Metodi Matematici per l'Ingegneria - 19/09/2013 - Parte A

1-OT. Si consideri la funzione

$$f(\mathbf{x}) = a^2\ y^4 +\ 2\ a\ y^3 - b^2\ x^2 +\ 2b\ x\ y, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \ \text{ e } a, b \neq 0.$$

1. Trovare i punti stazionari di $f(\mathbf{x})$ per $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $a, b \neq 0$.
2. Classificare i punti stazionari per $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $a, b \neq 0$.
3. Per $a = 1.5$ e $b = 1/3$ e per $a = 1$ e $b = 1$ commentare se i risultati analitici di classificazione trovati dei punti stazionari sono compatibili con il grafico 3D di f e il grafico delle linee di livello, su [-2.5,0.5,-1,0.5]. A questo fine si crei un file contenente le seguenti istruzioni

   [x, y] = meshgrid (-2.5:0.05:0.5 , -1.:0.05:0.5);
   f = ... (*si scriva la funzione obiettivo f*);
   v=[-1:0.05:1]';
   contour(x,y,f,v)

4. Si ricerchino gli eventuali massimi relativi di $f(\mathbf{x})$ utilizzando la function **fminunc** invocando sia il metodo **Quasi-Newton BFGS** (vedi 4.1 e 4.3) sia il metodo del **gradiente** (vedi 4.2 e 4.3) con le seguenti Options.

   - Il problema non è LargeScale
   - Si assegna 159 come massimo numero di valutazioni dell'obbiettivo
   - Si assegna 81 come massimo di iterazioni
   - Si usa la matrice identità come matrice iniziale approssimante l'Hessiana
   - Si fornisce il gradiente
   - Si assegnano le seguenti tolleranze: TolFun:1.e-10; TolX: 1.d-10

4.1 Nel caso del **metodo Quasi-Newton BFGS** con $\mathbf{a = 1.5}$ e $\mathbf{b = 1/3}$: si trovi il più piccolo k per cui $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||_\infty < 10^{-7}$ partendo dal punto $\mathbf{x}_0 = (0.6, -1)$ e si scriva per le iterate 0, 1, per la penultima e ultima il valore di $f(\mathbf{x}_k)$ e $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||_\infty$ e il punto $\mathbf{x}_k$.

4.2 Nel caso del **metodo del gradiente** con $\mathbf{a = 1}$ e $\mathbf{b = 1}$: si trovi il più piccolo k per cui $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||_\infty < 10^{-7}$ partendo dal punto $\mathbf{x}_0 = (-0.8, -0.8)$ e si scriva per le iterate 0, 1, per la penultima e ultima il valore di $f(\mathbf{x}_k)$ e $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||_\infty$ e il punto $\mathbf{x}_k$.

4.3 Per entrambi i casi (4.1 e 4.2) si crei il vettore g contenente $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||_\infty$=*First-order optimality*, considerando nel caso del metodo del gardiente solo le ultime 10 iterate prima del test di arresto. Si effettui il seguente programma :

   - nit= length(g);
   - for i=1:nit-1
   - it(i)=i;
   - rg(i)=g(i+1)/g(i);
   - end
   - it(nit)=nit;
   - figure(1)
   - plot(it, log10(abs(g(1:nit))),'-r*')

- xlabel(' num. it')
- ylabel(' log10(abs(g)) red')
- rg'

Riportare per entrambi i metodi il grafico qualitativo ed i valori del fattore di convergenza. Si valuti infine il tipo di convergenza osservato.

1-TD. Si $f(t) = 3t - 1$. Calcolare numericamente i coefficienti c_n per $n = -2, ..., 2$ con $N = 2^{10}$ punti di campionamento. Si considerino i polinomi trigonometrici (serie di Fourier troncate)

$$S_k(t) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{int}.$$

Si tracci un grafico di S_k per $k = 5, 25$. Commentare la convergenza di S_k.

2-TD. Sia $f(t) = \cos(3t)\sin(3t)$. Tracciare i grafici di $|c_n|$, $Re(c_n)$ e $Im(c_n)$. Calcolare (mediante i c_n)

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt.$$

Metodi Matematici per l'Ingegneria - 19/09/2013 - Parte B

1-OT. Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$, θ_k l'angolo compreso tra $\mathbf{s}_k$ e $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

1. Affinchè $\mathbf{s}_k$ risulti essere una direzione di discesa discutere, motivandola, la proprietà in termini l'angolo θ_k.
2. Sia $\alpha_{k+1} = \text{argmin}\{f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k), \forall \alpha > 0\}$ posto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{s}_k$ e $\mathbf{g}_{k+1} = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$ calcolare $\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{s}_k$.

2-OT. Sia $\mathbf{x}_k$ successione convergente a $\mathbf{x}^*$ con $f \in C^3$ e $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ e $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ definita positiva. Specificare il tipo di comportamento asintotico delle seguenti quantità:

$$rg = \frac{||\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})||}{||\nabla f(\mathbf{x}_k)||}, \quad rx = \frac{||\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*||}{||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*||}, \quad rf = \frac{f(\mathbf{x}_{k+1} - f(\mathbf{x}^*)}{f(\mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}^*)}$$

1. per il metodo del gradiente,
2. per il metodo di Newton,
3. per il metodo Quasi-Newton BFGS,
4. per il metodo della trust-region.

3-OT. Si consideri la funzione $f(\mathbf{x}) = a(y + b\ x)^2 + y^4 + cy$, con $a > 0$ e $b > 0$.

1. Trovare i punti stazionari.
2. Scrivere la condizione sufficiente del secondo ordine per i minimi e massimi e verificare se i punti stazionari soddisfano la condizione sufficiente.
3. Definire il passo di Newton δ_k e lo si determini relativamente al punto $\mathbf{x}_k = (1/b, -1)^T$.
4. Verificare che δ_k risulta una direzione di discesa.
5. Scrivere la regola di Armijo. Assegnando $c = 16$ trovare i valori di ρ per cui risulta ammissibile ammissibile $\alpha = 1$.

1-TD. Sia $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Siano $\Delta t = 2\pi/N$, $t_k = k\Delta t$, $y_k = f(t_k)$ e $w = e^{i\Delta t}$. Ricavare dalla definizione dei coefficienti di Fourier c_n l'approssimazione con i coefficienti discreti

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{-kn}.$$

2-TD. Siano c_n i coefficienti di Fourier di $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Stabilire se sono vere o false le seguenti implicazioni:

- se $c_0 = 0$ allora f ha media nulla su $(0, 2\pi)$,
- $c_0 > 0$ se solo se $f > 0$,
- se $f > 0$ allora $Im(c_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.