Analisi Funzionale – 9 CFU – I Semestre

- **Richiami.** Concetti di spazio vettoriale, normato, prehilbertiano. Seminorme. Esempi vari. Nucleo di una seminorma è sottospazio. Norme equivalenti. Sottospazi chiusi e densi rispetto alla metrica indotta dalla norma. Spazi metrici e funzioni continue. Forme sesquilineari hermitiane, semidefinite positive. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Regola del parallelogramma e norme hilbertiane. Esempi.

- **Spazi di Banach e di Hilbert.** Completezza. Esempi di spazi: fra altri, gli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$. Richiami e dimostrazione delle disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski. Completezza di $L^p(\Omega)$ fatta per bene, con estratta convergente quasi ovunque. Inclusioni tra spazi $L^p(\Omega)$, in particolare per insiemi Ω di misura finita.

- **Operatori lineari limitati tra spazi normati.** Limitati se e solo se continui. Norme di operatori lineari e continui, spazio $\mathcal{L}(V,W)$, che è completo se W è completo. Isomorfismi, esempi, preservano la completezza dello spazio. Spazio duale V' di uno spazio normato V. Dualità fra V' e V, antiduale, norme equivalenti inducono lo stesso spazio duale. Funzionali lineari e continui. Esempi: $\mathbb{R}^N$, duale di un prehilbertiano. Spazi ℓ^p: definizioni e interpretazione con misura del contare. Spazi c, c_0, c_{00}; operatori di immersione; sottospazi chiusi e densi. Duale di ℓ^p per $1 \le p < \infty$: caratterizzazione completa.

- **Complementi.** Disuguaglianza di Hölder generalizzata e disuguaglianza di interpolazione. $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$ se $p \to \infty$. Prodotti di operatori lineari e limitati; un esempio di serie di operatori. Insieme degli isomorfismi di $\mathcal{L}(V,V)$ è aperto. Esempi di operatori lineari e limitati tra spazi $L^p(\Omega)$ o ℓ^p.

- **Teorema di Hahn-Banach.** Introduzione al teorema di Hahn-Banach. Enunciato lemma di Zorn con commenti ed esempi. Teorema di Hahn-Banach in forma analitica, dimostrazione nel caso reale ed estensione al caso complesso. Corollari per spazi normati e sottospazi densi. Applicazioni: $(\ell^\infty)'$ include strettamente ℓ^1, con esempio di funzionale che estende $\lim_{n\to\infty} x_n$ per elementi $x = (x_n)$ del sottospazio c. Funzionale nullo su c_0 ma non nullo in c. Corollari di Hahn-Banach: per $x \in V$ esiste $f \in V'$ con $\|f\|_* = \|x\|$ e $\langle f,x\rangle = \|x\|^2$; $\|x\| = \max|\langle f,x\rangle|$ al variare di $f \in V'$ con norma unitaria. Convergenze deboli e semicontinuità inferiore della norma.

- **Forme geometriche del teorema di Hahn-Banach.** Funzionali di Minkovski e proprietà per convesso aperto che contiene lo 0. Teorema di Hahn-Banach prima forma geometrica. Esempi di separazione e osservazioni. Teorema di Hahn-Banach seconda forma geometrica. Isomorfismo canonico J e definizione di spazio riflessivo. Spazi strettamente convessi: esempi ed enunciato del teorema di Asplund. Applicazione di dualità $\mathcal{F}$. Se V e V' sono strettamente convessi, $\mathcal{F}$ è ad un solo valore ed è iniettiva. Caso degli spazi di Hilbert. $J = \mathcal{F}^*\mathcal{F}$ con dimostrazione e osservazioni. Convergenza debole* e proprietà. Significato di convergenza debole in $L^p(\Omega)$ per $p \neq \infty$ e di convergenza debole* in ℓ^∞: convergenza puntuale della successione di successioni. Convergenze deboli su sottoinsiemi densi per successioni limitate. Esempi con $\sin(nx)$ e $\sin^2(nx)$. Ortogonali di sottospazi in spazi di Banach e nei loro duali: proprietà.

- **Funzioni convesse e s.c.i.** Funzioni semicontinue inferiormente, proprietà, esistenza del minimo. Introduzione alle funzioni convesse proprie, caratterizzazioni e proprietà, funzione indicatrice, prolungamenti a $+\infty$. Insiemi convessi chiusi sono intersezione dei semispazi chiusi che li contengono. I convessi chiusi sono anche sequenzialmente chiusi rispetto alla convergenza debole. Funzioni convesse proprie semicontinue inferiormente: proprietà ed esempi, teorema di esistenza del minimo. Quando il minimo è unico? Esistenza della proiezione su convesso chiuso non vuoto in uno spazio di Banach riflessivo. Funzioni convesse coniugate, definizione e prime proprietà. Esempi, calcolo di funzioni coniugate in $\mathbb{R}$, coniugata della funzione norma in un generico spazio V. Bi-coniugata e teorema di Fenchel-Moreau. Integrandi convessi: un esempio con verifiche. Regolarizzazione di funzioni convesse, proprie e s.c.i. per inf-convoluzione.

- **Teoremi di Banach-Steinhaus e dell'applicazione aperta.** Lemma di Baire. Teorema di Banach-Steinhaus e corollari svolti per bene. Definizione di applicazione aperta, suriettività e caratterizzazione con palle di centro l'origine. Dimostrazione teorema applicazione aperta e corollari su isomorfismi e norme equivalenti. Teorema del grafico chiuso. Relazioni fra equivalenza di norme e completezza, esempi. Chiusura di una somma di sottospazi chiusi: condizione necessaria e sufficiente. Casi di spazi di Hilbert e di somme dirette. Supplementare topologico: esempi e casi in cui esiste.

- **Operatori aggiunti.** Operatori lineari non limitati: definizione ed esempi. Operatori aggiunti A^* di operatori lineari A non limitati a dominio denso. Esempi: operatori limitati, derivata in $L^1(0,1)$ con condizioni al bordo. A^* chiuso. Isomorfismo da $G(A^*)$ in $G(A)^\perp$. Teorema di caratterizzazione e relazioni tra nuclei e immagini. Caso dell'immersione di un sottospazio denso in tutto lo spazio. A suriettivo se e solo se $R(A)$ è chiuso e A^* è iniettivo. Se A^* è suriettivo allora A è iniettivo, viceversa non vale. Esempi: $Au = u'$ con differenti domini, nucleo di convoluzione da $L^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$, traslazione da ℓ^p in ℓ^p.

- **Topologie deboli.** Basi di intorni, convergenza successioni, continuità funzioni. Topologia debole $\sigma(E,E')$ per uno spazio di Banach E: separa i punti, intorni, convergenze deboli, caso dimensione finita, sfera unitaria non è chiusa debole e sua chiusura è la palla unitaria. Convessi chiusi forti sono anche chiusi deboli. Operatori lineari e loro continuità. Topologia debole* e proprietà. Teoremi di Banach-Alaoglu-Bourbaki (senza dimostrazione) e Kakutani (solo una implicazione). Ogni sottospazio chiuso di spazio riflessivo è esso stesso riflessivo. E è riflessivo se e solo se E' è riflessivo. Spazi separabili e prime proprietà: sottoinsiemi; E' separabile implica E separabile; se E è riflessivo, E è separabile se e solo se E' è separabile. Proprietà di metrizzabilità delle palle e conseguenze: compattezza debole sequenziale e compattezza debole* sequenziale. Spazi uniformemente convessi, teorema di Milman-Pettis (solo enunciato), convergenza debole più convergenza delle norme implicano convergenza forte.

- **Riflessività e separabilità di $\mathbf{L^p(\Omega)}$.** Prima disuguaglianza di Clarkson. $L^p(\Omega)$ è riflessivo, prima per $2 \le p < \infty$, poi per $1 < p < 2$ con l'aiuto dell'operatore di Riesz. Duale di $L^p(\Omega)$ per $1 < p < \infty$: teorema di Riesz. Il duale di $L^1(\Omega)$ è $L^\infty(\Omega)$ con dimostrazione. Densità di delle funzioni a scala e di $C^0_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$. Separabilità di $L^p(\Omega)$ per $p \neq \infty$; $L^\infty(\Omega)$ non è separabile se Ω ha punti interni. $L^\infty(\Omega)$ non è riflessivo e il suo duale contiene strettamente $L^1(\Omega)$. Riepilogo dei risultati su convergenze deboli e deboli* per sottosuccessioni di successioni limitate.

- **Spazi di Hilbert.** Teorema delle proiezioni e proprietà degli operatori di proiezione. Caso dei sottospazi. Teorema di Riesz con dimostrazione da cui si vede codimensione 1 del nucleo. Inclusioni fra spazi di Hilbert: identificare o meno? Teorema di Lions-Stampacchia, con dimostrazione che fa uso del teorema delle proiezioni. Lemma di Lax-Milgram e osservazioni relative. Somme hilbertiane e basi hilbertiane: risultati con dimostrazioni. Un'applicazione di Lax-Milgram in $H^1(a,b)$ per una forma non simmetrica.