Appunti di Analisi Matematica 4

Edoardo Tolotti

Indice

1 Algebre, σ-algebre e misure

Definizione 1.1 (Algebra)**.** *Una collezione $\mathscr{M}$ di sottoinsiemi di un insieme Ω si dice algebra se:*

- $\emptyset \in \mathscr{M}$
- $A \in \mathscr{M} \implies \mathscr{C}_A \in \mathscr{M}$
- $A, B \in \mathscr{M} \implies A \cup B \in \mathscr{M}$

Osservazione 1.1. Direttamente dalla definizione segue che:

- $\Omega \in \mathscr{M}$ $(\Omega = \mathscr{C}_\emptyset)$
- $A, B \in \mathscr{M} \implies A \cap B \in \mathscr{M}$ $(A \cap B = \mathscr{C}_{\mathscr{C}_A \cup \mathscr{C}_B})$
- $A, B \in \mathscr{M} \implies A \backslash B \in \mathscr{M}$ $(A \backslash B = A \cap \mathscr{C}_B)$

Esempio 1.1. Alcuni esempi di σ-algebre sono:

- Dato Ω un qualsiasi insieme le collezioni $\mathscr{P}(\Omega)$ e $\{\emptyset, \Omega\}$ sono sempre algebre
- Se $\Omega = \mathbb{R}^2$ l'insieme $\mathscr{M} := \{\ R \subseteq \mathbb{R}^2 \mid R$ unione finita di rettangoli$\}$ è un algebra

Definizione 1.2 (Finita additività)**.** *$\mathscr{M}$ famiglia di sottoinsiemi di Ω. Una funzione $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ si dice finitamente additiva se:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A, B \in \mathscr{M}$ *tali che* $A \cup B \in \mathscr{M}$ *e* $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Proposizione 1.1. *$\mathscr{M}$ algebra, $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ finitamente additiva. Allora vale che:*

1. $A, B \in \mathscr{M},\ A \subseteq B \implies \mu(A) \le \mu(B)$
2. $A, B \in \mathscr{M},\ A \subseteq B,\ \mu(A) < +\infty \implies \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M} \implies \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Dimostrazione. 1),2) $B = A \cup (B \backslash A)$ e inoltre $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$ quindi segue che $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \ge \mu(A)$
3) $A_1 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{2} A_i) \cup \dots \cup (A_n \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) \implies \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) \le \mu(A_1) + \cdots \mu(A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ ∎

Definizione 1.3 (Misura)**.** *$\mathscr{M}$ algebra, $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ si dice misura se:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ *tale che* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *e* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M} \implies \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Si dice che μ *è* σ*-additiva o numerabilmente additiva.*

Osservazione 1.2. μ σ-additiva $\implies$ μ finitamente additiva

Definizione 1.4 (σ-algebra)**.** $\mathscr{M}$ *famiglia di sottoinsiemi di* Ω *si dice* σ*-algebra se:*

- $\emptyset \in \mathscr{M}$
- $A \in \mathscr{M} \implies \mathscr{C}_A \in \mathscr{M}$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$

Osservazione 1.3. $\mathscr{M}$ σ-algebra $\implies$ $\mathscr{M}$ algebra

Osservazione 1.4. Dato Ω insieme qualunque $\mathscr{P}(\Omega)$ e $\{\emptyset, \Omega\}$ sono σ-algebre.

Osservazione 1.5. In modo analogo a come già osservato per le algebre si mostra che una σ-algebra è chiusa rispetto all'intersezione e alla differenza numerabile di insiemi.

Proposizione 1.2. *Data* $\mathscr{F}$ *famiglia di sottoinsiemi* Ω $\exists !$ $\sigma(\mathscr{F})$ σ*-algebra tale che* $\mathscr{F} \subseteq \sigma(\mathscr{F})$ *e* $\forall$ $\mathscr{M}$ σ*-algebra tale che* $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$ *allora* $\sigma(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{M}$

Dimostrazione. Almeno una σ-algebra contenente $\mathscr{F}$ esiste ed è $\mathscr{P}(\Omega)$. Inoltre si mostra facilmente che l'intersezione di σ-algebre è ancora una σ-algebra quindi risulta $\sigma(\mathscr{F}) = \bigcap\limits_{\substack{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{M} \\ \mathscr{M}\, \sigma\text{-algebra}}} \mathscr{M}$ ∎

Definizione 1.5 (σ-algebra generata)**.** $\sigma(\mathscr{F})$ *come nella proposizione precedente viene detta* σ*-algebra generata da* $\mathscr{F}$*.*

Definizione 1.6 (Spazio misurabile)**.** Ω *insieme,* $\mathscr{M}$ σ*-algebra. La coppia* $(\Omega, \mathscr{M})$ *si dice spazio misurabile.*

Definizione 1.7 (Spazio di misura)**.** Ω *insieme,* $\mathscr{M}$ σ*-algebra,* μ *misura. La terna* $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *si dice spazio di misura.*

Definizione 1.8 (Spazio di misura finito)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura si dice finito se* $\mu(\Omega) < +\infty$*. In questo caso anche* μ *si dice finita.*

Definizione 1.9 (Spazio di misura σ-finito)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura si dice* σ*-finito se* $\exists$ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ *tale che* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ *e* $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ $\mu(A_n) < +\infty$.

Definizione 1.10 (Insieme trascurabile)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura,* $A \in \mathscr{M}$ *si dice trascurabile (o* μ*-trascurabile) se* $\mu(A) = 0$.

Esempio 1.2. Alcuni esempi di spazi misurabili:

- Misura di Dirac: Ω insieme, $x_0 \in \Omega$, $\mathscr{M} := \mathscr{P}(\Omega)$. $\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$

  $(\Omega, \mathscr{M}, \delta_{x_0})$ è uno spazio di misura finito

- Misura del contare: Ω insieme, $\mathscr{M} := \mathscr{P}(\Omega)$ $\#(A) := \begin{cases} \#A & \text{se A è finito} \\ +\infty & \text{se A è infinito} \end{cases}$

  Se Ω ha cardinalità finita allora $(\Omega, \mathscr{M}, \#)$ è uno spazio di misura finito mentre se Ω è numerabile allora $(\Omega, \mathscr{M}, \#)$ è σ-finito.

Proposizione 1.3. $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura. Vale che:*

1. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *(*$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si dice successione crescente di insiemi)*

2. $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M},\ B_n \supset B_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu(B_1) < +\infty \implies \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$ *(*$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si dice successione decrescente di insiemi)*

Dimostrazione. 1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \cdots = A_1 \cup (\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} A_n \backslash A_{n-1}) \implies \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \backslash A_{n-1}) = \mu(A_1) + \lim\limits_{n\to+\infty} (\sum\limits_{i=2}^{n} \mu(A_i \backslash A_{i-1})) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \cdots + \mu(A_n \backslash A_{n-1})) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

2) $A_n := B_1 \backslash B_n$. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi. Inoltre $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ e analogamente $\forall\ k \in \mathbb{N}\ B_k = B_1 \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$. Siccome $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \subseteq B_1\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ si ha che $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n) \leq \mu(B_1) < +\infty\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Allora $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(B_1 \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(B_1) - \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(B_1) - \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mu(B_1) - \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(B_1 \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(B_n)$ ∎

Esempio 1.3. L'ipotesi che $\mu(B_1) < +\infty$ è necessaria, altrimenti si possono trovare controesempi. Preso $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \#)$ spazio di misura, $B_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ si ha che $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \mu(B_k) = +\infty$ ma $\mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k) = \mu(\emptyset) = 0$

Definizione 1.11 (Misura esterna). Ω *insieme,* $\lambda : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *si dice misura esterna su* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$*se vale che:*

- $\lambda(\emptyset) = 0$
- $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *tali che* $A \subseteq B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\Omega),\ A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \implies \lambda(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ *(sub-additività)*

2 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Vogliamo definire una misura esterna su $\mathbb{R}^N$. Chiameremo intervalli di $\mathbb{R}^N$ gli insiemi prodotto di intervalli limitati, eventualmente degeneri, di $\mathbb{R}$. Preso un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}^N,\ I = \bigotimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ pongo $|I|= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. Quindi, dato $A \subseteq \mathbb{R}^N$, pongo

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k||\ \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ insieme di intervalli tali che } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

Proposizione 2.1. *μ^* è una misura esterna su* $(\mathbb{R}^N, \mathscr{P}(\mathbb{R}^N))$

Dimostrazione. Sia per brevità $M(A) := \{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k||\ \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ insieme di intervalli tali che $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$. Ovviamente $\mu^*(\emptyset) = 0$ perchè $\{\{0\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ricopre $\emptyset \implies 0 \in M(\emptyset)$. Preso $A \subseteq B$ è chiaro che $M(A) \subseteq M(B) \implies \inf(M(A)) \leq \inf(M(B))$. Mostriamo ora la sub-additività. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = +\infty$ allora la sub-additività è banalmente vera. Supponiamo quindi che $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty$. $\forall\ \epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ \{I_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di intervalli che ricopre A_n tale che $\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|\leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Ovviamente $\{I_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}}$ ricopre A quindi $\mu^*(A) \leq \sum_{n,k}|I_{n,k}| \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$ quindi facendo tendere $\epsilon \to 0$ si ha che $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ ((1) è possibile perchè la serie è assolutamente convergente) ∎

Proposizione 2.2. *I intervallo di* $\mathbb{R}^N \implies |I|= \mu^*(I)$

Dimostrazione. Siccome I ricopre se stesso è chiaro che $\mu^*(I) \leq |I|$ quindi mostriamo che $|I|\leq \mu^*(I)$. Sia $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di intervalli che ricoprono I. Fissato $\epsilon > 0\ \exists\ K$ intervallo chiuso tale che $K \subseteq I,\ |K|\geq |I|-\frac{\epsilon}{2}$. Inoltre $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ L_n$ intervallo aperto tale che $|L_n|\leq |J_n|+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Ovviamente $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ ma siccome K è compatto $\exists\ \bar{n}$ tale che $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\bar{n}} L_n$. Siccome $|K|\leq \sum_{n=1}^{\bar{n}}|L_n|$ si ha che $|I|-\frac{\epsilon}{2} \leq |K|\leq \sum_{n=1}^{\bar{n}}|L_k|\leq \sum_{n=1}^{\bar{n}}|J_n|+ \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|J_n|+\frac{\epsilon}{2} \implies |I|\leq \sum_{n=1}^{\infty}|J_k|+\epsilon \implies |I|\leq \sum_{n=1}^{\infty}|J_k| \implies |I|\leq \mu^*(I)$ ∎

Osservazione 2.1. Preso $\delta > 0$ e $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è chiaro che una definizione equivalente di $\mu^*(A)$ è $\mu^*(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n||\ \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di intervalli tali che $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\mathrm{diam}(I_n) \leq \delta\ \forall\ n \in \mathbb{N}\}$

Proposizione 2.3. *$F_1, \ldots, F_n \subseteq \mathbb{R}^N$ insiemi chiusi e limitati tali che $\forall\ i \neq j\quad F_i \cap F_j = \emptyset$. Vale che* $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(F_i)$

Dimostrazione. Basta mostrare la proposizione per $n = 2$ (per un generico n segue facilmente per induzione). Sia $d := dist(F_1, F_2)$. $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di intervalli tali che $F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $diam(I_k) \leq \frac{d}{2}$ e $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq \mu^*(F_1 \cup F_2) + \epsilon$. Allora posso estrarre da $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ degli intervalli che ricoprono separatamente F_1 e F_2 e quindi $\mu^*(F_1) + \mu^*(F_2) \leq \sum_{I_k\cap F_1\neq\emptyset}|I_k|+ \sum_{I_k\cap F_2\neq\emptyset}|I_k|\leq \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq \mu^*(F_1 \cup F_2) + \epsilon$. Grazie alla definizione di misura esterna segue la tesi. ∎

Proposizione 2.4. *$\forall\ G \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e limitato, $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ F \subseteq G$ chiuso tale che $\mu^*(F) > \mu^*(G) - \epsilon$*

Dimostrazione. Sia $G \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e limitato e $\epsilon > 0$. Con un processo di 'reticolazione' è possibile ricoprire G con una successione di intervalli $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a due a due disgiunti tali che $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad I_n \subseteq G$. Ovviamente per definizione di misura esterna $\mu^*(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$ quindi $\exists\ \bar{n}$ tale che $\sum_{i=1}^{\bar{n}}|I_i|> \mu^*(G) - \frac{\epsilon}{2}$. Inoltre $\forall i = 1, \ldots, \bar{n} \quad \exists\ J_i \subseteq I_i$ intervallo chiuso e limitato tale che $|J_i|> |I_i|-\frac{\epsilon}{2\bar{n}}$. Allora $F := \bigcup_{i=1}^{\bar{n}} J_i$ è chiuso ed è quello cercato. Infatti per la proposizione appena precedente si ha che $\mu^*(F) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \mu^*(J_i) = \sum_{i=1}^{\bar{n}}|J_i|> \sum_{i=1}^{\bar{n}}|I_i|-\frac{\epsilon}{2} > \mu^*(G) - \epsilon$ ∎

Proposizione 2.5. *$\forall\ G \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e limitato, $\forall\ F \subseteq G$ chiuso vale che $\mu^*(G\backslash F) = \mu^*(G) - \mu^*(F)$*

Dimostrazione. Grazie alla sub-additività della misura esterna vale immediatamente che

$$\mu^*(G) \leq \mu^*(F) + \mu^*(G\backslash F) \implies \mu^*(G\backslash F) \geq \mu^*(G) - \mu^*(F)$$

Mostriamo la disuguagliana opposta. $G\backslash F$ è aperto quindi per quanto appena visto $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ F_1 \subseteq G\backslash F$ chiuso tale che $\mu^*(F_1) > \mu^*(G\backslash F) - \epsilon$. Allora $\mu^*(F) + \mu^*(G\backslash F) < \mu^*(F) + \mu^*(F_1) + \epsilon = \mu^*(F \cup F_1) + \epsilon \leq \mu^*(G) + \epsilon \implies \mu^*(G\backslash F) \leq \mu^*(G) - \mu^*(F)$ ∎

Definizione 2.1 (Insieme misurabile secondo Lebesgue)**.** *$A \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ F_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso e $\exists\ G_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto tali che $F_\epsilon \subseteq A \subseteq G_\epsilon$ e $\mu^*(G\backslash F) < \epsilon$*

Teorema 2.1. *$\mathscr{L} := \{A \subseteq \mathbb{R}^N \mid A$ misurabile$\}$ è un'algebra di $\mathbb{R}^N$*

Dimostrazione. Ovviamente $\emptyset \in \mathscr{L}$ perchè $\emptyset \subseteq \emptyset \subseteq \emptyset$ e $\emptyset$ è sia aperto che chiuso.
Preso $A \in \mathscr{L}$ per ipotesi si ha che $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ F_\epsilon$ chiuso e $\exists\ G_\epsilon$ aperto tali che $F_\epsilon \subseteq A \subseteq G_\epsilon$ e $\mu^*(G_\epsilon\backslash F_\epsilon) < \epsilon$. Allora $\mathscr{C}_{G_\epsilon}$ è chiuso, $\mathscr{C}_{F_\epsilon}$ è aperto, $\mathscr{C}_{G_\epsilon} \subseteq \mathscr{C}_A \subseteq \mathscr{C}_{F_\epsilon}$ e $\mu^*(\mathscr{C}_{F_\epsilon}\backslash\mathscr{C}_{G_\epsilon}) = \mu^*(G_\epsilon\backslash F_\epsilon) < \epsilon \implies \mathscr{C}_A \in \mathscr{L}$.
Siano ora $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$. Mostriamo che $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{L}$ (siccome $A_1 \cup A_2 = \mathscr{C}_{\mathscr{C}_{A_1}\cap\mathscr{C}_{A_2}}$ allora anche $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{L}$). Fissato $\epsilon > 0 \quad \exists\ F_1, F_2$ chiusi e $\exists\ G_1, G_2$ aperti tali che $F_1 \subseteq A_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq A_2 \subseteq G_2$, $\mu^*(G_1\backslash F_1) < \frac{\epsilon}{2}$ e $\mu^*(G_2\backslash F_2) < \frac{\epsilon}{2}$. Allora posto $F := F_1 \cap F_2$ e $G := G_1 \cap G_2$ vale

che $F \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq G$ e inoltre $\mu^*(G\backslash F) = \mu^*((G_1\backslash G_1) \cup (G_2\backslash F_2)) \leq \mu^*(G_1\backslash F_1) + \mu^*(G_2\backslash F_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies A_1 \cap A_2 \in \mathscr{L}$ ■

Proposizione 2.6. *A limitato.* $A \in \mathscr{L} \iff \forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ F_\epsilon \subseteq A$ *chiuso tale che* $\mu^*(F_\epsilon) > \mu^*(A) - \epsilon$

Dimostrazione. $\implies$) È ovvia perchè esistono F_ϵ chiuso, G_ϵ aperto, tali che $\mu^*(A) \leq \mu^*(G_\epsilon) \leq \mu^*(G_\epsilon\backslash F_\epsilon) + \mu^*(F_\epsilon) < \epsilon + \mu^*(F_\epsilon)$

$\impliedby$) Fissato $\epsilon > 0\ \exists\ \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di intervalli aperti tali che $\mathrm{diam}(I_n) < 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < \mu^*(A) + \epsilon$. Pongo $G_\epsilon := \bigcup\limits_{I_n \cap A \neq \emptyset} I_n$. Ovviamente G_ϵ è limitato e inoltre $\mu^*(G_\epsilon\backslash F_\epsilon) = \mu^*(G_\epsilon) - \mu^*(F_\epsilon) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| - \mu^*(F_\epsilon) < \mu^*(A) + \epsilon - \mu^*(F_\epsilon) \leq 2\epsilon$ quindi $A \in \mathscr{L}$ ■

Teorema 2.2. $\mathscr{L}$ *è una* σ*-algebra e* μ^* *è* σ*-additiva su* $\mathscr{L}$

Dimostrazione. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ successione tale che $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$. Supponiamo inoltre che $\exists\ I$ intervallo limitato tale che $A_n \subseteq I \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Fissato $\epsilon > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ F_n \subseteq A_n$ chiuso tale che $\mu^*(F_n) > \mu^*(A_n) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ (per la proposizione appena dimostrata). Siccome $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \exists\ k \in \mathbb{N}$ tale che $\sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) > \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \frac{\epsilon}{2}$. Sia quindi $F := \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n$. F è ovviamente chiuso e siccome $F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$ vale che $\mu^*(F) = \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(F_n) > \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) - \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} > \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) - \frac{\epsilon}{2} > \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ quindi per la proposizione precedente $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$. Inoltre $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) < \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(F_n) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} < \sum\limits_{n=1}^{k} \mu^*(F_n) + \frac{\epsilon}{2} = \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n\right) + \frac{\epsilon}{2} \leq \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n\right) + \frac{\epsilon}{2} \leq \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \frac{\epsilon}{2} \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ quindi in questo caso μ^* è σ-additiva.

Supponiamo ora di avere una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ tale che $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$. Sia $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ una successione di intervalli limitati tali che $I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \mathbb{R}^N$ e inoltre $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato $\exists\ \{k_1, \ldots, k_t\} \subseteq \mathbb{N}$ tali che $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{t} I_{k_i}$. Posto $B_j := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \cap I_j)$ per quanto dimostrato finora $\forall\ j \in \mathbb{N} \quad B_j \in \mathscr{L}$. Inoltre $\forall\ i \neq j \quad B_i \cap B_j = \emptyset$ e $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. $\forall\ \epsilon > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists\ F_j$ chiuso, G_j aperto tali che $F_j \subseteq B_J \subseteq G_j$ e $\mu^*(G_j\backslash F_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$. Mostriamo che $F := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$ è chiuso. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ una successione convergente. Allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata $\implies \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sta in un numero finito di chiusi $F_j \implies \bar{x} := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ sta in uno di tali F_j

e quindi $\bar{x} \in F$. Inoltre $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$ è aperto. Posto $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ si ha che $F \subseteq A \subseteq G$ e $G \backslash F = \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \backslash F) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \backslash F_j)$ quindi $\mu^*(G \backslash F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(G_j \backslash F_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon \implies A \in \mathscr{L}$. Inoltre anche in questo caso μ^* è σ-additiva. Infatti $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_j)$ e $\forall\ n \geq 1 \quad \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(F_j) + \sum_{j=1}^{n} \mu^*(G_j \backslash F_j) \leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j \right) + \epsilon \leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) + \epsilon = \mu^*(A) + \epsilon$ quindi facendo tendere $n \to +\infty$ si trova $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) \leq \mu^*(A)$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) \leq \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \implies \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Sia ora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ una successione qualsiasi. Costruisco $\{A'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ ponendo $A'_1 = A_1$ e $A'_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \quad \forall\ n > 1$. Ovviamente $\forall\ i \neq j \quad A'_i \cap A'_j = \emptyset \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$ ∎

Definizione 2.2 (Misura di Lebesgue). $(\mathbb{R}^N, \mathscr{L}, \mu)$ *con* $\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{L}}$ *è uno spazio di misura e* μ *viene detta misura di Lebesgue.*

Teorema 2.3. $A \subseteq \mathbb{R}^N,\ A \in \mathscr{L} \iff$ *vale una tra le seguenti:*

1. *A è un'unione numerabile di chiusi e insiemi μ^*-trascurabili*

2. *A è intersezione numerabile di aperti meno un μ^*-trascurabile*

Inoltre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathscr{L}$

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathscr{L}$. Per quanto dimostrato finora ogni aperto limitato è misurabile. Preso $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto qualunque e la successione $I_n := (-n, n)^N$ si ha che $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n)$ e siccome $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad A \cap I_n \in \mathscr{L}$ anche $A \in \mathscr{L}$. Allora poichè ogni chiuso è complementare di un aperto anche tutti i chiusi sono contenuti in $\mathscr{L}$ e questo dimostra che $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathscr{L}$.

$\impliedby$) Mostriamo che ogni insieme μ^*-trascurabile è anche μ-trascurabile e misurabile. Sia B tale che $\mu^*(B) = 0$. $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di intervalli che ricopre B e tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Inoltre $\exists\ \{I'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di intervalli tali che $I'_n \subseteq I_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ e $|I'_n| \leq |I_n| + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Posto $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$ e $F := \emptyset$ vale ovviamente che $F \subseteq B \subseteq G$ e inoltre $\mu^*(G \backslash F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies B \in \mathscr{L}$ e $\mu(B) = 0$.

$\implies$) Sia $A \in \mathscr{L}$. Allora $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ F_n$ chiuso e G_n aperto tali che $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ e

$\mu^*(G_n \backslash F_n) < \dfrac{1}{n}$. Posto $F := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ e $N := A \backslash F$ si ha che N è μ-trascurabile. Infatti $\mu^*(N) \leq \mu^*(G_n \backslash F_n) < \dfrac{1}{n} \to 0 \implies \mu^*(N) = 0 = \mu(N)$. Ovviamente $A = F \cup N$ e analogamente $\mathscr{C}_A = \mathscr{C}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} \cap \mathscr{C}_N = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_{F_n}) \backslash N$ ■

Osservazione 2.2. $\mathscr{L}$ è la σ-algebra generata da $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ e dagli insiemi μ^*-trascurabili.

Proposizione 2.7. $\forall A \in \mathbb{R}^N \quad \mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \mid G$ *aperto e* $A \subseteq G\}$. *Se inoltre* $A \in \mathscr{L}$ *allora* $\mu(A) = \mu^*(A) = \sup\{\mu(F) \mid F$ *chiuso e limitato t.c* $F \subseteq A\}$

Dimostrazione. La prima proprietà è ovvia perchè ogni aperto può essere rappresentato come unione di intervalli. Mostriamo la seconda. Sia $A \in \mathscr{L}$. Fissato $\epsilon > 0$ e posto $A_n := A \cap (-n, n)^N$ si ha che $\mu(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n)$ quindi se $\mu(A) < +\infty \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_n) > \mu(A) - \dfrac{\epsilon}{2}$ e inoltre $\exists\, F$ chiuso tale che $\mu(F) > \mu(A) - \dfrac{\epsilon}{2}$ quindi $\mu(F) > \mu(A) - \epsilon$. Se invece $\mu(A) = +\infty \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_n) > 2\epsilon \implies \exists\, F$ chiuso tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \epsilon = \epsilon$ ■

Esempio 2.1. L'insieme di Cantor è μ-trascurabile nonostante abbia cardinalità più che numerabile. Si pone

$$\begin{aligned} C_0 &:= [0,1] \\ C_1 &:= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &:= \left[1, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'insieme di Cantor è l'insieme $C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. $C \in \mathscr{L}$ perchè intersezione numerabile di chiusi e inoltre C è μ-trascurabile perchè $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mu(C_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ e $\mu(C) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(C_n) = 0$. Si mostra che gli elementi di C sono tutti e soli quelli la cui espansione decimale in base 3 contiene solo le cifre 0 e 2. Allora la mappa $h : [0,1] \to C \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{c_i}{2^i} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{2c_i}{3^i}$ dove $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{c_i}{2^i}$ è la scrittura decimale in base 2 di un generico elemento di $[0,1]$ è biunivoca e quindi $\#C = \#[0,1] = \#\mathbb{R}$

3 Funzioni misurabili e integrale di Lebesgue

In tutta la sezione si lavorerà in $(\Omega, \mathscr{M})$ spazio misurabile.

Definizione 3.1 (Proprietà quasi ovunque)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura. Si dice che una proprietà vale quasi ovunque se vale in* $\Omega \backslash N$ *con* N μ*-trascurabile*

Definizione 3.2 (Funzione misurabile)**.** $(\Omega, \mathscr{M})$ *spazio misurabile,* $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. f *si dice misurabile se* $\forall\, a \in \mathbb{R}$ *gli insiemi* $\{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathscr{M}$

Proposizione 3.1. $(\Omega, \mathscr{M})$ *spazio misurabile,* $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Sono equivalenti:*

1. $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathscr{M}$
2. $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\} \in \mathscr{M}$
3. $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \in \mathscr{M}$
4. $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \leq a\} \in \mathscr{M}$

Dimostrazione. 1) $\implies$ 2) Sia $X_n := \left\{x \in \Omega \mid f(x) > a - \dfrac{1}{n}\right\}$. Per ipotesi $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad X_n \in \mathscr{M} \implies \{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathscr{M}$

2) $\implies$ 3) $\{x \in \Omega \mid f(x) < a\} = \mathscr{C}_{\{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\}} \in \mathscr{M}$

3) $\implies$ 4) La dimostrazione è identica a quella di 1) $\implies$ 2)

4) $\implies$ 1) La dimostrazione è identica a quella di 2) $\implies$ 3) ■

Osservazione 3.1. $(\Omega, \mathscr{M})$ spazio misurabile. $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile $\iff f^{-1}(B) \in \mathscr{M} \quad \forall\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

Proposizione 3.2. $(\Omega, \mathscr{M})$ *spazio di misura.* $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *misurabile* $\implies -f, f^+, f^-, |f|, kf \quad \forall\ k \in \mathbb{R}$ *sono misurabili. Inoltre se* $g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *è un'altra funzione misurabile anche* $f + g, fg, \max(f, g), \min(f, g)$ *sono misurabili.*

Dimostrazione. $-f$) Ovvia per la proposizione precedente

f^+) $\{x \in \Omega \mid f^+(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathscr{M} & a \geq 0 \\ \Omega \in \mathscr{M} & a < 0 \end{cases}$

f^-) Analoga alla precedente

kf) Ovvia dalla definizione

$f + g$) $\{x \in \Omega \mid f(x) + g(x) > a\} = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \big(\{x \in \Omega \mid f(x) > r\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) > a - r\}\big) \in \mathscr{M}$

fg) f^2 è misurabile. Infatti

$$\{x \in \Omega \mid f^2(x) > a\} = \begin{cases} \Omega \in \mathscr{M} & a < 0 \\ \{x \in \Omega \mid f(x) < -\sqrt{a}\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) > \sqrt{a}\} \in \mathscr{M} & a \geq 0 \end{cases}$$

Siccome $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ anche fg è misurabile.

max) $\max(f,g) = f + (g-f)^+$ è misurabile

min) $\min(f,g) = f - (g-f)^-$ è misurabile ∎

Proposizione 3.3. *$(\Omega, \mathscr{M})$ spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili. Allora anche:*

- $f(x) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$
- $g(x) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$
- $u(x) := \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$
- $v(x) := \limsup\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

sono misurabili

Dimostrazione. f) $\{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) > a\} \in \mathscr{M} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

g) $\{x \in \Omega \mid g(x) \leq a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) < a\} \in \mathscr{M} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

u) $u(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$ è misurabile per i punti precedenti

v) $v(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$ è misurabile per i punti precedenti

∎

Corollario 3.1. *$(\Omega, \mathscr{M})$ spazio di misura, $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili tali che $f_n \to f$ puntualmente $\implies f$ misurabile*

Definizione 3.3 (Funzione semplice)**.** *Una funzione $s : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice semplice se assume solo un numero finito di valori.*

Osservazione 3.2. Ogni funzione semplice è combinazione lineare di funzioni caratteristiche.

Dato $E \in \Omega$ si indicherà con $\mathbb{1}_E$ la funzione caratteristica di E.

Osservazione 3.3. $s := \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}$ semplice è misurabile $\iff \forall\, i = 1, \dots, n \quad E_i \in \mathscr{M}$

Teorema 3.1. *$f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora $\exists\ \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni semplici tali che $s_n \to f$ in Ω. Inoltre se f è misurabile è possibile scegliere le funzioni semplici s_n in modo che siano misurabili. Se f è anche non negativa la successione può essere scelta crescente (si dirà che $s_n \nearrow f$)*

Dimostrazione. Sia $F_n := \{x \in \Omega \mid f(x) \geq n\} = f^{-1}([n, +\infty])$ e $E_{n,k} := \left\{x \in \Omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, k = 1, \ldots, n2^n$. Se f è non negativa pongo $s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}} + n\mathbb{1}_{F_n}$. È chiaro che $s_n \nearrow f$ e inoltre se f è anche misurabile allora $F_n, E_{n,k} \in \mathscr{M} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ k = 1, \ldots, n2^n \implies s_n$ misurabile $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Se f è di segno qualunque posso costruire $\{s_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $s_n^+ \nearrow f^+$ e $s_n^- \nearrow f^-$ e quindi posto $s_n = s_n^+ - s_n^-$ si ha che $s_n \to f$ ■

Osservazione 3.4. Se $\Omega = \mathbb{R}^N$ posso inoltre scegliere la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dell'enunciato precedente in modo che sia nulla al di fuori di un compatto. Infatti posto $Q_n := [-n.n]^N$ basta definire $s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}\cap Q_n} + n\mathbb{1}_{F_n\cap Q_n}$

D'ora in avanti considereremo invece $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazi di misura.

Definizione 3.4 (Inetgrale di una funzione semplice)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $E \in \mathscr{M}$. Sia $s := \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}$ una funzione semplice misurabile e non negativa ($\implies c_i \geq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$). Chiamo integrale di s su E il valore $I_E(s) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E)$. Per convenzione poniamo che se $\mu(E_i \cap E) = +\infty$ e $c_i = 0$ allora $c_i\mu(E_i \cap E) = 0$*

Definizione 3.5 (Integrale di funzioni non negative)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $f : \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile e $E \in \mathscr{M}$. Chiamo integrale di f su E rispetto alla misura μ il valore:*

$$\int_E f\ d\mu := \sup\{I_E(s) \mid s \textit{ semplice e misurabile tale che } 0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall\ x \in E\}$$

Osservazione 3.5. s funzione semplice, misurabile e non negativa $\implies I_E(s) = \int_E s\ d\mu$

Definizione 3.6 (Integrale di Lebesgue)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ misurabile e $E \in \mathscr{M}$. Chiamo integrale di f su E rispetto alla misura μ il valore:*

$$\int_E f\ d\mu := \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu \quad \textit{se} \quad \int_E f^+\ d\mu,\ \int_E f^-\ d\mu < +\infty$$

In tal caso dico che f è integrabile su E e chiamo $L^1(E)$ l'insieme di tali funzioni.

Proposizione 3.4. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e non negativa, $\alpha > 0$ e $E \in \mathscr{M}$. Allora:*

$$\int_E \alpha f\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu$$

Dimostrazione. Sia $U := \{u$ semplice e misurabile tale che $0 \leq u(x) \leq \alpha f(x) \quad \forall\ x \in E\}$ e $S := \{s$ semplice e misurabile tale che $0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall\ x \in E\}$. È chiaro che $U \leftrightarrow S$ grazie alla mappa $h : S \in U \quad s \mapsto \alpha s$. Inoltre $I_E(h(s)) = \alpha I_E(s)$ per definizione di I quindi è chiaro che $\sup_{u\in U} I_E(u) = \alpha \sup_{s\in S} I_E(s)$ da cui per definizione di integrale segue la tesi. ■

Corollario 3.2. *$f \in L^1(E),\ \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in L^1(E)$ e inoltre:*

$$\int_E \alpha f\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu$$

Dimostrazione. Se $\alpha \geq 0$ la tesi segue dalla proposizione precedente ricordando che $f = f^+ - f^-$. Per $\alpha < 0$ basta mostrare la tesi per $\alpha = -1$ ma chiaramente $-f = f^- - f^+$ quindi la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

Proposizione 3.5. *$f, g \in L^1(E),\ f \leq g$ su $E \implies \displaystyle\int_E f\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu$*

Dimostrazione. $f = f^+ - f^- \quad g = g^+ - g^- \implies f^+ \leq g^+ \quad f^- \geq g^-$. Dalla definizione di integrale per funzioni non negative segue facilmente che la tesi vale per $f^+,\ g^+$ e per $f^-,\ g^-$ quindi:

$$\int_E f\ d\mu = \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu \leq \int_E g^+\ d\mu - \int_E g^-\ d\mu = \int_E g\ d\mu$$

■

Proposizione 3.6. *$E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) < +\infty$, f misurabile tale che $a \leq f \leq b$ su E ($a, b \in \mathbb{R}$). Allora $f \in L^1(E)$ e inoltre:*

$$a\mu(E) \leq \int_E f\ d\mu \leq b\mu(E)$$

Dimostrazione. $\displaystyle\int_E a\ d\mu = a\mu(E)$ e analogamente $\displaystyle\int_E b\ d\mu = b\mu(E)$. Siccome $|a|\leq f^+ \leq |b|$ e $|a|\geq f^- \geq |b|$ segue che:

$$\int_E f^+\ d\mu,\ \int_E f^-\ d\mu < +\infty$$

quindi $f \in L^1(E)$. La tesi segue dalla proposizione precedente. ■

Proposizione 3.7. *$E \in \mathscr{M},\ A \subseteq E$ tale che $A \in \mathscr{M}$. Allora $f \in L^1(E) \implies f \in L^1(A)$*

Dimostrazione. $f = f^+ - f^-$ e inoltre $f^+\mathbb{1}_A \leq f^+,\ f^-\mathbb{1}_A \leq f^-$ quindi:

$$\int_A f^+\ d\mu,\ \int_A f^-\ d\mu < +\infty$$

per cui $f \in L^1(A)$ ■

Proposizione 3.8. *$E \in \mathscr{M}$ μ-trascurabile, f misurabile $\implies f \in L^1(E)$ e inoltre:*

$$\int_E f\ d\mu = 0$$

Dimostrazione. $f = f^+ - f^-$. Siccome:

$$\int_E f^+\ d\mu = \sup\{I_E(s) \mid s \text{ semplice e misurabile tale che } 0 \leq s \leq f^+ \text{ su } E\} = \sup\{0\} = 0$$

$$\int_E f^-\ d\mu = \sup\{I_E(s) \mid s \text{ semplice e misurabile tale che } 0 \leq s \leq f^- \text{ su } E\} = \sup\{0\} = 0$$

$f \in L^1(E)$ e ovviamente $\displaystyle\int_E f\ d\mu = 0$ ■

Teorema 3.2. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ misurabile e non negativa. Allora $\nu : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad E \mapsto \int_E f \; d\mu$ è una misura su $(\Omega, \mathscr{M})$*

Dimostrazione. Siccome $\emptyset$ è μ-trascurabile si ha chiaramente che $\nu(\emptyset) = 0$.

Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ tale che $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall \; i \neq j$ e sia $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Se $f = \mathbb{1}_E$ per qualche $E \in \mathscr{M}$ allora si ha:

$$\nu(A) = \int_A \mathbb{1}_E \; d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \mathbb{1}_E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

e quindi vale la σ-additività di ν.

Se f fosse una funzione semplice lo stesso argomento dimostrerebbe la σ-additività di ν per linearità.

Sia ora f qualunque. Supponiamo che $\forall \; n \in \mathbb{N} \quad \int_{A_n} f \; d\mu < +\infty$ (altrimenti la σ-additività è ovvia). Notiamo che per quanto appena dimostrato e per la definizione di sup:

$$\nu(A) = \int_A f \; d\mu = \sup\{I_A(s) \mid s \text{ semplice e misurabile tale che } 0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall \; x \in A\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(s) \mid s \text{ semplice e misurabile tale che } 0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall \; x \in A \right\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Inoltre $\forall \epsilon > 0 \quad \forall \; n \in \mathbb{N} \quad \forall \; i = 1, \ldots, n \quad \exists s_i$ semplice e misurabile tale che $0 \leq s_i \leq f$ in A_i e inoltre $\int_{A_i} f \; d\mu \leq I_{A_i}(s_i) + \frac{\epsilon}{n}$. Allora presa $s^{(n)}$ funzione semplice su $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tale che $s^{(n)}\Big|_{A_i} = s_i$ si ha che:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) - \epsilon = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \; d\mu - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(s_i) = I_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(s^{(n)}) \leq \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f \; d\mu \leq \int_A f \; d\mu = \nu(A)$$

quindi passando al limite per $n \to +\infty$ e per $\epsilon \to 0$ si trova che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \leq \nu(A)$$

che conclude la dimostrazione. ■

Corollario 3.3 (σ-additività dell'integrale di Lebesgue)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ tale che $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall \; i \neq j, \; A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Allora vale che:*

$$\int_A f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \; d\mu$$

Corollario 3.4. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura,$A \in \mathscr{M}$, $f, g \in L^1(A)$ con $f = g$ μ-quasi ovunque. Allora*

$$\int_A f \; d\mu = \int_A g \; d\mu$$

Dimostrazione. Sia N μ-trascurabile tale che $f = g$ su $A \backslash N$. Allora per quanto appena dimostrato:

$$\int_A f \; d\mu = \int_{A \backslash N} f \; d\mu + \int_N f \; d\mu = \int_{A \backslash N} g \; d\mu + \int_N g \; d\mu = \int_A g \; d\mu$$

■

Proposizione 3.9. *$f \in L^1(A) \implies |f| \in L^1(A)$ e inoltre:*

$$\left| \int_A f \; d\mu \right| \leq \int_A |f| \; d\mu$$

Dimostrazione. Sia $B := \{x \in \Omega \mid f(x) \geq 0\}$ e $C := \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}$. $|f|$ è misurabile e non negativa per ipotesi e inoltre

$$|f| = \begin{cases} f^+ & \text{su } B \\ f^- & \text{su } C \end{cases}$$

quindi:

$$\int_A |f| \; d\mu = \int_B |f| \; d\mu + \int_C |f| \; d\mu = \int_B f^+ \; d\mu + \int_C f^- \; d\mu < +\infty$$

da cui segue che $|f| \in L^1(A)$. Inoltre

$$\left| \int_A f \; d\mu \right| = \left| \int_A f^+ \; d\mu - \int_A f^- \; d\mu \right| \leq \left| \int_A f^+ \; d\mu \right| + \left| \int_A f^- \; d\mu \right| = \int_A f^+ \; d\mu + \int_A f^- \; d\mu = \int_A |f| \; d\mu$$

■

Proposizione 3.10 (Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ misurabile, $E \in \mathscr{M}$. Allora $f \in L^1(E) \iff \exists\; g \in L^1(E)$ tale che $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall\; x \in E$*

Dimostrazione. $\implies$) È ovvia scegliendo $g = |f|$ per quanto visto nella proposizione precedente.

$\impliedby$) $0 \leq f^+ \leq g$ e analogamente $0 \leq f^- \leq g$ quindi si trova facilmente che:

$$\int_E f^+ \; d\mu \leq \int_E g \; d\mu < +\infty$$
$$\int_E f^- \; d\mu \leq \int_E g \; d\mu < +\infty$$

quindi $f \in L^1(E)$ ■

Teorema 3.3 (Teorema di Beppo-Levi). *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione crescente di funzioni misurabili e non negative su $E \in \mathscr{M}$. Allora posto $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in E$ si ha che:*

$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

Dimostrazione. Siccome la successione è crescente vale chiaramente che $f_n \leq f$ su $E \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ e quindi $\displaystyle\int_E f_n\ d\mu \leq \int_E f\ d\mu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ da cui si ricava che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \leq \int_E f\ d\mu$$

Sia s una funzione semplice e misurabile tale che $o \leq s \leq f$ su E e sia $\delta \in (0,1)$. Posto $E_n := \{x \in E \mid f_n(x) \geq \delta s\}$ si ha che $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad E_n \subseteq E_{n+1}$ (quindi E_n è una successione crescente di insiemi). Inoltre vale chiaramente che $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Supponiamo che $s = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{B_i}$. Si trova quindi:

$$\int_E f_n\ d\mu \geq \int_{E_n} f_n\ d\mu \geq \delta I_{E_n}(s) = \delta \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(B_i \cap E_n)$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si trova che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \geq \delta \sum_{i=1}^{k} c_i \lim_{n\to+\infty} \mu(B_i \cap E_n) = \delta \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(B_i \cap E) = \delta I_E(s)$$

e quindi passando al sup su tutte le funzioni semplici e misurabili s e facendo tendere $\delta \to 1$ si conclude che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \geq \int_E f\ d\mu$$

che dimostra il teorema. ∎

Lemma 3.1 (Lemma di Fatou). *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili e non negative su $E \in \mathscr{M}$. Allora:*

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

Dimostrazione. Sia $f(x) := \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in E$. Per la proposizione 3.3 f è misurabile ed è ovviamente non negativa. Sia $g_n(x) := \inf\limits_{k\geq n} f_k(x) \quad \forall\, x \in E$. Sempre per la proposizione 3.3 g_n è misurabile e inoltre vale che $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_n \leq g_{n+1},\ 0 \leq g_n \leq f_n$ su E e anche $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$. Allora per il teorema di Beppo-Levi:

$$\int_E f\ d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} g_n\ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n\ d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

∎

Teorema 3.4. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $E \in \mathscr{M}$. $f_1, f_2 \in L^1(E) \implies f_1 + f_2 \in L^1(E)$ e inoltre:*

$$\int_E (f_1 + f_2)\ d\mu = \int_E f_1\ d\mu + \int_E f_2\ d\mu$$

Dimostrazione. Per ipotesi f_1 e f_2 sono misurabili. Supponiamo inoltre che siano non negative su E. Allora per il Teorema 3.1 $\exists\ \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di funzioni semplici, non negative e misurabili tali che $s_n \nearrow f_1$ e $t_n \nearrow f_2$. Sia quindi $s_n = \sum\limits_{i=1}^{k^{(n)}} c_i^{(n)} \mathbb{1}_{E_i^{(n)}}$ e $s_n = \sum\limits_{i=1}^{l^{(n)}} d_i^{(n)} \mathbb{1}_{B_i^{(n)}}$ con $E_i^{(n)}, B_j^{(n)} \in \mathscr{M},\ c_i^{(n)}, d_j^{(n)} \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ i = 1, \ldots, k^{(n)}\ \forall\ j = 1, \ldots, l^{(n)}$. Essendo $\displaystyle\int_E s_n\ d\mu = \sum_{i=1}^{k^{(n)}} c_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)} \cap E)$ e analogamente $\displaystyle\int_E t_n\ d\mu = \sum_{i=1}^{l^{(n)}} d_i^{(n)} \mu(B_i^{(n)} \cap E)$ è ovvio che:

$$\int_E (s_n + t_n)\ d\mu = \int_E s_n\ d\mu + \int_E t_n\ d\mu < +\infty$$

e quindi passando al limite per $n \to +\infty$ grazie al teorema di Beppo-Levi:

$$\int_E (f_1 + f_2)\ d\mu = \int_E f_1\ d\mu + \int_E f_2\ d\mu$$

Se invece f_1 e f_2 sono di segno qualunque basta notare che, detta $f := f_1 + f_2$, f è misurabile e inoltre $|f| = |f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$. $|f_1|$, $|f_2|$ sono integrabili per la Proposizione 3.9 e quindi anche f è integrabile per la Proposizione 3.10. Inoltre si ha che $f_1 = f_1^+ - f_1^-$ e $f_2 = f_2^+ - f_2^-$ quindi $f^+ + f_1^- + f_2^- = f^- + f_1^+ + f_2^+$ da cui segue facilmente per quanto dimostrato finora che:

$$\int_E f^+\ d\mu + \int_E f_1^-\ d\mu + \int_E f_2^-\ d\mu = \int_E f^-\ d\mu + \int_E f_1^+\ d\mu + \int_E f_1^+\ d\mu$$

e quindi riordinando i termini si ha la tesi. ∎

Lemma 3.2. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ successioni tali che $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\liminf\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Allora $\liminf\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$*

Dimostrazione. $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{\bar{n}} \quad a \leq a_n + \frac{\epsilon}{2}$ e $\exists \bar{\bar{\bar{n}}} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n \geq \bar{\bar{\bar{n}}} \quad b \leq b_n + \frac{\epsilon}{2}$. Allora posto $\bar{n} := \max(\bar{\bar{n}}, \bar{\bar{\bar{n}}})$ si ha che $\forall\ n \geq \bar{n} \quad a + b \leq a_n + b_n + \epsilon$. Siccome si possono estrarre due sottosuccessioni $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}},\ \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che $a_{n_k} \xrightarrow{k} a$ e $b_{n_k} \xrightarrow{k} b$ ($\implies a_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow{k} a + b$) segue la tesi. ∎

Osservazione 3.6. La stessa tesi si può dimostrare anche se $a, b = \pm\infty$

Lemma 3.3 (Lemma di Fatou esteso)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $E \in \mathscr{M}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(E)$ successione di funzioni tale che $\left\{\displaystyle\int_E f_n\ d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata. Allora vale che:*

1. *$\exists\ g \in L^1(E)$ tale che $g \leq f_n$ su $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n \in L^1(E)$ e inoltre $\displaystyle\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$*

2. $\exists\ h \in L^1(E)$ *tale che* $h \geq f_n$ *su* $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \limsup_{n\to+\infty} f_n \in L^1(E)$ *e inoltre*
$$\int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n\ d\mu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

Dimostrazione. 1) Sia $u_n := f_n - g \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(E)$ e inoltre è una successione di funzioni non negative quindi per il Lemma di Fatou e per il Lemma 3.2 vale che:
$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n\ d\mu - \int_E g\ d\mu = \int_E (\liminf_{n\to+\infty} f_n - g)\ d\mu = \int_E \liminf_{n\to+\infty} u_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E u_n\ d\mu =$$
$$= \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_E f_n\ d\mu - \int_E g\ d\mu \right) = \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu - \int_E g\ d\mu$$
Resta da mostrare che $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in L^1(E)$. Dalle disuguaglianze trovate in precedenza si ha che $\int_E \liminf_{n\to+\infty} u_n\ d\mu < +\infty$ quindi $\liminf_{n\to+\infty} u_n \in L^1(E)$ e quindi $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n + g \in L^1(E)$

2) $-h \leq -f_n$ su $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ quindi per il punto precedente si ha che:
$$\int_E \liminf_{n\to+\infty}(-f_n)\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E (-f_n)\ d\mu \implies \int_E (-\limsup_{n\to+\infty} f_n)\ d\mu \leq -\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \implies$$
$$\int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n\ d\mu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

■

Teorema 3.5 (Teorema di Beppo-Levi significativo)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura,* $E \in \mathscr{M}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(E)$ *successione monotona di funzioni tale che* $\left\{ \int_E f_n\ d\mu \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sia limitata. Allora, posto* $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$*, si ha che* $f \in L^1(E)$ *e inoltre:*
$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

Dimostrazione. Supponiamo che f_n sia decrescente (la dimostrazione per il caso opposto è del tutto analoga). Per il Lemma di Fatou, siccome $f_1 \geq f_n$ su $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, vale che $f \in L^1(E)$ e inoltre
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu = \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \leq \int_E f\ d\mu$$
Analogamente siccome $f \leq f_n$ su $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ sempre per il Lemma di Fatou:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \geq \int_E f\ d\mu$$
e quindi il teorema è dimostrato. ■

Teorema 3.6 (Teorema di Lebesgue della convergenza dominata)**.** $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura,* $E \in \mathscr{M}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *successione di funzioni misurabili tale che* $f_n \to f$ *puntualmente. Se* $\exists\ g \in L^1(E)$ *tale che* $|f_n| \leq g$ *su* $E \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ *allora* $f \in L^1(E)$ *e inoltre:*
$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

Dimostrazione. Per ipotesi $-g \leq f_n \leq g \implies \int_E (-g)\ d\mu \leq \int_E f_n\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu$ quindi la successione $\left\{\int_E f_n\ d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Allora per il Lemma di Fatou esteso vale che $f \in L^1(E)$ e inoltre:

$$\int_E f\ d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu \leq \int_E f\ d\mu$$

da cui segue che il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\ d\mu$ esiste e vale esattamente $\int_E f\ d\mu$ ∎

Osservazione 3.7. I teoremi visti finora valgono se le ipotesi valgono solo quasi ovunque.

Teorema 3.7 (Teorema di Beppo-Levi per serie)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $E \in \mathscr{M}$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili e non negative su E. Allora, posto $u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, vale che:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n\ d\mu$ converge $\implies u \in L^1(E)$ e $\int_E u\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n\ d\mu$*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n\ d\mu$ diverge $\implies \int_E u\ d\mu = +\infty$*

Teorema 3.8. *Se una funzione è integrabile secondo Riemann (R-integrabile) allora è integrabile anche secondo Lebsegue (L-integrabile) e i due integrali coincidono*

Dimostrazione. Supponiamo f R-integrabile su E e non negativa ($\implies$ f è limitata). Siano I_L, I_R rispettivamente gli integrali di f secondo Lebesgue e Riemann. Supponiamo per assurdo che $I_L > I_R$. Allora $\exists\ t$ a scala che approssima f dall'alto in E tale che $I_R \leq \int_E t\ d\mu < I_L$ e questo da l'assurdo. Infatti, detto $U := \{I_E(s) \mid s$ semplice e misurabile tale che $0 \leq s \leq f$ E $\}$, si avrebbe $s \leq t \quad \forall\ s \in U \implies I_L \leq \int_E t\ d\mu$. Analogamente supponiamo per assurdo che $I_R > I_L$. Allora $\exists\ u$ a scala con $0 \leq u \leq f$ in E tale che $I_L < \int_E u\ d\mu \leq I_R$ e questo è assurdo perchè $u \in U$ e $I_L = \sup U$ ∎

4 Misure prodotto

In questo capitolo considereremo due spazi di misura $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$, $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ σ-finiti. Lavoreremo nello spazio misurabile $(X \times Y, \mathscr{M} \times \mathscr{N})$ dove $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ è la σ-algebra generata da tutti gli insiemi della forma $A \times B$ con $A \in \mathscr{M},\ B \in \mathscr{N}$. L'obiettivo è definire una misura prodotto su questo spazio misurabile. Consideriamo, dato $E \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$ gli insiemi $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\},\ E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \quad \forall\ x \in X,\ \forall y \in Y$

Proposizione 4.1. *$\forall\ x \in X \quad E_x \in \mathscr{N}$ e $x \mapsto \nu(E_x)$ è misurabile in $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ (l'analogo risultato vale per E_y). Inoltre vale che:*

$$\int_X \nu(E_x)\ d\mu = \int_Y \mu(E_y)\ d\nu$$

Non diamo la dimostrazione di questo risultato ma da quest'ultima segue anche un corollario:

Corollario 4.1. *Se A è un'algebra la famiglia di sottoinsiemi $\nu(A)$ ovvero la più piccola famiglia monotona di insiemi $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenente A tale che se $E_n \subseteq E_{n+1}$ allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \nu(A)$ (e se $E_n \subseteq E_{n-1} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \in \nu(A)$) allora $\nu(A)$ è una σ-algebra e inoltre $\nu(A) = \sigma(A)$*

Alla luce di questi risultati si può definire una misura prodotto

$$(\mu \times \nu)(E) := \int_X \nu(E_x)\ d\mu = \int_Y \mu(E_y)\ d\nu \tag{1}$$

Resta solo da controllare che questa definizione sia σ-additiva. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \times \mathscr{N}$ tale che $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$. Posto $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ si ha chiaramente che $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n_x}$ e ovviamente $E_{i_x} \cap E_{j_x} = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$ quindi grazie a Beppo-Levi per serie e alla σ-additività di ν:

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\ d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_{n_x})\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_{n_x})\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(E_n)$$

Esempio 4.1. Togliendo l'ipotesi della σ-finitezza i risultati visti non valgono. Come controesempio si possono prendere gli spazi $([0,1], \mathscr{B}, \mu)$, $([0,1], \mathscr{B}, \#)$ e il sottoinsieme $\{(x, y) \in [0,1]^2 \mid x = y\}$

Teorema 4.1 (Teorema di Tonelli). *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$, $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ spazi di misura σ-finiti, F misurabile in $(X \times Y, \mathscr{M} \times \mathscr{N})$ e non negativa. Allora $x \mapsto F(x, y)$ e $x \mapsto \int_Y F(x, y)\ d\nu$ sono misurabili in $(\Omega, \mathscr{M})$ per quasi ogni $y \in Y$ e analogamente $y \mapsto F(x, y)$ e $y \mapsto \int_X F(x, y)\ d\mu$ sono misurabili in $(Y, \mathscr{N})$ per quasi ogni $x \in X$. Inoltre:*

$$\int_{X\times Y} F(x, y)\ d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F(x, y)\ d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F(x, y)\ d\mu \right) d\nu$$

Cenni di dimostrazione. Si lavora con le funzioni semplici grazie al teorema 3.1. Si deduce quindi la formula e si usa il teorema di Beppo-Levi. ∎

Teorema 4.2 (Teorema di Fubini). *Se $F \in L^1(X \times Y)$ allora per quasi ogni $x \in X$ le funzioni $y \mapsto F(x, y)$, $y \mapsto \int_X F(x, y)\ d\mu$ sono integrabili (e analogamente nell'altro caso). Inoltre vale la stessa formula per gli integrali iterati del teorema di Tonelli*

Definizione 4.1 (Prodotto di convoluzione). *Date $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabili si dice prodotto di convoluzione di f e g la funzione $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y)\ dy$*

Proposizione 4.2. *$f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e inoltre $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$*

Dimostrazione. Sia $F(x,y) := f(x-y)g(y)$ Ovviamente $|F(x,y)|$ è misurabile e non negativa e inoltre:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|F(x,y)|\ dx\right)\ dy = \int_{\mathbb{R}^N}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\ dx\right)\ dy \leq \int_{\mathbb{R}^N}|g(y)|\|f\|_1\ dy \leq \|f\|_1\|g\|_1$$

Allora per il teorema di Tonelli $|F|\in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N) \implies F\in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ e quindi per Fubini segue la tesi. ∎

5 Misure relative

Definizione 5.1 (Misura relativa)**.** *$(\Omega,\mathscr{M})$ spazio misurabile. $\phi:\mathscr{M}\to\mathbb{R}$ si dice misura relativa se:*

1. $\phi(\emptyset)=0$
2. $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{M}$ *tale che* $E_i\cap E_j=\emptyset\quad\forall\ i\neq j \implies \phi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(E_n)$

Osservazione 5.1. Grazie alla proprietà 2) tutte le serie della forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(E_n)$ convergono assolutamente.

Osservazione 5.2. μ misura $\not\Longrightarrow$ μ misura relativa

Osservazione 5.3. Una combinazione lineare di misure finite è una misura relativa. Inoltre una misura relativa positiva è una misura finita (e ovviamente l'opposto di una misura relativa negativa è una misura finita)

Osservazione 5.4. Per una misura relativa non vale la subadditività

Esempio 5.1. $(\Omega,\mathscr{M},\mu)$ spazio di misura e $f\in L^1(\Omega) \implies \phi(E):=\int_E f\ d\mu$ è una misura relativa

Definizione 5.2 (Insieme positivo)**.** *ϕ misura relativa su $(\Omega,\mathscr{M})$. $A\in\mathscr{M}$ si dice positivo per la misura relativa ϕ (ϕ-positivo) se $\forall\ E\subseteq A$ tale che $E\in\mathscr{M}\quad\phi(E)\geq 0$. In modo analogo si definisce un insieme ϕ-negativo.*

Lemma 5.1. *ϕ misura relativa su $(\Omega,\mathscr{M})$. Se $\exists\ A\in\mathscr{M}$ tale che $\phi(A)>0$ allora $\exists\ P\subseteq A$ tale che $P\in\mathscr{M},\ \phi(P)>0$ e inoltre P ϕ-positivo.*

Dimostrazione. Se A è positivo non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\exists\ E\subseteq A,\ E\in\mathscr{M}$ tale che $\phi(E)<0$. Sia $n_1:=\min\{n\in\mathbb{N}\mid\exists\ E\in\mathscr{M},\ E\subseteq A,\ \phi(E)<-\frac{1}{n}\}$. Sia quindi $A_1\in\mathscr{M}$ tale che $A_1\subseteq A$ e $\phi(A_1)<-\frac{1}{n_1}$. Se $A\backslash A_1$ è positivo la dimostrazione è conclusa. Viceversa se $A\backslash A_1$ non è positivo costruisco analogamente a prima n_2 e A_2 e itero lo stesso ragionamento. Alla fine se nessuno degli $A\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ è positivo costruisco $P := A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e dico che P è l'insieme cercato. Infatti $\phi(P) = \phi(A) - \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) > 0$. Inoltre $\phi(A_k) < -\frac{1}{n_k} < 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k) < -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < 0 \implies -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge e quindi $\frac{1}{n_k} \to 0 \implies n_k \to +\infty$. Allora se per assurdo $\exists\ E \in \mathscr{M},\ E \subseteq P$ tale che $\phi(E) < 0$ si avrebbe che $\exists\ \bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\phi(E) < -\frac{1}{n_{\bar{k}} - 1}$ Allora $E \subseteq A\setminus\bigcup_{i=1}^{\bar{k}-1} A_i$ ma questo è assurdo per la definizione di n_k ■

Lemma 5.2. *ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$ e $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ successione di insiemi positivi. Allora $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ è positivo.*

Dimostrazione. Siano $P'_1 := P_1,\ P'_2 := P_2\setminus P_1, \dots,\ P'_k := P_k\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i$. Ovviamente $P'_1 \cap P'_j = \emptyset\ \ \forall\ i \neq j,\ \{P'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi positivi e inoltre $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n$. Sia quindi $E \subseteq P,\ E \in \mathscr{M}$. Allora $\phi(E) = \phi(E \cap P) = \phi(E \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(E \cap P'_n) > 0$ ■

Teorema 5.1 (Teorema di decomposizione di Hahn)**.** *ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$. Allora $\exists\ A, B \in \mathscr{M}$ tali che $A \cup B = \Omega,\ A \cap B = \emptyset$, A positivo e B negativo. La coppia (A, B) si dice decomposizione di Hahn*

Dimostrazione. Sia $p := \sup\{\phi(P) \mid P \in \mathscr{M}\ \phi\text{-positivo}\ \}$ e quindi $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ successione di insiemi positivi tali che $\phi(P_n) \to p$. Sia $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Per il lemma appena dimostrato A è positivo e inoltre $\phi(A) = \phi(P_n) + \phi(A\setminus P_n) \geq \phi(P_n) \implies \phi(A) \geq p \implies \phi(A) = p$. Sia quindi $B := \Omega\setminus A$. Mostriamo che (A, B) è la decomposizione di Hahn cercata. Supponiamo per assurdo che esista $P \in \mathscr{M},\ P \subseteq B$ tale che $\phi(P) > 0$. Posso supporre fin da subito che P sia positivo per il lemma dimostrato prima. Allora $A \cup P$ è positivo e inoltre $\phi(A \cup P) = \phi(A) + \phi(P) > p$ e questo è assurdo per la definizione di p. ■

Osservazione 5.5. La decomposizione di Hahn in generale non è unica.

Lemma 5.3. *ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$ e $(A, B),\ (A', B')$ decomposizioni di Hahn. Allora $\forall\ E \in \mathscr{M}\quad \phi(E \cap A) = \phi(E \cap A')$ e analogamente $\phi(E \cap B) = \phi(E \cap B')$*

Dimostrazione. Si nota che:

1. $A = (A \cap A') \cup (A\setminus A')$
2. $A' = (A \cap A') \cup (A'\setminus A)$

Preso $E \in \mathscr{M}$ allora si trova che:

1. $E \cap A = (E \cap A \cap A') \cup (E \cap (A\setminus A'))$

2. $E \cap A' = (E \cap A \cap A') \cup (E \cap (A' \backslash A))$

e quindi siccome $E \cap (A \backslash A') \subseteq A, B' \implies \phi(E \cap (A \backslash A')) = 0$. Analogamente si mostra che $\phi(E \cap (A' \backslash A)) = 0$ quindi $phi(E \cap A) = \phi(E \cap A')$. Il resto della dimostrazione è ovviamente analogo. ∎

Definizione 5.3 (Variazione di una misura relativa)**.** *ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$, (A, B) decomposizione di Hahn per ϕ. Si definisce, $\forall\ E \in \mathscr{M}$:*

1. $\phi^+(E) := \phi(E \cap A)$ (Variazione superiore di ϕ)

2. $\phi^-(E) := -\phi(E \cap B)$ (Variazione inferiore di ϕ)

3. $|\phi|(E) := \phi^+(E) + \phi^-(E)$ (Variazione totale di ϕ)

Per il lemma precedente ognuna di queste variazioni è ben definita

Proposizione 5.1. *Tutte e tre le variazioni sono misure finite. Inoltre $\forall\ E \in \mathscr{M} \quad \phi(E) = \phi^+(E) - \phi^-(E)$ e $|\phi(E)| \leq |\phi|(E)$*

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi solo per ϕ^+ (gli altri casi sono analoghi).
$\phi^+(\emptyset) = \phi(\emptyset \cap A) = 0$
Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$. Sia $E := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. $\phi^+(E) = \phi(E \cap A) = \phi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n \cap A)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi(E_n \cap A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi^+(E_n)$
Il fatto che queste variazioni siano misure finite è ovvio. Inoltre vale chiaramente che $\phi(E) = \phi((E \cap A) \cup (E \cap B)) = \phi(E \cap A) + \phi(E \cap B) = \phi^+(E) - \phi^-(E)$. Questo implica che $|\phi(E)| \leq |\phi^+(E)| + |\phi^-(E)| = \phi^+(E) + \phi^-(E) = |\phi|(E)$ ∎

Definizione 5.4 (Misura assolutamente continua)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$. Si dice che ϕ è μ-assolutamente continua se $\forall\ E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ allora $\phi(E) = 0$*

Osservazione 5.6. La stessa definizione si può dare per una qualsiasi misura ν e non solo per le misure relative.

Teorema 5.2. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$ μ-assolutamente continua. Allora $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ tale che $\forall\ E \in \mathscr{M}$ con $\mu(E) \leq \delta \quad |\phi|(E) \leq \epsilon$*

Dimostrazione. Per assurdo $\exists\ \epsilon > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\ E_n \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E_n) \leq \dfrac{1}{2^n}$ e $|\phi|(E_n) > \epsilon$. Consideriamo l'insieme $E = \bigcap\limits_{n}(\bigcup\limits_{k\geq n} E_k)$ Notiamo che $\left\{\bigcup\limits_{k\geq n} E_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi di cui il primo è $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ è tale che $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leq$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) = 0$. Inoltre $|\phi|(E) =$
$= \lim_{n\to\infty} |\phi|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \geq \epsilon$ che è assurdo per la proposizione precedente ($|\phi|$ è μ-a.c) ∎

Esempio 5.2. μ misura di Lebesgue in $(\mathbb{R}, \mathscr{L})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile e non negativa. $\phi(E) := \int_E f \, d\mu$ è una misura. Allora qualunque sia f, ϕ è μ-assolutamente continua (l'integrale su ogni μ-trascurabile è sempre nullo) ma non è detto il che μ sia ϕ-assolutamente continua (Basta prendere $f = 0$)

Proposizione 5.2. $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *spazio di misura,* ϕ *misura relativa su* $(\Omega, \mathscr{M})$*. Allora sono equivalenti:*

1. ϕ *è* μ*-a.c*
2. ϕ^+, ϕ^- *sono* μ*-a.c*
3. $|\phi|$ *è* μ*-a.c*

Dimostrazione. 1) $\implies$ 2) Sia (A, B) una decomposizione di Hahn di Ω per ϕ. Se $\mu(E) = 0$ allora per ipotesi $\phi(E) = 0$. Sia ora $E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $\mu(E \cap A) = 0$ e $\mu(E \cap B) = 0$ quindi per ipotesi $0 = \phi(E \cap A) = \phi^+(E)$ e $0 = \phi(E \cap B) = \phi^-(E)$
2) $\implies$ 3) Ovvia perchè $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$
3) $\implies$ 1) Sappiamo che $|\phi(E)| \leq |\phi|(E)\ \forall E \in \mathscr{M}$. Allora se $E \in \mathscr{M}$ è tale che $\mu(E) = 0$ si ha per ipotesi che $|\phi|(E) = 0 \implies |\phi(E)| = 0 \implies \phi(E) = 0$. ∎

Definizione 5.5 (Misura singolare)**.** *Sia* $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e* ϕ *una misura relativa (o in generale una misura).* ϕ *si dice* μ*-singolare se esiste una decomposizione* (A, B) *di* Ω $(A, B \in \mathscr{M},\ A \cup B = \Omega,\ A \cap B = \emptyset)$ *tale che* $\mu(A) = 0$ *e* $|\phi|(B) = 0$ *(se* ϕ *fosse una misura si deve intendere* $|\phi| = \phi$*)*

Esempio 5.3. $(\mathbb{R}, \mathscr{L})$, μ misura di Lebesgue e $\phi := \delta_0 - \delta_1$. ϕ è μ-singolare, infatti basta prendere $A = \{0, 1\},\ B = \mathbb{R} \setminus A$

Osservazione 5.7. ϕ è μ-singolare $\iff$ μ è ϕ-singolare

Osservazione 5.8. Se ϕ è una misura relativa è ovvio che ϕ è μ-singolare $\iff$ $|\phi|$ è μ-singolare. In quest'ultimo caso $\phi^+(B) = 0$ e $\phi^-(B) = 0$ ($\implies$ ϕ^+, ϕ^- sono μ-singolari)

Osservazione 5.9. Se ϕ^+ e ϕ^- sono μ-singolari allora esistono due decomposizioni (A^+, B^+) e (A^-, B^-) di Ω tali che $\mu(A^+) = \mu(A^-) = 0$ e $\phi^+(B^+) = \phi^-(B^-) = 0$. Pongo $A = A^+ \cup A^-$ e $B = B^+ \cap B^-$. Allora $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ e inoltre $\mu(A) \leq \mu(A^+) + \mu(A^-) = 0$ e $|\phi|(B) = \phi^+(B) + \phi^-(B) \leq \phi^+(B^+) + \phi^-(B^-) = 0$ quindi $|\phi|$ è μ-singolare

Osservazione 5.10. Se ϕ è sia μ-assolutamente continua che μ-singolare allora $\phi = 0$. Infatti presa (A, B) la decomposizione per la μ-singolarità ho che $\mu(A) = 0$ e $\phi(B) = 0$. Mostro che $\forall\ E \in \mathscr{M}$ ho $\phi(E) = 0$. Preso $E \in \mathscr{M}$, ho che $E = (E \cap A) \cup (E \cap B)$. Siccome $\mu(E \cap A) \leq \mu(A) = 0 \implies \phi(E \cap A) = 0, |\phi|(E \cap A) = 0$. Inoltre $E \cap B \subseteq B$ quindi $|\phi|(E \cap B) \leq |\phi|(B) = 0$ per cui $|\phi|(E) = |\phi|(E \cap A) + |\phi|(E \cap B) = 0$

6 Derivate di Radon-Nikodym

Lemma 6.1. *Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura. $E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) > 0$, f integrabile in E e non negativa. Se $\displaystyle\int_E f\ d\mu = 0$ allora $f = 0$ quasi ovunque su E*

Dimostrazione. Sia $A_n := \{x \in E \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi e $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$. Allora si ha che $\displaystyle\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f\ d\mu \leq \int_E f\ d\mu = 0 \implies \mu(A_n) = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Ma allora $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0 \implies f = 0$ quasi ovunque in E. ∎

Corollario 6.1. *Se f misurabile è positiva in un sottoinsieme di misura positiva $E \in \mathscr{M}$ allora chiaramente $\displaystyle\int_E f\ d\mu > 0$*

Teorema 6.1. *Siano μ e ϕ due misure finite su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{M})$. Sia l'insieme $\mathscr{F} := \left\{g : \Omega \to [0, +\infty) \;\middle|\; g \text{ misurabile e } \displaystyle\int_E g\ d\mu \leq \phi(E)\ \forall\ E \in \mathscr{M}\right\}$. Allora esiste una funzione $f \in \mathscr{F}$ unica a meno di uguaglianza quasi ovunque tale che $\displaystyle\int_\Omega f\ d\mu = \sup_{g\in\mathscr{F}} \int_\Omega g\ d\mu$*

Dimostrazione. $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Infatti $0 \in \mathscr{F}$. Inoltre $S := \displaystyle\sup_{g\in\mathscr{F}} \int_\Omega g\ d\mu < +\infty$ perchè $\forall\ g \in \mathscr{F}$ si ha che $\displaystyle\int_\Omega g\ d\mu \leq \phi(\Omega) < +\infty$. Allora $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ g_n \in \mathscr{F}$ tale che $S - \displaystyle\frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n\ d\mu \leq S \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Definisco $f_n(x) := max\{g_1(x), \dots, g_n(x)\}$ e ho che $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad f_n$ sono non negative e misurabili. Inoltre $f_n \in \mathscr{F}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Infatti presi $E_{n,1} = \{x \in \Omega \mid f_n(x) = g_1(x)\}, E_{n,2} = \{x \in \Omega \backslash E_{n,1} \mid f_n(x) = g_2(x)\}, \dots, E_{n,k} = \{x \in \Omega \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_{n,j} \mid f_n(x) = g_k(x)\}$. ho che questi insiemi sono disgiunti e $f_n = g_k$ su $E_{n,k} \quad \forall\ k = 1, \dots, n$. Inoltre $\bigcup_{k=1}^{n} E_{n,k} = \Omega$. Allora posso scrivere, dato $E \in \mathscr{M}$, $\displaystyle\int_E f_n\ d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E\cap E_{n,k}} f_n\ d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E\cap E_{n,k}} g_n\ d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \phi(E \cap E_{n,k}) = \phi(E)$. Notiamo che $S - \displaystyle\frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n\ d\mu \leq \int_\Omega f_n\ d\mu \leq S$. Allora per Beppo-Levi, posto $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, si ha $\displaystyle\int_\Omega f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\ d\mu = S$. Resta da mostrare che $f \in \mathscr{F}$. Ma è ovvio perchè $\forall\ E \in \mathscr{M}$ si ha che $\displaystyle\int_E f_n\ d\mu \leq \phi(E)$ quindi passando al limite per Beppo-Levi segue la tesi. Mostriamo ora che una tale f è unica. Sia $h \in \mathscr{F},\ h \neq f$ che rispetti le ipotesi. Considero gli insiemi:

- $A_1 := \{x \in \Omega \mid f(x) = h(x)\}$

- $A_2 := \{x \in \Omega \mid f(x) > h(x)\}$
- $A_3 := \{x \in \Omega \mid f(x) < h(x)\}$

Per assurdo supponiamo che $\mu(A_2) > 0$. Sia $u(x) := \max\{f(x), h(x)\}$. Come già mostrato in precedenza $u \in \mathscr{F}$. Notiamo che $\int_\Omega u \, d\mu = \int_{A_1} u \, d\mu + \int_{A_2} u \, d\mu + \int_{A_3} u \, d\mu = \int_{A_1} h \, d\mu + \int_{A_2} f \, d\mu + \int_{A_3} h \, d\mu \overset{(1)}{>} \int_{A_1} h \, d\mu + \int_{A_2} h \, d\mu + \int_{A_3} h \, d\mu = \int_\Omega h \, d\mu$ ((1) è vera per il corollario 6.1 in quanto su $f - h > 0$ su A_2) Ma questo è assurdo perchè $u \in \mathscr{F}$ viola il fatto che h è il sup quindi deve essere $\mu(A_2) = 0$. Analogamente si mostra che $\mu(A_3) = 0$. ∎

Osservazione 6.1. Presa $f \in \mathscr{F}$ rappresentante della classe di funzioni che realizzano il sup precedente e $g \in \mathscr{F}$ vale che $g \leq f$ quasi ovunque in Ω. La dimostrazione di questo fatto è analoga a quella fatta per mostrare l'unicità del sup.

Definizione 6.1 (Derivata di Radon-Nikodym)**.** *In questo contesto chiamiamo derivata di Radon-Nikodym di ϕ rispetto a μ la classe di funzioni uguali quasi ovunque a $f := \sup_{g \in \mathscr{F}} \int_\Omega g \, d\mu$. Viene indicata con $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mu}$. Con abuso di notazione lo stesso simbolo può anche simboleggiare un rappresentante della classe.*

Si vuole ora estendere il teorema 6.1 e la definizione 6.1 al caso in cui μ sia una misura σ-finita e ϕ una misura relativa. Estendiamo prima entrambi i risultati al caso μ σ-finita e ϕ misura finita. Esiste una successione di insiemi $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j$ e inoltre $\mu(\Omega_n) < +\infty \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$ (grazie al fatto che μ è σ-finita). Posso quindi considerare la successione di spazi di misura $(\Omega_n, \mathscr{M}_n, \mu_n)$ dove $\mathscr{M}_n := \mathscr{M} \cap \mathscr{P}(\Omega_n)$, $\mu_n := \mu\big|_{\mathscr{M}_n}$ e in questi spazi considerare $\phi_n := \phi\big|_{\mathscr{M}_n}$. L'idea ora è di definire la derivata di Radon-Nikodym come $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mu} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \dfrac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n}$ (Questa serie converge sicuramente per il Teorema di Beppo-Levi per Serie). Mostriamo che questa definizione non dipende dalla successione $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Proposizione 6.1. *La derivata di Radon-Nikodym così definita non dipende dalla successione $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*

Dimostrazione. Siano $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\overline{\Omega}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due suddivisioni che rispettano le proprietà precedenti. $\overline{\mathscr{M}}_n := \mathscr{M} \cap \mathscr{P}(\overline{\Omega}_n)$, $\overline{\mu}_n := \mu\big|_{\overline{\mathscr{M}}_n}$, $\overline{\phi}_n := \phi\big|_{\overline{\mathscr{M}}_n}$ e quindi consideriamo $g := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \dfrac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n}$ e $h := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\overline{\Omega}_n} \dfrac{\partial \overline{\phi}_n}{\partial \overline{\mu}_n}$. Fisso Ω_i, $\overline{\Omega}_j$. Mostriamo che se $\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$ non è μ-trascurabile allora le due serie coincidono quasi ovunque su $\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$. Infatti posto $f_i := \dfrac{\partial \phi_i}{\partial \mu_i}$, $\overline{f}_i := \dfrac{\partial \overline{\phi}_i}{\partial \overline{\mu}_i}$ si ha che $g \to f_i$ e $h \to \overline{f}_i$ in $\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$. Chiamo $\mathscr{F}_i := \left\{ g : \Omega_i \to [0, +\infty) \;\middle|\; g \text{ misurabile e } \int_E g \, d\mu \leq \phi(E) \ \forall \ E \in \mathscr{M}_i \right\}$. Per ipotesi $f_i = \sup_{g\in\mathscr{F}_i} \int_{\Omega_i} g\ d\mu$. Si nota che:

$$\bar{l}_j := \begin{cases} \overline{f}_j & \text{su } \Omega_i \cap \overline{\Omega}_j \\ 0 & \text{su } \Omega_i \backslash \overline{\Omega}_j \end{cases}$$

è tale che $\bar{l}_j \in \mathscr{F}_i$. Infatti $\forall\ E \in \mathscr{M}_i \quad \int_E \bar{l}_j\ d\mu = \int_{E\cap\overline{\Omega}_j} \overline{f}_j\ d\mu \le \phi(E\cap\overline{\Omega}_j) \le \phi(E)$. Allora $\bar{l}_j \le f_i$ (f_i è il sup) quasi ovunque in $\Omega_i \implies \overline{f}_j \le f_i$ quasi ovunque in $\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$. Invertendo la dimostrazione trovo anche la disuguaglianza opposta quindi $f_i = \overline{f}_j$ quasi ovunque in $\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$. ∎

Definizione 6.2 (Derivata di Radon-Nikodym)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, μ σ-finita e ϕ misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$. Chiamo derivata di Radon-Nikodym di ϕ rispetto a μ la classe di funzioni $\frac{\partial\phi}{\partial\mu} := \frac{\partial\phi^+}{\partial\mu} - \frac{\partial\phi^-}{\partial\mu}$*

Teorema 6.2. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura σ-finito, ϕ misura relativa e μ-singolare. Allora $\frac{\partial\phi}{\partial\mu} = 0$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che sia μ che ϕ siano misure finite. Esiste una decomposizione (A, B) di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\phi(B) = 0$. $\mathscr{F} := \left\{ g : \Omega \to [0, +\infty) \,\middle|\, g \text{ misurabile e } \int_E g\ d\mu \le \phi(E)\ \forall\ E \in \mathscr{M} \right\}$. Allora necessariamente se $E \in \mathscr{M}$ è tale che $E \subseteq B$ e $g \in \mathscr{F}$ si ha che $\int_E g\ d\mu \le \phi(E) = 0 \implies g = 0$ quasi ovunque in B $\implies f = 0$ quasi ovunque in B (f rappresentante di $\frac{\partial\phi}{\partial\mu}$). Siccome A è μ-trascurabile deve essere anche $f = 0$ quasi ovunque in Ω.
Supponiamo ora che μ sia σ-finita e ϕ finita. Sia (A, B) una decomposizione di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\phi(B) = 0$. Considero $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ tale che $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ e $\mu(\Omega_n) < +\infty \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ e come in precedenza $\mathscr{M}_n := \mathscr{M} \cap \mathscr{P}(\Omega_n)$, $\mu_n := \mu\big|_{\mathscr{M}_n}$, $\phi_n := \phi\big|_{\mathscr{M}_n}$. ϕ_n è μ_n-singolare. Infatti $(A \cap \Omega_n, B \cap \Omega_n)$ da la decomposizione cercata. Allora per il passo precedente $\frac{\partial\phi_n}{\partial\mu_n} = 0$ quasi ovunque in $\Omega_n \implies \frac{\partial\phi}{\partial\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \frac{\partial\phi_n}{\partial\mu_n} = 0$ quasi ovunque in Ω.
Supponiamo infine che μ sia σ-finita e ϕ misura relativa. Si è già mostrato che anche ϕ^+ e ϕ^- sono μ-singolari quindi la tesi segue facilmente dai passi precedenti. ∎

Teorema 6.3 (Teorema di Radon-Nikodym)**.** *Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e ϕ una misura relativa μ-assolutamente continua. Allora vale che:*

$$\phi(E) = \int_E \frac{\partial\phi}{\partial\mu}\ d\mu \quad \forall\ E \in \mathscr{M}$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che sia ϕ che μ siano misure finite. Sicuramente $\int_E \frac{\partial\phi}{\partial\mu}\ d\mu \le \phi(E)\ \forall\ E \in \mathscr{M}$ (per definizione di derivata di Radon-Nikodym). Ragioniamo ora per assurdo.

$\exists\ E_0 \in \mathscr{M}$ tale che $\displaystyle\int_{E_0} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\ d\mu < \phi(E_0)$. Allora $\mu(E_0) > 0$ perchè se $\mu(E_0) = 0$ allora $\phi(E_0) = 0$ per l'assoluta continuità e quindi non sarebbe possibile avere il minore stretto (si avrebbe $0 < 0$). Siccome μ è finita allora $\exists\ \epsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_{E_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon\right)\ d\mu < \phi(E_0)$. Considero ora la misura relativa $\tilde{\phi}(E) := \phi(E) - \displaystyle\int_{E} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon\right)\ d\mu$. Sia (A, B) decomposizione di Hahn per $\tilde{\phi}$. Ho che $\tilde{\phi}(A) \geq \tilde{\phi}(A \cap E_0) \geq \tilde{\phi}(A \cap E_0) + \tilde{\phi}(B \cap E_0) = \tilde{\phi}(E_0) > 0 \implies \mu(A) > 0$ perchè se così non fosse avrei un assurdo per l'assoluta continuità di ϕ. Pongo $f := \dfrac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon \mathbb{1}_A$. f è non negativa e integrabile per costruzione. Preso $E \in \mathscr{M}$ si ha che $\displaystyle\int_E f\ d\mu = \int_{E\cap A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon\right)\ d\mu + \int_{E \cap B} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\ d\mu \leq \phi(E \cap A) + \phi(E \cap B) = \phi(E)$ perchè A è $\tilde{\phi}$-positivo quindi $\tilde{\phi}(E \cap A) \geq 0 \implies \phi(E \cap A) - \displaystyle\int_{E\cap A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon\right)\ d\mu \geq 0$. Allora $f \in \mathscr{F}$ e inoltre $\displaystyle\int_\Omega f\ d\mu = \int_A f\ d\mu + \int_B f\ d\mu = \int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon\right)\ d\mu + \int_B \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\ d\mu = \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\ d\mu + \epsilon\mu(A) > \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \mu}\ d\mu$ ma ciò è assurdo perchè la derivata di Radon-Nikodym realizza il sup.

Consideriamo ora μ misura σ-finita e ϕ misura finita. Sia $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ una successione di insiemi misurabili tali che $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$ e inoltre $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. Per definizione $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mu} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \dfrac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n}$ dove $\phi_n := \phi\big|_{\mathscr{M}\cap\mathscr{P}(\Omega_n)}$ e $\mu_n := \mu\big|_{\mathscr{M}\cap\mathscr{P}(\Omega_n)}$. Ma per quanto visto $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad \dfrac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n} = 0$ quasi ovunque in Ω_n e quindi anche $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mu} = 0$ quasi ovunque in Ω.

Supponiamo infine che μ sia σ-finita e che ϕ sia una misura relativa. Per definizione $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mu} = \dfrac{\partial \phi^+}{\partial \mu} - \dfrac{\partial \phi^-}{\partial \mu}$ e quindi la tesi segue immediatamente dai punti precedenti. ∎

Corollario 6.2. *Qualunque funzione μ-assolutamente continua è una funzione integrale.*

Teorema 6.4 (Teorema di decomposizione di Lebesgue)**.** *Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathscr{M})$. Allora esiste una misura ϕ_a su $(\Omega, \mathscr{M})$ μ-assolutamente continua e esiste una misura ϕ_s su $(\Omega, \mathscr{M})$ μ-singolare tale che $\forall\ E \in \mathscr{M} \quad \phi(E) = \phi_a(E) + \phi_s(E)$. Inoltre tale decomposizione è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che ϕ sia finita. Sia $k := \sup\{\phi(E) \mid E \in \mathscr{M},\ \mu(E) = 0\}$. Se $k = 0$ allora ϕ è assolutamente continua e ho finito. Supponiamo quindi $k > 0$. Sia $\{E_n\}_{n\in E_n} \subseteq \mathscr{M}$ tale che $\mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\phi(E_n) \to k$. Sia $E := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Ovviamente $\mu(E) = 0$ e inoltre vale che $\phi(E) = k$. Infatti per definizione di k deve essere $\phi(E) \leq k$ ma siccome abbiamo supposto ϕ misura vale anche che $\phi(E_n) \leq \phi(E) \implies k \leq \phi(E)$. Definiamo quindi ora

$$\phi_s(A) := \phi(A \cap E) \quad \forall\ A \in \mathscr{M}$$

$$\phi_a(A) := \phi(A \backslash E) \quad \forall A \in \mathscr{M}$$

ϕ_a, ϕ_s sono misure finite e ovviamente $\phi(A) = \phi_a(A) + \phi_s(A) \quad \forall A \in \mathscr{M}$. Mostriamo che ϕ_s è μ-singolare. Sappiamo che $\mu(E) = 0$ e inoltre $\phi_s(\Omega \backslash E) = \phi(\emptyset) = 0$ quindi $(E, \Omega \backslash E)$ è la decomposizione cercata. Mostriamo anche che ϕ_a è μ-assolutamente continua. Preso $N \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(N) = 0$ ho che $\phi_a(N) = \phi(N \backslash E) = 0$. Infatti se per assurdo $\phi(N \backslash E) > 0$ allora $\phi(E \cup N) = \phi(N \backslash E) + \phi(E) > \phi(E) = k$ e questo viola la definizione di k.
Supponiamo ora ϕ misura relativa. $\phi = \phi^+ - \phi^-$. Allora a ϕ^+, ϕ^- si può applicare la prima parte quindi esistono $\phi_a^+, \phi_s^+, \phi_a^-, \phi_s^-$ tali che ϕ_a^+, ϕ_a^- sono μ-assolutamente continue, ϕ_s^+, ϕ_s^- sono μ-singolari e inoltre $\phi^+ = \phi_a^+ + \phi_s^+$ e $\phi^- = \phi_a^- + \phi_s^-$. Allora $\phi = \phi^+ - \phi^- = (\phi_a^+ + \phi_a^-) - (\phi_s^+ + \phi_s^-)$. Ovviamente $\phi_a^+ + \phi_a^-$ è μ-assolutamente continua. Si dimostra facilmente anche che $\phi_s^+ + \phi_s^-$ è μ-singolare.
Mostriamo quindi che la decomposizione è unica. Supponiamo esistano due decomposizioni di ϕ:

$$\phi = \phi_a + \phi_s$$

$$\phi = \phi'_a + \phi'_s$$

allora deve essere $\phi_a - \phi'_a = \phi_s - \phi'_s$ quindi sia $\phi_a - \phi'_a$ che $\phi_s - \phi'_s$ sono contemporaneamente μ-assolutamente continue e μ-singolari e quindi sono nulle. Allora le due decomposizioni coincidono.

■

7 Misure di Lebesgue-Stieltjes

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile,crescente e continua a sinistra. Si sa che una tale F può avere al massimo una infinita numerabile di punti di discontinuità. Poniamo $\mathscr{R} := \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$ e $m_F : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \quad [a,b) \mapsto F(b) - F(a)$ (e $\emptyset \mapsto 0$)

Proposizione 7.1. *Se* $[a.b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ *con* $[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset\ \forall\ i \neq j$ *allora* $m_F([a,b)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n))$

Dimostrazione. Supponiamo che la successione di intervalli sia già ordinata. Allora $\sum\limits_{n=1}^{k} m_F([a_n, b_n)) = \sum\limits_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(a_n)) \leq -F(a_1) + F(b_k) \leq -F(a) + F(b) = m_F([a.b))$ quindi passando al limite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n)) \leq m_F([a,b))$$

$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \bar{b} < b$ tale che $F(\bar{b}) \geq F(b) - \epsilon$ (per la continuità a sinistra di F). Inoltre $\forall\ \epsilon > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ \bar{a}_n < a_n$ tali che $F(a_n) - \frac{\epsilon}{2^n} \leq F(\bar{a}_n)$. Sappiamo quindi che $[a, \bar{b}] \subseteq [a,b) =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n, b_n)$ per cui $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tale che $[a, \bar{b}] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} (\bar{a}_n, b_n)$ (per la compattezza di $[a, \bar{b}]$). Sapendo che $F(\bar{b}) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(\bar{a}_n))$ (non lo mostriamo ma è semplice) allora vale che $F(b) - \epsilon - F(a) \leq F(\bar{b}) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(\bar{a}_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n)) + \epsilon$ ovvero $m_F([a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n)) + 2\epsilon$ per cui passando al limite si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n)) \geq m_F([a, b))$$

■

Definiamo quindi ora una misura esterna $\mu_F^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ data da:

$$\mu_F^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_F(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \in \mathscr{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposizione 7.2. *μ_F^* è una misura esterna.*

Dimostrazione. Ovviamente $\mu_F^*(\emptyset) = 0$.
Siano $A \subseteq B$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Allora siccome ogni ricoprimento di B lo è anche di A deve essere $\mu_F^*(A) \leq \mu_F^*(B)$.
Preso $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(E_n)$ sia finita (altrimenti è banale). $\forall\ \epsilon > 0$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esiste una successione $\{I_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{R}$ tale che $E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}$ e $\mu_F^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_F(I_k^{(n)})$.
Siccome $\{I_k^{(n)}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ ricopre E si ha che

$$\mu_F^*(E) \leq \sum_{n,k} m_F(I_k^{(n)}) = \sum_n \sum_k m_F(I_k^{(n)}) \leq \sum_n \left(\mu_F^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(E_n) + \epsilon$$

da cui segue che $\mu_F^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^*(E_n)$ ■

A partire da una misura esterna si può sempre costruire una misura utilizzando il teorema di Caratheodory.

Teorema 7.1 (Teorema di Caratheodory)**.** *Ω insieme, $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ tale che $\mu^*(\emptyset) = 0$ allora l'insieme:*

$$\mathscr{M} := \{A \in \mathscr{P}(\Omega) \mid \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A) \quad \forall E \in \mathscr{P}(\Omega)\} \tag{2}$$

è un'algebra e $\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{M}}$ è semplicemente additiva. Se inoltre μ^* fosse anche sub-additiva (ovvero μ^* misura esterna) allora $\mathscr{M}$ è una σ-algebra e μ è una misura.

Quindi μ_F^* è una misura su una certa σ-algebra $\mathscr{M}_F \quad \forall\, F$. In particolare si può provare che $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_F \quad \forall\, F$ e che su $\mathscr{R}$ si ha $\mu_F^* = m_F$.

Osservazione 7.1. Preso $\bar{x}(\in \mathscr{R})$ allora $\mu_F^*(x) = 0 \iff F$ è continua in $\bar{x}$. Infatti presa la successione $\{[\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ si ha che $\mu^*(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) = 0 \iff F$ è continua in $\bar{x}$. (altrimenti $\mu_F^*(\bar{x}) = F(\bar{x}^+) - F(\bar{x})$ ovvero il salto)

Osservazione 7.2. Il fatto di ave scelto F monotona e continua da sinistra è irrilevante e ci si può sempre ricondurre.

Esempio 7.1. Alcuni esempi:

- $F(x) = x \implies \mathscr{M}_F = \mathscr{L}$ e $\mu_F = \mu$ misura di Lebesgue
- $F(x) = \operatorname{sign}(x) \implies \mathscr{M}_F = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ e $\mu_F = 2\delta_0$
- $F(x) = \lfloor x \rfloor \implies \mathscr{M}_F = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ e $\mu_F = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$

8 Estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale

Vogliamo estendere il teorema fondamentale del calcolo integrale con l'integrale di Lebesgue.

Definizione 8.1 (Funzione a variazione limitata)**.** *Una funzione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice a variazione limitata se considerate suddivisioni di $[a,b]$ della forma $S := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ e le relative quantità $v_S := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ vale che $V_f([a,b]) := \sup_S v_S < +\infty$ ($V_f([a,b])$ si dice variazione totale di f in $[a.b]$)*

Esempio 8.1. Alcuni esempi:

- Se f è monotona non decrescente allora $\forall\, S$ suddivisione si ha $v_S = f(b) - f(a) \implies V_f([a,b]) = f(b) - f(a)$
- Se f è L-Lipschitziana allora $\forall\, S = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ suddivisone si ha che $v_S = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} L|x_i - x_{i-1}| = L(b-a) \implies V_f([a,b]) \le L(b-a)$

Osservazione 8.1. Per l'esempio sulle funzioni Lipschitziane tutte le funzioni $C^1([a,b])$ sono a variazione limitata.

Teorema 8.1. *Una funzione f è a variazione limitata $\iff$ f si può esprimere come differenza di funzioni monotone non decrescenti.*

Osservazione 8.2. Se $f \in C^0([a,b])$ non è detto che f sia a variazione limitata (non vale nemmeno il viceversa)

Teorema 8.2. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata allora la derivata f' di f esiste quasi ovunque in $[a,b]$ ed è integrabile su $[a,b]$.*

Presa una f a variazione limitata posso considerare quindi la misura relativa

$$\nu(B) := \int_B f' \, d\mu \quad \forall\, B \subseteq [a,b] \text{ misurabile}$$

Se come B considero insiemi del tipo $[a,x]$, $x \in [a,b]$ risulta definita una funzione integrale $g(x) := \nu([a,x]) = \displaystyle\int_{[a,x]} f' \, d\mu$

Definizione 8.2 (Funzione assolutamente continua)**.** *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che per ogni gruppo di intervalli $[a_1,b_1],\dots,[a_n,b_n]$ non sovrapponentesi (possono coincidere solo sugli estremi) tali che $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i - a_i \leq \delta$ si ha $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \epsilon$*

Osservazione 8.3. f assolutamente continua $\implies$ f uniformemente continua ma non vale il viceversa. Come controesempio di può prendere la funzione di Vitali.

Osservazione 8.4. f assolutamente continua $\implies$ f a variazione limitata. Infatti se scelgo $\epsilon = 1$ trovo $\delta_1 > 0$ tale che si possa dividere $[a,b]$ in N intervalli $[c_i,d_i]$ ciascuno di lunghezza $\dfrac{b-a}{N} \leq \delta_1$. Se in ognuno di tali N sottointervalli considero una qualunque suddivisione $S_i = \{c_i = x_0^{(i)} < \cdots < x_{m_i}^{(i)} = d_i\}$ e valuto $\sum\limits_{j=i}^{m_i} \left| f(x_j^{(i)}) - f(x_{j-1}^{(i)}) \right| \leq 1$. Unendo tutte le suddivisioni trovo che

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{m_i} \left| f(x_j^{(i)}) - f(x_{j-1}^{(i)}) \right| \leq N$$

Osservazione 8.5. f è L-Lipschitziana in $[a,b]$ $\implies$ f è assolutamente continua (dato $\epsilon > 0$ basta prendere $\delta = \dfrac{\epsilon}{L}$)

Osservazione 8.6. Le funzioni Hoelderiane non sono sempre assolutamente continue. (Come controesempio sempre la funzione di Vitali che è $\log_3(2)$-Hoelderiana)

Teorema 8.3. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata. f verifica la formula del teorema fondamentale del calcolo integrale $\iff$ f è assolutamente continua.*

Cenni di dimostrazione. $\Longleftarrow$) Si prova che f è assolutamente continua sfruttando la proprietà di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue.
$\implies$) f si può scrivere come differenza di funzioni monotone non decrescenti e assolutamente continue (si dimostra a partire dal risultato analogo ma più debole). Allora si può associare

a f la differenza di due misure di Lebesgue-Stieltjes che fornisce una misura relativa ν_f che è μ-assolutamente continua (μ è la misura di Lebesgue). A tale misura si può applicare il teorema di Radon-Nikodym utilizzando la derivata $h := \dfrac{\partial \nu_f}{\partial \mu}$. Presa ora $g(x) := f(a) + \displaystyle\int_{[a,x]} h \, d\mu$ si verifica che $g'(x) = f'(x)$ ovvero $h = f'$ μ-quasi ovunque. ■

Osservazione 8.7. Una funzione a variabile limitata f si può decomporre nella somma di tre funzioni g, h, s con g assolutamente continua e tale che $g' = f'$ quasi ovunque, h continua e singolare (non costante ma $h'(x) = 0 \quad \forall \, x$), $s = 0$ se f è continua, altrimenti s costante a tratti per un numero di tratti al più numerabile. (s viene detta funzione dei salti)

Osservazione 8.8 (Integrale per parti)**.** $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(b)g(b) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$ vale ancora se f, g sono assolutamente continue. Gli integrali hanno senso grazie alla disuguaglianza di Holder.

Osservazione 8.9 (Integrale per sostituzione)**.** $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) \, dt$ con $\phi(\alpha) = a$ e $\phi(\beta) = b$ si può estendere a condizioni più generali. Per esempio basta che f sia misurabile e limitata in $[a, b]$, ϕ assolutamente continua su $[\alpha, \beta]$ e tale che $a \leq \phi(t) \leq b$, e $f(\phi(t))\phi'(t)$ sia integrabile.

Definizione 8.3 (Spazi di Sobolev)**.** *Definisco spazi di Sobolev in dimensione 1 gli insiemi* $W^{1,p}(a, b) := \{u : [a, b] \to \mathbb{R} \mid u \text{ assolutamente continua e } u' \in L^p(a, b)\}$ *dove u' è intesa esistente quasi ovunque*

Osservazione 8.10. $W^{1,1}(a, b) = AC(a, b)$ (AC insieme delle funzioni assolutamente continue)

Osservazione 8.11. $W^{1,\infty}(a, b)$ è l'insieme delle funzioni Lipshitziane in $[a, b]$.

Osservazione 8.12. Presa $u \in W^{1,p}$ con $1 < p < +\infty$ allora $|u(x) - u(y)| = \left| \displaystyle\int_y^x u'(t) \, dt \right| \leq$ $\displaystyle\int_y^x 1 \cdot |u'(t)| \, dt \leq \left(\int_y^x 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_y^x |u'(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |x - y|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p(a,b)} \implies u$ è Holderiana di esponente $\dfrac{1}{p'}$

9 Norme e spazi normati

Laddove non sarà specificato diversamente si considereranno spazi vettoriali sul campo dei reali.

Definizione 9.1 (Norma)**.** *X spazio vettoriale. Una mappa $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ si dice norma se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall \, x \in X$

2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare)*

Se X è dotato di una norma la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato

Esempio 9.1. Alcuni esempi di norme:

- $X := \mathbb{R}$, $\|\cdot\| := |\cdot|$
- $X := \mathbb{R}^N$, $\left\|(x_1, \ldots, x_N)\right\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ con $p \in [1, +\infty)$ (Dimostreremo che è una norma successivamente)
- $X := \mathbb{R}^N$, $\left\|(x_1, \ldots, x_N)\right\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Proposizione 9.1 (Disuguaglianza di Young)**.** *$\forall\, a, b \geq 0 \quad \forall p, q \in (1, +\infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vale che $ab \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q$ (p e q si dicono esponenti coniugati).*

Dimostrazione. $\log(x)$ è una funzione concava quindi $\log\left(\frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ \log(a^p) + \frac{1}{q}\ \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$ e quindi siccome il logaritmo è una funzione monotona si ha la tesi. ■

Proposizione 9.2 (Disuguaglianza di Holder nel caso finito dimensionale)**.** *$x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ con $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$. Allora $\forall\, p, q$ esponenti coniugati vale che:*

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q \tag{3}$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Young vale che, scelti p, q coppia di esponenti coniugati, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$. In particolare $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0 \quad \sum_{i=1}^{N} |\lambda x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\|\lambda x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q \implies \lambda \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\lambda^p \|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q \implies \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\lambda^{-1}\|y\|_q^q$. Posto $g(y) := \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\lambda^{-1}\|y\|_q^q$ vale chiaramente che $\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \inf_{\lambda > 0} g(\lambda)$. Siano $A := \|x\|_p^p$ e $B := \|y\|_q^q$. Allora $g'(\lambda) = \frac{p-1}{p} A \lambda^{p-2} - \frac{B}{q}\lambda^{-2} = \lambda^{-2}\left(\frac{p-1}{p} A \lambda^p - \frac{B}{q}\right)$ e quindi $g'(\lambda) = 0 \iff \lambda^p = \frac{B}{A}\frac{p}{q(p-1)} = \frac{B}{A}$. Chiamo quindi $\bar{\lambda} = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p}}$ e si trova che $g(\bar{\lambda}) = \frac{A}{p}\left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{p}} + \frac{B}{q}\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{p}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{B}{p} + \frac{B}{q}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{p}} B = B^{1-\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{p}} =$

$B^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \|y\|_q$. Da questo segue facilmente che:

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \inf_{\lambda>0} g(\lambda) \leq g(\bar{\lambda}) = \|x\|_p \|y\|_q$$

■

Proposizione 9.3. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *è una norma* $\forall\ p \in (1, +\infty)$

Dimostrazione. Le prime tre proprietà della norma sono ovvie. Resta da mostrare solo la disuguaglianza triangolare. Scelto $p \in (1, +\infty)$ sia q il suo esponente coniugato. Allora si trova che:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p + \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) = \|x+y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)
\end{aligned}$$

da cui segue facilmente, dividendo per $\|x+y\|_p^{p-1}$:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

■

Definizione 9.2 (Norme equivalenti)**.** *X spazio normato con $\|\cdot\|_{(1)}$ e $\|\cdot\|_{(2)}$ norme su X. Si dice che $\|\cdot\|_{(1)}$ è equivalente a $\|\cdot\|_{(2)}$ se $\exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 > 0$ tali che $\forall\ x \in X \quad \|x\|_{(1)} \leq c_1 \|x\|_{(2)}$ e $\|x\|_{(2)} \leq c_2 \|x\|_{(1)}$*

Osservazione 9.1. L'equivalenza tra norme è effettivamente una relazione di equivalenza.

Teorema 9.1. *X spazio vettoriale di dimensione finita. Tutte le norme su X sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di X. Scelto un elemento $x \in X$ esistono $x_1, \ldots, x_n$ tali che $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i$. Pongo $\|x\|_1 := \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Ovviamente $\|\cdot\|_1$ è una norma su X quindi basta mostrare che ogni altra norma è equivalente a $\|\cdot\|_1$. Sia $\|\cdot\|$ una norma qualunque su X. $\forall\ x \in X \quad \|x\| = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i \right\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \|w_i\| \leq \max\limits_{i=1,\ldots,n} \|w_i\| \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$ quindi ho finito se pongo $c_1 := \max\limits_{i=1,\ldots,n} \|w_i\|$. Supponiamo ora per assurdo che $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in X$ tale che $\|x_k\|_1 > k \|x_k\|$.

Pongo $u_k := \dfrac{x_k}{\|x_k\|_1}$. Allora $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_1 = 1$ e $\|u_k\| < \dfrac{1}{k}$. $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, u_{k,i},\ i = 1, \dots, n$ tali che $u_k = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{k,i} w_i$. Fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha quindi una successione $\{u_{k,i}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Chiaramente, siccome $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{k,i}| = 1$, deve essere $|u_{k,i}| \leq 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \dots, n$ e quindi per ogni scelta di i la successione $\{u_{k,i}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata. Allora esiste una sottosuccessione k_j tale che $\forall\ i = 1, \dots, n \quad u_{k_j,i} \to \lambda_i$. Chiamo $u := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$. Si trova facilmente che $\|u\| \leq \|u_{k_j} - u\| + \|u_{k_j}\| \leq c_1 \|u_{k_j} - u\|_1 + \dfrac{1}{k_j} = c_1 \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{k_j,i} - \lambda_i| + \dfrac{1}{k_j} \to 0 \implies \|u\| = 0$. Inoltre $|\,\|u\|_1 - 1| \leq |\,\|u\|_1 - \|u_{k_j}\|_1| \leq \|u_{k_j} - u\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{k_j,i} - \lambda_i| \to 0 \implies \|u\|_1 = 1$ che è l'assurdo cercato. ∎

Teorema 9.2. *V spazio normato. Norme equivalenti inducono la stessa topologia.*

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|_{(1)}$ e $\|\cdot\|_{(2)}$ due norme equivalenti su V. Basta mostrare che preso U aperto nella topologia indotta da $\|\cdot\|_{(1)}$ allora U è aperto anche nella topologia indotta da $\|\cdot\|_{(2)}$. $\forall x_0 \in U \quad \exists\ \epsilon > 0$ tale che $B^{(1)}_{\epsilon}(x_0) \subseteq U$. Siccome $\|x - x_0\|_{(1)} \leq c_2 \|x - x_0\|_{(2)}$ si ha chiaramente che $B^{(2)}_{\frac{\epsilon}{c_2}}(x_0) \subseteq B^{(1)}_{\epsilon}(x_0) \subseteq U$ e quindi la tesi. ∎

Definizione 9.3 (Convergenza in uno spazio normato)**.** *$(X, \|\cdot\|)$ spazio normato, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ succession. Dico che x_n converge a $x \in X$ (e lo indico con $x_n \to x$) se vale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{4}$$

Osservazione 9.2. $x_n \to x \implies \|x_n\| \to \|x\|$ perchè $|\,\|x\| - \|x_n\|\,| \leq \|x_n - x\|$

Definizione 9.4. *$(X, \|\cdot\|)$ spazio normato e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ successione. Dico che $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ converge a $x \in X$ se posto $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $s_n \to x$.*

Teorema 9.3. *V spazio normato, $V_0 \subseteq V$ sottospazio. Se $\dim V_0 < +\infty$ allora V_0 è chiuso.*

Proposizione 9.4. *$f : V \to W$ è continua in $v_0 \iff \forall\ \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ successione convergente a v_0 vale che $f(v_n) \to f(v_0)$ in W*

Definizione 9.5 (Funzionale lineare)**.** *V spazio vettoriale reale. $f : V \to \mathbb{R}$ lineare si dice funzionale lineare.*

Teorema 9.4. *V, W spazi normati, $L : V \to W$ lineare. L è continua $\iff \exists\ M > 0$ tale che $\forall\ v \in V \quad \|L(v)\|_W \leq M \|v\|_V$*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Preso $v_0 \in V$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ successione convergente a v_0. Allora $\|L(v_n) - L(v_0)\| = \|L(v_n - v_0)\| \leq M \|v_n - v_0\| \to 0 \implies L(v_n) \to L(v_0)$ e quindi la continuità.
$\Longrightarrow$) Per assurdo $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ v_n \in V$ tale che $\|L(v_n)\|_W > n \|v_n\|_V$. Detto $u_n := \dfrac{v_n}{\|L(v_n)\|_W}$ vale

che $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad \|u_n\|_V < \dfrac{1}{n}$ e anche $L(u_n) = L\left(\dfrac{v_n}{\|L(v_n)\|_W}\right) = \dfrac{L(v_n)}{\|L(v_n)\|_W} \implies \|L(u_n)\|_W = 1.$
Allora, detto $u_0 := \dfrac{v_0}{\|L(v_0)\|_W}$ in V $u_n \to u_0 = 0$ ma L è continua e $\|L(u_0)\|_W = 1$ e questo è assurdo. ■

Definizione 9.6. *V, W spazi vettoriali. $\mathscr{L}(V,W) := \{L : V \to W \mid L$ lineare e continua $\}$*

Osservazione 9.3. V, W spazi vettoriali. $\mathscr{L}(V,W)$ è uno spazio vettoriale normato con $\|L\|_{\mathscr{L}} := \sup\left\{\dfrac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V}\middle| x \in V\backslash\{0\}\right\} = \sup\{\|L(x)\|_W \mid \|x\|_V = 1\}$.
Per definizione $\forall\ L \in \mathscr{L}(V,W)\quad \|L\|_{\mathscr{L}} < +\infty$

Osservazione 9.4. $\|L\|_{\mathscr{L}} = \inf\{M > 0 \mid \|L(v)\|_W \le M\|v\|_V \quad \forall\ v \in V\}$

Definizione 9.7 (Spazio di Banach)**.** *V spazio normato si dice di Banach se è anche completo*

Esempio 9.2. Alcuni esempi di spazi di Banach:

- $C^0([0,1])$ con $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ è uno spazio di Banach
- $C^1([0,1])$ con $\|f\|_{C^1} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ è uno spazio di Banach

Definizione 9.8 (Immersione continua)**.** *Se la mappa di inclusione tra due spazi normati è continua si dice che l'immersione è continua*

Teorema 9.5. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato di dimensione finita. Allora V è di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ successione di Cauchy. Se due norme sono equivalenti e la successione v_n è di Cauchy per una norma allora è di Cauchy per entrambe. Siccome V è di dimensione finita ($\implies$ tutte le norme sono equivalenti) mi basta verificare la tesi con una norma particolare. Sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di V. Posso scrivere v_n nella forma $\sum_{i=1}^{n} v_{n,i} w_i$ quindi pongo $\|v_n\| := \sum_{i=1}^{n} |v_{n,i}|$. Siccome $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy anche $\{v_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy $\forall\ i = 1, \ldots, n$ quindi siccome $\mathbb{R}$ è completo $\forall\ i = 1, \ldots, n \quad \exists\ \lambda_i$ tali che $v_{n,i} \to \lambda_i$. Allora detto $v := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ vale che $\|v - v_n\| = \sum_{i=1}^{n} |v_{n,i} - \lambda_i| \to 0 \implies v_n \to v$ quindi V è completo e perciò è di Banach. ■

Teorema 9.6. *V, W spazi normati con W spazio di Banach $\implies \mathscr{L}L(V,W)$ è uno spazio di Banach*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(V,W)$ una successione di Cauchy. Allora, per definizione $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n, m \ge \bar{n} \quad \|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}} \le \epsilon$ ($\iff \|T_n(x) - T_m(x)\|_W \le \epsilon\|x\|_V \quad \forall\ x \in V$) . Da questo segue immediatamente che:

1. $\forall\, x \in V \quad \{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ è una successione di Cauchy

2. $\exists\, M > 0$ tale che $\|T_n\|_{\mathscr{L}} \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

La prima affermazione è ovvia. Per mostrare la seconda osserviamo che preso $\epsilon = 1 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n} \quad \|T_n\|_{\mathscr{L}} \leq \|T_{\bar{n}}\|_{\mathscr{L}} + \|T_{\bar{n}} - T_n\|_{\mathscr{L}} \leq \|T_{\bar{n}}\|_{\mathscr{L}} + 1$ quindi la costante $M := \max\{\|T_{\bar{n}}\|_{\mathscr{L}} + 1, \|T_{\bar{n}-1}\|_{\mathscr{L}}, \dots, \|T_1\|_{\mathscr{L}}\}$ è quella cercata. $\forall\, x \in V$ pongo $g_x := \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)$ ($g_x \in W$ per la completezza di W). Detta $T : V \to W x \mapsto g_x$ mostro che T è lineare e limitata. Ovviamente $T(\alpha x + \beta y) = g_{\alpha x+\beta y} = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) + \beta \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(y) = \alpha g_x + \beta g_y = \alpha T(x) + \beta T(y)$. Inoltre per il punto 2) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left\|T_n(x)\right\|_W \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}} \|x\|_V \leq M\|x\|_V \implies \forall\, x \in V \quad \left\|T(x)\right\|_{\mathscr{L}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|T_n(x)\right\| \leq M\|x\|_V$. Allora $T \in \mathscr{L}(V, W)$ e inoltre $T_n \to T$ in $\mathscr{L}(V, W)$. Infatti essendo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathscr{L}(V, W)$ si ha che $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n, m \geq \bar{n} \quad \|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}} \leq \epsilon \iff \forall\, x \in V \quad \left\|T_n(x) - T_m(x)\right\|_W \leq \epsilon\|x\|_V \implies \forall\, x \in V \quad \left\|T_n(x) - T(x)\right\|_{\mathscr{L}} \leq \epsilon\|x\|_V \implies \|T_n - T\|_{\mathscr{L}} \leq \epsilon$ che è la tesi. ■

10 Successioni di funzioni e convergenze

Definizione 10.1 (Convergenza quasi uniforme). *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si dice che $f_n \to f$ quasi uniformemente (q.u) in Ω se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(\mathscr{C}_E) < \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in E.*

Definizione 10.2 (Convergenza in misura). *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si dice che $f_n \to f$ in misura se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$*

Proposizione 10.1. *$f_n \to f$ quasi uniformemente $\implies f_n \to f$ quasi ovunque*

Dimostrazione. $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, E_k \in \mathscr{M}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in E_k e $\mu(\mathscr{C}_{E_k}) < \dfrac{1}{k}$. Ovviamente $f_n \to f$ puntualmente in $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Allora siccome $\mathscr{C}_E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_{E_k}$ vale che $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \mu(\mathscr{C}_E) = \mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_{E_k}) \leq \mu(\mathscr{C}_{E_k}) < \dfrac{1}{k} \implies \mu(\mathscr{C}_E) = 0$ e quindi la tesi ■

Proposizione 10.2. *$f_n \to f$ quasi uniformemente $\implies f_n \to f$ in misura*

Dimostrazione. $\forall\, \sigma > 0 \quad \exists\, E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(\mathscr{C}_E) < \sigma$ e $f_n \to f$ uniformemente in E ovvero $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > \bar{n} \quad \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Allora $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \sigma > 0 \quad \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = \mu(\{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) + \mu(\{x \in \mathscr{C}_E \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \sigma$ e quindi passando al limite per $\sigma \to 0$ si ha la tesi. ■

Teorema 10.1 (Teorema di Severini-Egorov). *Se $\mu(\Omega) < +\infty$ allora $f_n \to f$ quasi ovunque $\iff f_n \to f$ quasi uniformemente*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Già nota

$\Longrightarrow$) Sia N trascurabile tale che $f_n \to f$ in $\Omega \backslash N$. Sia $A_m^{(k)} := \bigcap_{n \geq m} \left\{ x \in \Omega \backslash N : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$. Fissato $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\{A_m^{(k)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ è crescente e inoltre $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m^{(k)} = \Omega \backslash N$. Infatti se $x \in \Omega \backslash N$ allora $f_n \to f$ e quindi $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n \geq m \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \implies x \in A_m^{(k)}$. Allora $\mu(A_m^{(k)}) \to \mu(\Omega \backslash N) = \mu(\Omega)$ e quindi $\forall\ \epsilon > 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \exists\ m_k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(\mathscr{C}_{A_{m_k}^{(k)}}) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$. Allora $\forall\ x \in A_{m_k}^{(k)} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\ n \geq m_k$. Si pone $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m_k}^{(k)}$ e quindi su E $f_n \to f$ uniformemente. Inoltre $\mu(\mathscr{C}_E) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_{A_{m_k}^{(k)}}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$ ■

Osservazione 10.1. $f_n \to f$ in misura $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ quasi ovunque. Un controesempio è dato da $([0,1], \mathscr{L}, \mu)$ e $f_1(x) := 1,\ f_2(x) := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]},\ f_3(x) := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]},\ f_4(x) := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3}]}, \ldots$

Teorema 10.2. *$f_n \to f$ in misura $\Longrightarrow \exists\ f_{n_k} \to f$ quasi ovunque*

Dimostrazione. $\forall\ \epsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$. Allora $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \exists\ n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n \geq n_k \quad \mu\left(\left\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{k^2}$.
Sia $E_k := \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$ e $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$. Allora $\forall\ m \in \mathbb{N} \quad \mu(E) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e quindi siccome $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge vale che $\mu(E) = 0$. Allora $\mathscr{C}_E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq m} \mathscr{C}_{E_k}$ dove $\mathscr{C}_{E_k} = \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}$. Allora su $\mathscr{C}_E$ $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. Infatti $\forall\ x \in \mathscr{C}_E \quad \exists\ m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ k \geq m \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \implies f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. ■

11 Spazi L^p e l^p

Definizione 11.1 (Spazi L^p)**.** *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $p \in [1, +\infty)$. Si pone*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ misurabile tale che } \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

Sullo spazio $L^p(\Omega)$ (che abbrevieremo L^p) si può definire una relazione di equivalenza $f \sim g \iff f = g$ quasi ovunque. Chiamiamo quindi $\mathscr{L}^p(\Omega) := L^p/_{\sim}$. Con abuso di notazione indicheremo $\mathscr{L}^p$ direttamente con L^p e la classe di funzioni uguali quasi ovunque con un suo rappresentante.

Osservazione 11.1. L^p è uno spazio vettoriale. Infatti prese $f, g \in L^p$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è chiaro che $\alpha f + \beta g$ è misurabile e inoltre $|\alpha f + \beta g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ quindi $\alpha f + \beta g \in L^p$. Infatti

$\forall\ t > 0 \quad (1+t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p)$ e quindi in particolare per $t = \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$. (Per mostrarlo basta trovare il minimo di $\phi(t) := 2^{p-1}(1+t^p) - (1+t)^p$)

In modo analogo a prima, introducendo la stessa relazione di equivalenza $\sim$ posso definire lo spazio:

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile tale che } \exists\ C > 0 : |f| \leq C\ \mu\text{-quasi ovunque in } \Omega\}$$

Osservazione 11.2. Anche in questo caso L^∞ è uno spazio vettoriale. Infatti se $|f| \leq C_f$ in $\Omega \backslash N_f$ e $|g| \leq C_g$ in $\Omega \backslash N_g$ con N_f, N_g trascurabili chiaramente vale che $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| C_f + |\beta| C_g$ in $\Omega \backslash (N_f \cup N_g)$

Definiamo quindi due mappe su L^p e L^∞ che dimostreremo essere delle norme:

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ quasi ovunque in } \Omega\}$$

Chiaramente queste mappe sono ben definite. Inoltre rispettano le prime tre proprietà delle norme. Resta quindi da mostrare la disuguaglianza triangolare.

Proposizione 11.1 (Disuguaglianza di Holder)**.** *$f \in L^p,\ g \in L^{p'}$ con p, p' esponenti coniugati (compresa la coppia (1,+∞)) $\implies$ $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $p = 1$ e $p' = +\infty$. Allora vale che $|(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_{L^\infty} \implies fg \in L^1$ e inoltre $\int_\Omega |fg|\ d\mu \leq \|g\|_{L^\infty} \int_\Omega |f|\ d\mu = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$

Sia ora $p \in (1, +\infty)$. Per la disuguaglianza di Young vale che, $\forall\ x \in \Omega$:

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad \mu\text{-quasi ovunque}$$

e quindi:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\ d\mu \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p\ d\mu + \frac{1}{p'}\int_\Omega |g(x)|^{p'}\ d\mu \quad \mu\text{-quasi ovunque}$$

da cui segue facilmente che $fg \in L^1$. Come nella dimostrazione della disuguaglianza di Holder nel caso finito dimensionale si procede notando che $\forall\ \lambda > 0$:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\ d\mu \leq \lambda^{p-1}\frac{\|f\|_{L^p}^p}{p} + \lambda^{-1}\frac{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}{p'}$$

e quindi, posto $A := \dfrac{\|f\|^p_{L^p}}{p}$, $B := \dfrac{\|g\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'}$ e $\phi(\lambda) := \lambda^{p-1}A + \lambda^{-1}B$, ripetendo gli stessi calcoli si trova che:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \; d\mu \leq \inf_{\lambda>0} \phi(\lambda) = \min_{\lambda>0} \phi(\lambda) = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

■

Teorema 11.1 (Disuguaglianza di Minkowski)**.** *$f, g \in L^p$ con $p \in (0, +\infty)$. Allora $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$*

Dimostrazione. Notiamo immediatamente che:

$$\|f+g\|^p_{L^p} = \int_\Omega |f+g|^p \; d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| \; d\mu + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g| \; d\mu = (*)$$

Detto p' l'esponente coniugato di p si ha che $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$. Infatti $|f+g|^{p'(p-1)} = |f+g|^p$. Allora per la disuguaglianza di Holder vale che

$$(*) \leq \|f\|_{L^p} \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} + \|g\|_{L^p} \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} = \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$$

Inoltre sviluppando meglio il primo termine si trova che:

$$\left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} = \left(\int_\Omega (|f+g|^{p-1})^{p'} \; d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_\Omega |f+g|^p \; d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|^{p-1}_{L^p}$$

da cui si ricava facilmente la tesi. ■

Grazie alla disuguaglianza di Mikowski segue facilmente che tutti gli spazi L^p sono normati con norma $\|\cdot\|_{L^p}$.

Proposizione 11.2. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura finito, $p > 1$. Allora $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e inoltre l'immersione è continua*

Dimostrazione. Grazie alla disuguaglianza di Holder si trova facilmente la tesi. Infatti, detto p' l'esponente coniugato di p:

$$\int_\Omega |f| \; d\mu = \|f\|_{L^p} \|1\|_{L^{p'}} = \|f\|_{L^p} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'}}$$

■

Teorema 11.2. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura. $\forall \; p \in (0, +\infty)$ $\;L^p$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. $p = +\infty$) Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty$ successione di Cauchy. Allora $\forall \; k \in \mathbb{N} \;\; \exists \; n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m \geq n_k \;\; \|f_n - f_m\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k} \implies \exists \; \{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\mu(E_k) = 0$ e $\forall \; x \in \Omega \backslash E_k \;\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{1}{k}$. Allora detto $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ si ha che E è ancora μ-trascurabile e inoltre $\forall \; k \in \mathbb{N}$, $\forall \; x \in \Omega \backslash E \;\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{1}{k}$. Chiaramente $\forall \; x \in \Omega \backslash E \;\; \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy e $\mathbb{R}$ è completo quindi posso definire su $\Omega \backslash E$ la funzione $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Mostriamo quindi che $f \in L^\infty$ e inoltre $f_n \to f$ in L^∞. Per ipotesi so che $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \Omega\backslash E,\ \forall\ n \geq n_k \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{k} \implies |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{k} + \|f_n\|_{L^\infty} \implies f \in L^\infty$. Inoltre a partire dallo stesso fatto è evidente che $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_k \quad \|f_n - f\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k} \implies f_n \to f$ in L^∞.

$p \in [1, +\infty))$ Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ una successione di Cauchy. $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \exists\ n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n, m \geq n_k \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2^k}$. Ovviamente si può supporre che $n_{k+1} > n_k$ e quindi risulta ben definita una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Mostriamo che questa sottosuccessione converge quasi ovunque in Ω. Sia $\forall\ l \in \mathbb{N} \quad g_l(x) := \sum_{k=1}^{l-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$. Per definizione g_l è positiva, misurabile e inoltre $g_l \in L^p$ per qualunque scelta di $l \in \mathbb{N}$. Infatti $\|g_l\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{l-1} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{l-1} \dfrac{1}{2^k} \leq 1$. Inoltre fissato $x \in \Omega$ si ha che la successione $l \mapsto g_l(x)$ è monotona crescente e quindi $\forall\ x \in \Omega \quad \exists \lim_{l\to+\infty} g_l(x) =: g(x)$. Per Beppo-Levi vale che:

$$\lim_{l\to+\infty} \int_\Omega |g_l|^p\ d\mu = \int_\Omega |g|^p\ d\mu \leq 1$$

quindi anche $g \in L^p$. Fissati $j, k \in \mathbb{N}$ con $j > k$ si ha che $\forall\ x \in \Omega \quad |f_{n_j}(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)| + |f_{n_{j-1}}(x) - f_{n_{j-2}}(x)| + \cdots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = \sum_{i=k}^{j-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \leq |g_j(x) - g_k(x)| \to 0 \implies \{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy $\forall\ x \in \Omega$. Allora posso definire $f(x) := \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$. Ovviamente $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque in Ω e siccome $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq g(x)$ deve essere $f_{n_k} - f \in L^p \implies f \in L^p$. Infine siccome $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq |g(x)|^p$ grazie al teorema di convergenza dominata si ha che $\left\|f_{n_k} - f\right\|_{L^p} \to 0 \implies f_{n_k} \to f$ in L^p. Per concludere noto che per ipotesi $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n, m \geq \bar{n} \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ e inoltre $\exists\ \bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ k \geq \bar{k} \quad \left\|f_{n_k} - f\right\|_{L^p} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ quindi scelto $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $n_{\bar{h}} \geq \bar{n}$ e $\bar{h} \geq \bar{k}$ si ha che $\forall n \geq \bar{n} \quad \|f_n - f\|_{L^p} \leq \left\|f_n - f_{n_{\bar{h}}}\right\|_{L^p} + \left\|f_{n_{\bar{h}}} - f\right\|_{L^p} \leq \epsilon \implies f_n \to f$ in L^p. ■

Corollario 11.1. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ successione tale che $f_n \to f$ in $L^p \implies \exists\ \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Grazie alla dimostrazione sappiamo che $\exists\ \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione tale che $f_{n_k} \to f^*$ quasi ovunque in Ω. Inoltre, seguendo lo stesso iter dimostrativo, $f^* \in L^p$ e $f_{n_k} \to f$ in L^p. Allora $\|f^* - f\|_{L^p} \leq \left\|f^* - f_{n_k}\right\|_{L^p} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{L^p} \to 0 \implies f^* = f$ quasi ovunque in Ω e quindi $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. ■

Proposizione 11.3. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione convergente a f in L^p con $p \neq \infty$. Allora $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che f_n non converga a f in misura. Allora $\exists\ \epsilon_0,\ \delta_0 > 0$ tali che per infinite scelte di $n \in \mathbb{N} \quad \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta_0\}) > \epsilon_0$. Posto $E_n := \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta_0\}$ segue immediatamente che per infinite scelte di $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p \ d\mu \geq \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|^p \ d\mu \geq \int_{E_n} \delta_0^p \ d\mu > \delta_0^p \epsilon_0 > 0$$

e questo viola l'ipotesi di convergenza in L^p. ■

Osservazione 11.3. Lo stesso enunciato vale anche per $p = \infty$. Infatti se $f_n \to f$ in L^∞ allora $f_n \to f$ quasi uniformemente $\implies f_n \to f$ in misura.

Proposizione 11.4. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura finito. $p > q \implies L^p \subseteq L^q$ con immersione continua.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^p$. Presa una qualunque coppia (r, r') di esponenti coniugati, per la disuguaglianza di Holder segue che:

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_\Omega |f|^q \ d\mu \leq \left(\int_\Omega 1 \ d\mu\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_\Omega |f|^{qr} \ d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = (*)$$

In particolare scelto $r = \dfrac{p}{q}$ (> 1) si trova che:

$$(*) = (\mu(\Omega))^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |f|^p \ d\mu\right)^{\frac{q}{p}} = (\mu(\Omega))^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_{L^p}^q < +\infty$$

che da la tesi. ■

Osservazione 11.4. Nelle stesse ipotesi della proposizione è chiaro che se $f_n \to f$ in L^p allora $f_n \to f$ in L^q.

Teorema 11.3. *$(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ spazio di misura finito, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Se vale che:*

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p} < +\infty$
2. *$\exists\ f$ misurabile tale che $f_n \to f$ quasi ovunque in Ω*

allora $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall\ q < p$

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che $f \in L^p$. Grazie alla proprietà 1) si ha che $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p}^p = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n|^p \ d\mu < +\infty$ quindi per il Lemma di Fatou si trova che:

$$\int_\Omega |f|^p \ d\mu \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n|^p \ d\mu < +\infty$$

da cui segue che $f \in L^p$. Sia $q < p$. Per il teorema di Severini-Egorov $f_n \to f$ quasi uniformemente quindi $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \backslash E$. Allora fissato $\epsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n} \quad \forall\, x \in \Omega \backslash E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Allora $\forall\, n \geq \bar{n}$ grazie alla disuguaglianza di Holder:

$$\|f_n - f\|_{L^q}^q = \int_\Omega |f_n - f|^q \, d\mu = \int_{\Omega \backslash E} |f_n - f|^q \, d\mu + \int_E |f_n - f|^q \, d\mu \leq$$

$$\leq \epsilon^q \mu(\Omega \backslash E) + \left(\int_E 1 \, d\mu \right)^{1 - \frac{q}{p}} \left(\int_E |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \leq \epsilon^p \mu(\Omega \backslash E) + \epsilon^{1 - \frac{q}{p}} \|f_n - f\|_{L^p}^q \to 0$$

che da la tesi. ■

Definizione 11.2 (Spazi l^p)**.** $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(N), \#)$ *spazio di misura. Chiamiamo spazi l^p gli spazi $L^p(\mathbb{N})$*

Osservazione 11.5. Ovviamente $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} x(n) \; d\# = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (dove chiaramente si vede la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ come mappa $n \mapsto x(n) = x_n$) quindi si trova facilmente che detta $x := (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l^p$ con $p \in [1, +\infty) \quad \|x\|_{l^p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Osservazione 11.6. Presa $x := (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l^\infty$ si ha che $\|x\|_{l^\infty} = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

Osservazione 11.7. Tutto ciò che è stato visto in generale per gli spazi L^p continua ovviamente a valere per gli spazi l^p che sono dei casi particolari di spazi funzionali.

Proposizione 11.5. $p < q \implies l^p \subseteq l^q \subseteq l^\infty$ *con immersione continua tra l^p e l^q.*

Dimostrazione. Ovviamente $l^q \subseteq l^\infty$. Infatti $x \in l^q \implies |x_n|^q \to 0 \implies x_n \to 0 \implies x \in l^\infty$. Inoltre preso $x \in l^p$ si ha che:

$$\|x\|_{l^q}^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{q-p} |x_n|^p \leq \|x\|_{l^\infty}^{q-p} \|x\|_{l^p}^p$$

che da la tesi. ■

Definizione 11.3. *Definiamo i seguenti spazi funzionali:*

- $C := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R} \; \forall\, i \in \mathbb{N} \; e \; \exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n\} \subseteq l^\infty$
- $C_0 := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R} \; \forall\, i \in \mathbb{N} \; e \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0\} \subseteq C$
- $C_{00} := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R} \; \forall\, i \in \mathbb{N} \; e \; \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall\, n \geq \bar{n} \quad x_n = 0\} \subseteq C_0$

Osservazione 11.8. Ovviamente ognuno di questi spazi sono sottospazi vettoriali di l^∞

Proposizione 11.6. C_0 *è chiuso in* l^∞

Dimostrazione. Sia $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_0$ una successione tale che $x^{(n)} \to x$ in l^∞. Per ipotesi fissato $\epsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n} \quad \left\| x^{(n)} - x \right\|_{l^\infty} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ e inoltre $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \bar{k}_n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, k \geq \bar{k}_n \quad |x_k^{(n)}| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Allora $\forall\, n \geq \bar{n} \quad \forall k \geq \bar{k}_n \quad |x_k| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| \leq \epsilon$ ■

Proposizione 11.7. *La chiusura di C_{00} in l^∞ è C_0.*

Dimostrazione. Sia $T_n : C_0 \to C_{00}$ la mappa $x \mapsto T_n(x)$ dove:

$$(T_n(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \leq n \\ 0 & \text{se } i > n \end{cases}$$

Sia $x \in C_0$. Mostriamo che la successione $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_{00}$ converge a x. Sia $\epsilon > 0$. Notiamo che:

$$(T_n(x) - x)_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \leq n \\ x_i & \text{se } i > n \end{cases}$$

Per ipotesi $\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n \geq \bar{n} \quad |x_n| \leq \epsilon$ quindi $\forall\ n \geq \bar{n} \quad \forall\ i \in \mathbb{N} \quad |(T_n(x) - x)_i| \leq \epsilon \implies \left\|T_n(x) - x\right\|_{l^\infty} \leq \epsilon$ che da la tesi. ■

Corollario 11.2. *C_{00} è denso in $l^p \quad \forall\ p \in [1, +\infty)$ rispetto a $\|\cdot\|_{l^\infty}$*

Osservazione 11.9. Si può mostrare che $\forall\ p \in [1, +\infty)$ l'insieme $D := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$ è denso in $l^p \implies l^p$ è uno spazio separabile. Si può invece mostrare che l^∞ non è separabile.

Definizione 11.4 (Duale)**.** *V spazio normato. Lo spazio $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$ si dice spazio duale di V e si indica con V' o V^*. Gli elementi di V^* si dicono funzionali*

Teorema 11.4. *$p \in [1, +\infty)$. $\forall\ \phi \in (l^p)^* \quad \exists!\, u \in l^{p'}$ tale che $\phi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \quad \forall\ v \in l^p$ dove p' è l'esponente coniugato di p. Inoltre $\|\phi\|_{(l^p)^*} = \|u\|_{l^{p'}}$*

Dimostrazione. $\forall\ k \in \mathbb{N}$ sia e_k il k-esimo vettore della base standard (cioè $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ con 1 in posizione k) e $u_k := \phi(e_k)$. Pongo $u := (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Mostriamo prima che $u \in l^{p'}$ e che $\|u\|_{l^{p'}} \leq \|\phi\|_{(l^p)^*}$ distinguendo i due casi $p = 1$ e $p \in (1, +\infty)$.

- $(p = 1)$ $\forall\ k \in \mathbb{N}$ vale $\quad |u_k| = |\phi(e_k)| \leq \|\phi\|_{(l^p)^*} \|e_k\|_{l^p} = \|\phi\|_{(l^p)^*} \implies \|u\|_{l^\infty} \leq \|\phi\|_{(l^p)^*}$
- $(p \in (1, +\infty))$ Sia $x \in C_{00} \cap l^p$. Notiamo subito che:

$$\sum_{k=1}^{N} x_k u_k = \sum_{k=1}^{N} x_k \phi(e_k) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k e_k) = \phi\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) \leq \|\phi\|_{(l^p)^*} \|x\|_{l^p}$$

  In particolare scelto x tale che $x_k := |u_k|^{p'-2} u_k \quad \forall\ k \leq N$ si trova che:

$$\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'} \leq \|\phi\|_{(l^p)^*} \|x\|_{l^p}$$

  e dunque

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'}\Big)^{1/p'} \leq \|\phi\|_{(l^p)^*}\,.$$

Quindi, mandando $N \to +\infty$, abbiamo che $u \in l^{p'}$ e che

$$\|u\|_{l^{p'}} \leq \|\phi\|_{(l^p)^*}$$

che è ciò che si voleva mostrare.

Mostriamo ora la disuguaglianza opposta. Visto che C_{00} è denso in l^p abbiamo

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k, \quad \forall x \in l^p.$$

Sia $x \in l^p$. Segue subito che (Disuguaglianza di Hölder):

$$|\phi(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \right| \leq \|u\|_{l^{p'}} \|x\|_{l^p} \implies \frac{|\phi(x)|}{\|x\|_{l^p}} \leq \|u\|_{l^{p'}} \implies \|\phi\|_{(l^p)^*} \leq \|u\|_{l^{p'}}$$

Mostriamo ora l'unicità. Supponiamo esistano $u, u' \in l^{p'}$ come nella tesi. Allora $\forall\ x \in l^p$ deve valere che $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k x_k \implies \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u'_k) x_k = 0$. Allora scelto $x := ((u_k - u'_k)|u_k - u'_k|^{p'-2})_{k \in \mathbb{N}}$ segue subito che $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k - u'_k|^{p'} = 0 \implies u_k = u'_k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ ■

Corollario 11.3. $(l^p)^* \leftrightarrow l^{p'}$

Corollario 11.4. *$\phi : C_0 \to \mathbb{R}$. Allora $\exists!\ u \in l^1$ tale che $\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k \quad \forall x \in C_0$. Inoltre $\|u\|_{l^1} = \|\phi\|_{(C_0)'}$*

Definizione 11.5. *In $(\mathbb{R}^N, \mathscr{L}, \mu)$ (μ misura di Lebesgue) definiamo l'insieme $C_C(\mathbb{R}^N) :=$ $\{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \mid f$ continua e $\exists\ K \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto t.c $f(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N \backslash K\}$*

Teorema 11.5. *$C_C(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ se $p \in [1, +\infty)$*

Dimostrazione. Mostriamo prima che $C_C(\mathbb{R}^N)$ è denso in L^1. Sia $f \in L^1$ ed $\epsilon > 0$. Per l'osservazione 3.4 esiste una funzione semplice s tale che $\|f - s\|_{L^1} \leq \epsilon$. Inoltre s è combinazione lineare di funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_A$ dove A è misurabile e limitato. Allora esistono due insiemi $F \subseteq A \subseteq G$ con F chiuso, G aperto, tali che $\mu(G \backslash F) \leq \epsilon$. Per il lemma di Urysohn $\exists\ f : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ continua tale che $f(F) = \{0\}$ e $f(\mathbb{R}^N \backslash G) = \{1\}$. Allora $\|f - \mathbb{1}_A\|_{L^1} \leq \int_{G \backslash F} 1\ d\mu \leq \epsilon$ e questo implica la tesi per $p = 1$.

Mostriamo ora la tesi per $p \in (1, +\infty)$. Nella dimostrazione useremo senza dimostrarlo che $f \in L^1 \cap L^\infty \implies f \in L^p\ \forall\ p \in [1, +\infty]$ (Più in generale vale che $f \in L^s \cap L^t \implies f \in L^r$ con r tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}\ \forall\ \theta \in (0,1)$) Da questo segue che $\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p-1} |f|\ dx \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1 \implies \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}$

Data $f \in L^p$ e fissato $\epsilon > 0$ costruisco g tale che:

- $g \in L^\infty$
- $g = 0$ fuori da un certo compatto K
- $\|g - f\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ considero $f_n(x) = X_{B_n(0)}(x) T_n f(x)$ dove

$$T_n r(x) = \begin{cases} r(x) & \text{se } |r(x)| \leq n \\ \dfrac{n r(x)}{|r(x)|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora notiamo che

- $f_n \in L^\infty \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- $f_n = 0$ fuori da $B_n(0)$

Iinoltre $f_n \to f$ in L^p perchè $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ quindi la tesi segue per la convergenza dominata. Allora vale anche che $\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ n \geq \bar{n} \quad \|f_n - f\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Chiamo quindi $g = f_{\bar{n}}$. Notiamo che $g \in L^1$ quindi fissato $\delta > 0\ \exists\ g_1 \in C_C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|g - g_1\|_{L^1} \leq \delta$. Posso inoltre supporre che $g_1 = T_{\bar{n}} g_1$ ($\implies \|g_1\|_{L^\infty} = \bar{n}$). Allora $\|f - g_1\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p} + \|g - g_1\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2} + \|g - g_1\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|g - g_1\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}$. Notiamo ora che $\|g - g_1\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty} + \|g_1\|_{L^\infty} \leq 2\bar{n}$. A questo punto scelgo $\delta > 0$ in modo tale che $\delta^{\frac{1}{p}} (2\bar{n})^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2}$ e ho $\|f - g_1\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2} + \delta^{\frac{1}{p}} (2\bar{n})^{1-\frac{1}{p}} \leq \epsilon$. ■

Osservazione 11.10. In generale si può mostrare che vale la stessa cosa per $C_C(\Omega)$ qualunque sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile.

Osservazione 11.11. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\|f_n\|_{L^\infty} \leq C$ uniformemente in n e $f_n \to f$ in $L^1 \implies f_n \to f$ in $L^p\ \forall\ p \in [0, +\infty]$ per quanto visto nella dimostrazione.

12 Spazi di Hilbert

In questa sezione verranno sempre considerati spazi vettoriali X su $\mathbb{C}$.

Definizione 12.1 (Prodotto scalare o interno)**.** *X spazio vettoriale complesso. $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ si dice prodotto scalare (o interno) se valgono le seguenti proprietà:*

1. $(x, x) \geq 0 \quad \forall\ x \in X$
2. $(x, x) = 0 \iff x = 0 \quad \forall\ x \in X$
3. $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall\ x, y \in X$
4. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) \quad \forall\ x, y, z \in X,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Osservazione 12.1. $(\lambda x, \mu y) = \lambda\overline{\mu}(x, y) \quad \forall\ x, y \in X,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Definizione 12.2 (Spazio pre-Hilbertiano)**.** *La coppia* $(X, (\cdot, \cdot))$ *si dice spazio pre-Hilbertiano.*

Indichiamo con $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. Mostreremo poi che questa definizione è effettivamente la definizione di una norma.

Definizione 12.3 (Ortogonalità)**.** $x, y \in X$ *sono detti ortogonali se* $(x, y) = 0$

Definizione 12.4 (Sistema ortonormale)**.** $\{x_i\} \subseteq X$ *sono detti sistema ortonormale se* $(x_i, y_j) = 0\ \forall\ i \neq j$ *e* $\|x_i\| = 1\ \forall\ i$

Esempio 12.1. Alcuni esempi di spazi pre-Hilbertiani:

- $X := \mathbb{R}^N \quad (x, y) := \sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i$
- $X := \mathbb{C}^N \quad (x, y) := \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$
- $X := C^0([0, 1], \mathbb{C}) \quad (f, g) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx$

Osservazione 12.2. $\|x + y\| = (x+y, x+y) = (x, x)+(x, y)+\overline{(x, y)}+(y, y) = \|x\|^2+2\Re((x, y))+\|y\|^2$ quindi se x e y sono ortogonali allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$

Teorema 12.1 (Teorema di Pitagora)**.** *Sia* $\{x_1, \ldots, x_N\}$ *un sistema ortonormale in* X*. Allora* $\forall\ x \in X$ *si ha che* $\|x\|^2 = \left\| x - \sum\limits_{i=1}^{N}(x, x_i)x_i \right\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{N}|(x, x_i)|^2$

Dimostrazione. Si nota che $x - \sum\limits_{i=1}^{N}(x, x_i)x_i$ e $\sum\limits_{i=1}^{N}(x, x_i)x_i$ sono ortogonali. La dimostrazione segue quindi dall'osservazione. ∎

Corollario 12.1 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Nelle stesse ipotesi del teorema precente si ha che* $\sum\limits_{i=1}^{N}|(x, x_i)|^2 \leq \|x\|^2$

Teorema 12.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Sia* X *uno spazio pre-Hilbertiano. Allora* $\forall\ f, g \in X$ *si ha che* $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$

Dimostrazione. Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C}$ vale che $0 \leq (f+\lambda g, f+\lambda g) = \|f\|^2+2\Re(\overline{\lambda}(f, g))+|\lambda|^2\|g\|^2$ quindi in particolare per $\lambda = \dfrac{(f, g)}{\|g\|^2}$ trovo che $0 \leq \|f\|^2 + \dfrac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2} - 2\dfrac{\overline{(f, g)}(f, g)}{\|g\|^2} = \|f\|^2 - \dfrac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2}$ quindi moltiplicando per $\|g\|^2$ segue la tesi (ovviamente se $g = 0$ la tesi valeva a priori). ∎

Proposizione 12.1. $\|x\|$ *è una norma.*

Dimostrazione. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re((x, y)) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ che è la tesi. ∎

Teorema 12.3 (Identità del parallelogramma). *Sia X uno spazio pre-Hilbertiano. Allora $\forall\ x, y \in X$ si ha che $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$*

Dimostrazione. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) + 2\Re(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2\Re(x,y) + (y,y) = 2\left(\|x\|^2 + \|x\|^2\right)$ ■

Teorema 12.4 (Von-Neumann). *Sia X uno spazio normato tale che $\forall\ x, y \in X$ valga l'identità del parallelogramma. Allora la norma in X è indotta da un prodotto scalare.*

Definizione 12.5 (Spazio di Hilbert). *X pre-Hilbertiano e completo viene detto spazio di Hilbert.*

Esempio 12.2. Alcuni esempi di spazi di Hilbert (o non di Hilbert):

- $C^0([-1,1])$ con la norma dell'esempio precedente non è di Hilbert
- $L^2(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega f\ d\mu < +\infty \right\}$ con $(f,g) := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\ d\mu$ è uno spazio di Hilbert.
- Analogamente anche $L^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) =: l^2$ è di Hilbert.

Teorema 12.5 (Teorema delle proiezioni). *Sia H uno spazio di Hilbert e $\emptyset \neq K \subseteq H$ chiuso e convesso. Allora $\forall\ f \in H\ \exists!\ u \in K$ tale che $\|f-u\| = \inf_{v \in K} \|f-v\|$. ($u$ si dice proiezione di f in K). Inoltre vale che u è la proiezione di f in $K \iff \Re((f-u, v-u)) \leq 0\ \forall\ v \in K$*

Dimostrazione. Mostriamo prima che un tale $u \in K$ esiste. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione tale che, posto $\phi : K \to \mathbb{R}\ v \mapsto \|f-v\|$, $\phi(u_n) \to \inf_{v\in K} \|f-v\| =: d$. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ si ha, per l'identità del parallelogramma, che $\left\|2f - (u_n + u_m)\right\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 = 2(\|f-u_n\|^2 + \|f-u_m\|^2) \implies \left\|f - \left(\frac{u_n+u_m}{2}\right)\right\|^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|f-u_n\|^2 + \|f-u_m\|^2)$. Essendo K convesso si ha che $\frac{u_n+u_m}{2} \in K$ quindi $\left\|f - \left(\frac{u_n+u_m}{2}\right)\right\|^2 \geq d^2 \implies \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}(\|f-u_n\|^2 + \|f-u_m\|^2) - d^2 \to 0$ per $n, m \to +\infty$ quindi u_n è di Cauchy $\implies u_n \to u \in H$ ma siccome K è chiuso deve essere $u \in K$. Siccome ϕ è continua $\phi(u_n) \to \phi(u) = d \implies \|f-u\| = d$.
Mostriamo che se u risolve il problema di minimo allora vale che $\Re((f-u, v-u)) \leq 0\ \forall\ v \in K$. Sia $v \in K,\ t \in [0,1],\ w := (1-t)u + tv$. Siccome K è convesso $w \in K$; inoltre $\|f-u\|^2 \leq \|f-w\|^2 = \left\|(f-u) + t(u-v)\right\|^2 = ((f-u) + t(u-v), (f-u) + t(u-v)) = \|f-u\|^2 + 2t\Re((f-u, u-v)) + t^2\|u-v\|^2 \implies 0 \leq 2t\Re((f-u, u-v)) + t^2\|u-v\|^2 \implies 0 \leq 2\Re((f-u, u-v)) + t\|u-v\|^2$. Facendo tendere $t \to 0^+$ trovo che $\Re((f-u, v-u)) \leq 0$
Ora invece mostriamo che se vale $\Re((f-u, v-u)) \leq 0\ \forall\ v \in K$ allora u risolve il problema di minimo. $\|f-u\|^2 - \|f-v\|^2 = (f-u, f-u) - (f-v, f-v) = (f-u, f-v+v-u) - (f-u+u-v, f-v) = (f-u, f-v) + (f-u, v-u) - (f-u, f-v) - (u-v, f-v) = (f-u, v-u) - \overline{(f-v, u-v)} = (f-u, v-u) - \overline{(f-u+u-v, u-v)} = (f-u, v-u) + \overline{(f-u, v-u)} - \|u-v\| \leq 2\Re((f-u, v-u)) \leq$

$0 \quad \forall\, v \in K$
Mostro ora che u è unica. Dato f supponiamo esistano u_1, u_2 proiezioni di f su K. Allora $\Re((f-u_1, u_2-u_1)) \leq 0$ e $\Re((f-u_2, u_1-u_2)) \leq 0 \implies \Re((f-u_1, u_2-u_1)) + \Re((f-u_2, u_1-u_2)) \leq 0 \implies \Re((f-u_1, u_2-u_1)) - \Re((f-u_2, u_2-u_1)) \leq 0 \implies \Re((u_1-u_2, u_1-U_2)) \leq 0 \implies \|u_1-u_2\| = 0 \implies u_1 = u_2$ ■

Corollario 12.2. *Nelle stesse notazioni del teorema risulta quindi ben definita la mappa* $P_K : H \to K \quad f \mapsto u$

Teorema 12.6. *Nelle stesse ipotesi del teorema delle proiezioni si ha che* $\big\|P_K(f_1) - P_K(f_2)\big\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall\, f_1, f_2 \in H$ *(ovvero* P_K *è 1-Lipschitziana)*

Dimostrazione. $u_1 := P_K(f_1)$, $u_2 := P_K(f_2)$. Allora $\Re((f_1-u_1, u_2-u_1)) + \Re((f_2-u_2, u_1-u_2)) \leq 0 \implies \Re((f_1-u_1, u_2-u_1)) - \Re((f_2-u_2, u_2-u_1)) \leq 0 \implies \Re((f_1-f_2+u2-u_1, u_2-u_1)) \leq 0 \implies \Re((f_1-f_2, u_2-u_1)) + \|u_2-u_1\|^2 \implies \|u_2-u_1\|^2 \leq \Re((f_2-f_1, u_2-u_1)) \leq \|f_2-f_1\|\|u_2-u_1\|$ che è la tesi ■

Teorema 12.7 (Teorema di proiezione su un sottospazio)**.** *H spazio di Hilbert, $M \subseteq H$ sottospazio chiuso. Allora data $f \in H$ $\exists!$ $u \in M$ tale che* $(f-u, v) = 0 \quad \forall\, v \in M$

Dimostrazione. Mostro che l'u cercato è $u := P_M(f)$. Ovviamente $u \in M$. Inoltre $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\|f-u\|^2 \leq \big\|f-(u+tv)\big\|^2 = \|f-u\|^2 + t^2\|v\|^2 - 2t\Re((f-u, v))$. Allora $0 \leq t^2\|v\|^2 - 2t\Re((f-u, v)) \implies 2\Re((f-u, v)) \leq \|v\|^2 t \implies \Re((f-u, v)) = 0$ (perchè t è arbitrario). Ripetendo lo stesso argomento con $u + itv$ trovo che anche $\Im((f-u, v)) = 0$ ■

Definizione 12.6 (Insieme ortogonale)**.** *Sia H spazio di Hilbert e $M \subseteq H$ sottospazio chiuso. Chiamo ortogonale di M l'insieme* $M^\perp := \{f \in H \mid (f, v) = 0\ \forall\, v \in H\}$

Proposizione 12.2. *$M^\perp$ è un sottospazio chiuso.*

Dimostrazione. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\, f, g \in H$ $\alpha f + \beta g \in M^\perp$. Infatti $(\alpha f + \beta g, v) = \alpha(f, v) + \beta(g, v) = 0 \quad \forall\, v \in H$. Sia ora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M^\perp$ tale che $f_n \to f$ in H. Siccome $(f, v) = (f-f_n, v) + (f_n, v)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}(f-f_n, v) = 0$ (perchè $|(f-f_n, v)| \leq \|f-f_n\|\|v\|$) allora $(f, v) = 0 \implies f \in M^\perp$ ■

Teorema 12.8 (Teorema di decomposizione ortogonale)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert, $M \subseteq H$ sottospazio chiuso. Allora ogni $f \in H$ si decompone in modo unico come $f = u + w$ con $u \in M$, $w \in M^\perp$*

Dimostrazione. Prendo $u \in M$ data da $u := P_M(f)$. Basta mostrare che $w := f - u \in M^\perp$ ma è ovvio perchè $(w, v) = (f-u, v) = 0\ \forall\, v \in M$. Supponiamo ci siano due decomposizioni (u_1, w_1) e (u_2, w_2). Allora $(u_1-u_2) + (w_1-w_2) = 0 \implies u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. Posto $u := u_1 - u_2$ e $w := w_2 - w_1$ ho che $u, w \in M \cap M^\perp \implies u = w = 0$ ■

Teorema 12.9 (Teorema di Riesz). *$\forall\ \phi \in H'$ $\exists!$ $u \in H$ tale che $\phi(v) = (u, v)$ $\quad \forall v \in H$ e $\|u\| = \|\phi\|_{H'}$*

Dimostrazione. Limitiamoci al caso complesso: $M := \phi^{-1}(0) \subseteq H$ è un sottospazio di H chiuso. Se $M = H$ allora $\phi = 0$ quindi scelgo $u = 0$. Se invece $M \neq H$ costruisco $g \in H$ tale che $\|g\| = 1$ e $(g, w) = 0 \quad \forall\ w \in M$. Scelgo $g_0 \in H$ e chiamo $g_1 := P_M(g_0)$. Pongo quindi $g = \dfrac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}$. Infatti $\forall\ w \in M \quad (g, w) = \dfrac{1}{\|g_0 - g_1\|}(g_0 - g_1, w) = 0$. Dico che $\forall\ v \in H$ posso scrivere $v = \lambda g + w$ con $\lambda := \dfrac{\phi(v)}{\phi(g)}$ e $w \in M$. Infatti posto $w := v - \lambda g$ si ha che $\phi(w) = \phi(v) - \lambda\phi(g) = \phi(v) - \phi(v) = 0 \implies w \in M$. Allora $0 = (g, w) = (g, v - \lambda g) = (g, v) - \overline{\lambda} \implies \overline{\lambda} = (g, v) \implies \lambda = (v, g) \implies \phi(v) = \phi(g)(v, g) \implies \phi(v) = (v, \overline{\phi(g)}g)$ quindi pongo $u := \overline{\phi(g)}g$
Supponiamo ora che esistano $u_1, u_2 \in H$ come nella tesi. Allora $\forall\ v \in H \quad (v, u_1) - (v, u_2) = 0 \implies (v, u_1 - u_2) = 0$ quindi scelto $v = u_1 - u_2$ ho che $\|u_1 - u_2\| = 0 \implies u_1 = u_2$
Mostriamo ora che $\|u\| = \|\phi\|_{H'}$. $\|\phi\|_{H'} = \sup\limits_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |\phi(v)| = \sup\limits_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |(v, u)| \leq \|u\|$ per Cauchy-Schwarz. ∎

Corollario 12.3. *Preso $u \in H$ e $\phi_u(v) = (u, v)$ si ha che ϕ_u è lineare su H. Inoltre $|\phi_u(v)| = |(u, v)| \leq \|u\|\|v\| \implies \phi_u$ continuo su H. Quindi $\tau : H \to H' \quad u \mapsto \phi_u$ è un isomorfismo isometrico.*

Osservazione 12.3. Se $H := l^2$ allora $H' = l^2$ e se $H := L^2$ allora $H' = L^2$

13 Serie di Fourier

Proposizione 13.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione ortonormale in H. Allora $\forall\ \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}(\subseteq \mathbb{C}) \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ converge in $H \iff \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ converge*

Dimostrazione. La serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ converge in H se e solo se

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall\ n > \bar{n},\ \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{i=n}^{n+k} c_i e_i \right\|_H^2 \leq \epsilon$$

Notiamo che

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+k} c_i e_i \right\|_H^2 = \left(\sum_{i=n}^{n+k} c_i e_i, \sum_{j=n}^{n+k} c_j e_j \right) = \sum_{i,j=n}^{n+k} c_i \overline{c}_j (e_i, e_j) = \sum_{i=n}^{n+k} c_i \overline{c}_i = \sum_{i=n}^{n+k} |c_i|^2$$

quindi la tesi segue automaticamente. ∎

Definizione 13.1 (Coefficienti e serie di Fourier)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert ed $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione ortonormale. Dato $x \in H$ i valori $\{(x, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dicono coefficienti di Fourier di x rispetto a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ viene detta serie di Fourier di x.*

Osservazione 13.1. Per la proposizione precedente e per la disuguaglianza di Bessel la serie di Fourier converge sempre in H.

Osservazione 13.2. $H_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq H$. La ridotta n-esima della serie di Fuorier di $x \in H$ è la proiezione di x su H_n

Teorema 13.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori ortonormali. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $\operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *è denso in H*

2. *Ogni $x \in H$ è somma della sua serie di Fourier in H*

3. *Vale che* $\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_i)|$ *(Identità di Parseval)*

4. *Se $x \in H$ è tale che $(x, e_n) = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ allora $x = 0$*

Dimostrazione. 1) $\implies$ 2) Per ipotesi dato $x \in H \quad \exists\ \{y_n\}_{n\in H}$ tale che $y_n \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ e $y_n \to x$ in H. Allora $\left\|x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_1)e_i\right\|_H^2 \leq \|x - y_n\|_H^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2) $\implies$ 1) Ovvio
2) $\implies$ 3) $\left\|x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2$ ma $\left\|x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right\|_H^2 \to 0$ quindi segue la tesi.
3) $\implies$ 2) Ovvio
3) $\implies$ 4) Ovvio
4) $\implies$ 2) Per assurdo supponiamo che $x \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$. Allora considero $(x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, e_k) = (x.e_k) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, e_k\right) = (x, e_k) - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)(e_i, e_k) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0 \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
Passando al limite per $n \to \infty$ ho che $x - y = 0 \implies x = y$ ∎

Definizione 13.2 (Successione ortonormale completa)**.** *Una successionei ortonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice completa se vale* 4). $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si dice base di H*

Corollario 13.1. *Se lo spazio di Hilbert H ammette una base allora H è separabile (ammette un sottoinsieme numerabile e denso). (Mi basta scegliere le combinazioni lineari a coefficienti razionali)*

Osservazione 13.3. Se la successione ortonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è completa la serie di Fourier converge alla proiezione di x su $\overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

Osservazione 13.4. Se $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale per H allora $\forall\ x, y \in H$ si ha che $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}$

Teorema 13.2. *Se H è uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita allora H possiede una base ortonormale.*

Dimostrazione. Esiste un sottoinsieme $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ numerabile e denso. A partire da tale sottoinsieme costruiamo una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di vettori linearmente indipendenti. Tale successione è infinita perchè H è di dimensione infinita e inoltre $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ era denso in H. Notiamo che $\text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è denso in H. Con il metodo di Gram-Schmidt costruiamo un sistema ortonormale $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e abbiamo che $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ che è la tesi. ■

Consideriamo ora lo spazio $L^2(-\pi, \pi)$ e come sistena ortonormale l'insieme $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (è facile vedere che queste funzioni sono tutte ortogonali tra loro). Data $f \in L^2(-\pi, \pi)$ i suoi coefficienti di Fourier sono dati dagli integrali $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\ dx =: \hat{f}_k$ e la sua serie quindi da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ dove si intende $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx}$. Queste somme ridotte vengono dette polinomi trigonometrici. Se si considera come campo $\mathbb{R}$ si considera il sistema ortonormale $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Si indicizzano in questo modo:

- $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- $\phi_{2k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$
- $\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$

In modo analogo vengono definiti i coefficienti $\hat{f}_k$. I polinomi trigonometrici sono ora della forma $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

Lemma 13.1. *Esiste una successione $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di polinomi trigonometrici tale che:*

1. $q_n(t) \geq 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)\ dt = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
3. $\forall\ \delta \in (0, \pi)$ *vale che* $\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} q_n(t) \right) = 0$

Dimostrazione. Definiamo $q_n(t) := c_n \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^n$ dove i c_n sono scelti affinchè valga 2) ovvero $\frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^n dt = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Chiaramente deve essere $c_n \leq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ quindi anche

1) risulta ovvia. I q_n sono effettivamente polinomi trigonometrici. Infatti $q_n(t) = \frac{c_n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1 \cdot (\cos t)^k$. Notiamo che $(\cos t)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$ ma anche che $\cos(kt)\cos(t) = \frac{1}{2}(\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t))$ quindi per induzione i q_n sono polinomi trigonometrici. Siccome q_n è pari segue che $1 = \frac{c_n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt \geq \frac{c_n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \sin t\ dt = \frac{-2c_n}{\pi(n+1)}\left[\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{2c_n}{\pi(n+1)} \implies c_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2}$. Ora troviamo che $\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} q_n(t) = c_n\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \leq \frac{\pi(n+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \to 0$ ■

Teorema 13.3 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Allora esiste una successione di polinomi trigonometrici $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che* $\|f-p_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \to 0$

Dimostrazione. Dico che $p_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)q_n(s)\ ds = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\tau)q_n(t-\tau)\ d\tau$ dove q_n è la successione del lemma precedente. Scrivo $q_n = a_0 + \sum_{k=1}^{k_n}[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)]$ per qualche serie di coefficienti $\{a_0,\ldots,a_{k_n}\},\ \{b_1,\ldots,b_{k_n}\}$. Allora troviamo che:

$$p_n(t) - \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ d\tau = \sum_{k=i}^{k_n} a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos(k(t-\tau))\ d\tau + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin(k(t-\tau))\ d\tau$$

Siccome $\cos(k(t-\tau)) = \cos(kt)\cos(k\tau)+\sin(kt)\sin(k\tau)$ e analogamente $\sin(k(t-\tau)) = \sin(kt)\cos(k\tau) - \sin(k\tau)\cos(kt)$ si trova che:

$$\begin{aligned} p_n(t) - \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ d\tau &= \\ = \sum_{k=1}^{k_n}\Bigg\{&\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)(a_k\cos(k\tau) - b_k\sin(k\tau)\ d\tau\cdot\cos(kt) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)(a_k\sin(k\tau) + b_k\cos(k\tau))\ d\tau\cdot\sin(kt)\Bigg\} \end{aligned}$$

e questo mostra che anche $p_n(t)$ è un polinomio trigonometrico. Mostriamo ora la convergenza uniforme. Ricordiamo che $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n(s)\ ds = 1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ e che qualunque funzione 2π-periodica è uniformemente continua ($\forall\,\epsilon>0 \quad \exists\delta>0$ tale che $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ con $|x-y|\leq\delta$ allora $|f(x)-f(y)|\leq\epsilon$) e fissiamo $\epsilon>0$. Per il lemma precedente $\exists\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che $\forall\ n\geq\bar{n}\quad 2\|f\|_\infty \sup_{\delta\leq|s|\leq\pi} q_n(s) \leq \epsilon$

quindi segue che $\forall\ t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t) - p_n(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t-s) q_n(s)\ ds) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t-s)| q_n(s)\ ds =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t) - f(t-s)| q_n(s)\ ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t) - f(t-s)| q_n(s)\ ds \leq$$
$$\epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(s)\ ds + \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_\infty \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} q_n(s) 2\pi \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} q_n(s) \leq 2\epsilon$$

che dimostra l'uniforme convergenza. ■

Teorema 13.4. *La successione $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(-\pi, \pi)$*

Dimostrazione. Mostriamo il teorema facendo vedere che i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(-\pi, \pi)$. Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Siccome $C_C^0(-\pi, \pi)$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$ $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ u \in C_C^0(-\pi, \pi)$ tale che $\|f - u\|_2 \leq \epsilon$. Fissato $\epsilon > 0$ posso quindi estendere per periodicità u su tutto $\mathbb{R}$ perchè $u(-\pi) = u(\pi) = 0$. Allora grazie al teorema di Weierstrass $\exists\ p$ polinomio trignometrico tale che $\|u - p\|_\infty \leq \epsilon$. Siccome:

$$\|u - p\|_2 = \left[\int_{(-\pi,\pi)} |u - p|^2\ d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{(-\pi,\pi)} \|u - p\|_\infty^2\ d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon \left[\int_{-\pi,\pi} 1\ d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi}\epsilon$$

segue facilmente che $\|f - p\|_2 \leq \|f - u\|_2 + \|u - p\|_2 \leq \epsilon + \epsilon\sqrt{2\pi} \leq (1 + \sqrt{2\pi})\epsilon$ e quindi la tesi. ■

Corollario 13.2. *Presa $f \in L^2(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier $\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right]$ con*

- $a_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)\ dx$
- $a_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(x) \cos(kx)\ dx$
- $b_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(x) \sin(kx)\ dx$

converge in $L^2(-\pi, \pi)$ a f ovvero:

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\int_{(-\pi,\pi)} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right] \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Corollario 13.3. *Nelle stesse notazioni precedenti vale l'identità di Parseval:*

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{(-\pi,\pi)} |f(x)|^2\ dx$$

Corollario 13.4. *Valgono i seguenti risultati di simmetria:*

1. f *pari in* $(-\pi, \pi) \implies b_k = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$
2. f *dispari in* $(-\pi, \pi) \implies a_k = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Osservazione 13.5. Tutti i risultati precedenti li posso estendere ad un qualsiasi intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ considerando quindi funzioni $f \in L^2(a, b)$ di periodo $b - a$. Ovviamente dovranno essere cambiate in accordo anche le funzioni ϕ_k

Teorema 13.5 (Teorema di Stone-Weierstrass)**.** *Data $f \in C^0([a, b])$ esiste sempre una successione di polinomi che converge uniformemente a f in $[a, b]$.*

Cenni di domostrazione. Posso approssimare f con polinomi trigonometrici e poi approssimare questi polinomi con la loro serie di Taylor e questo mi da la tesi. ■

Osservazione 13.6. Siccome la serie di Fourier di f converge a f in $L^2(-\pi, \pi)$ allora esiste un'estratta della successione delle ridotte che converge quasi ovunque a f (Si può addirittura dimostrare che tutta la serie converge quasi ovunque)

Esistono numerosi risultati per gli altri tipi di convergenza. Ne citiamo alcuni:

Teorema 13.6. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e regolare a tratti (esistono al più un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n$ di discontinuità in $[-\pi, \pi]$ e le discontinuità sono di tipo salto per f e f' con f derivabile in ogni intervallo (x_i, x_{i+1})). Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in ogni punto alla funzione $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ dove $f(x^+), f(x^-)$ sono rispettivamente il limite destro e sinistro di f*

Teorema 13.7. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è 2π-periodica, assolutamente continua in $[-\pi, \pi]$ con derivata quasi ovunque $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. La serie di Fourier di f converge uniformemente a f*

Dimostrazione. Indichiamo con a_0, a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f e con a_0', a_k', b_k' i coefficienti di Fourier di f'. Deve necessariamente essere che $f'(x + 2\pi) = f'(x)$ quasi ovunque. Notiamo che:

$$a_0' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0$$
$$a_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[f(x) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \right] = k b_k$$
$$b_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[f(x) \sin(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \right] = -k a_k$$

Consideriamo ora la serie di Fourier della f ovvero $\dfrac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \dfrac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right)$. Mostriamo che la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ converge ($\implies$ la serie di Fourier converge totalmente).

Per l'identità di Parseval $\sum_{k=1}^{n}({a'}_k^2+{b'}_k^2)=\left\|f'\right\|_2^2$ e inoltre per la disuguaglianza di Young $|a_k|+|b_k|=\frac{|b'_k|}{k}+\frac{|a'_k|}{k}\leq\frac{1}{2}|b'_k|^2+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2}|a'_k|^2+\frac{1}{2k^2}=\frac{1}{2}(|a'_k|^2+|b'_k|^2)+\frac{1}{k^2}$ che è il termine generale di una serie convergente. ■

Indice Analitico