$= -4 + t + \dots$$

$$\int_{\sin x}^{x} \frac{\mathrm{Th}\,t^2 - \mathrm{tg}\,4t}{t}\,dt = \int_{\sin x}^{x} (-4 + t)\,dt$$

$$= -4\,(x - \sin x) + \frac{1}{2}\left[x^2 - (\sin x)^2\right]$$

$$= -4\left[x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2\right]$$

$$= -4\,\frac{x^3}{6}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_{\sin x}^{x} \frac{\mathrm{Th}\,t^2 - \mathrm{tg}(4t)}{t} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$ [redacted]

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_{x^3}^{x^5} \frac{\ln(1-4t)}{t}\,dt$$

Ricordiamo che

$$\ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1-4t) = -4t - \frac{16t^2}{2} - \frac{64t^3}{3} + \dots$$

$$\frac{\ln(1-4t)}{t} = -4 - 8t - \frac{64}{3}t^2 + \dots$$

$$\int_{x^3}^{x^5} \frac{\ln(1-4t)}{t}\,dt = \int_{x^3}^{x^5}\left(-4 - 8t - \frac{64}{3}t^2 + \dots\right)dt$$

$$= -4(x^5 - x^3) - \frac{8}{2}(x^{10} - x^6) + \dots$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_{x^3}^{x^5} \frac{\ln(1-4t)}{t}\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x^3} = 4$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1/n} \sqrt{x^2+\sin^2 x}\,dx$$

Osserviamo che

$$\sqrt{x^2+\sin^2 x} = x\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \quad \text{per } x \geq n$$

Inoltre, per $n\to\infty$, poiché $x > n$, $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$ e possiamo concludere che

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \dots$$

ed anche

$$x\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{x} = x + \dots$$

[redacted]

Dunque per $n \to \infty$

$$\int_n^{n+\frac{1}{n}} \sqrt{x^2+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_n^{n+1/n}$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\right] = 1$$

e la successione è convergente al valore 1.

[redacted]