I - SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1 - PRELIMINARI

a) La retta reale estesa

Nel seguito utilizzeremo l'insieme $\widetilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. L'insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$ viene di solito chiamato *retta reale estesa*. L'ordinaria relazione di $\leq$ su $\mathbb{R}$ può essere prolungata a $\widetilde{\mathbb{R}}$ ponendo

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad , \quad \forall x \in \widetilde{\mathbb{R}}\,.$$

Anche le ordinarie operazioni di somma e prodotto possono essere prlungate a $\widetilde{\mathbb{R}}$ con le posizioni

$$-\infty + x = -\infty \quad , \quad +\infty + x = +\infty \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$$-\infty\, x = -\infty \quad , \quad +\infty\, x = +\infty \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \text{con } x > 0\,,$$

$$-\infty\, x = +\infty \quad , \quad +\infty\, x = -\infty \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \text{con } x < 0\,,$$

lasciando *indeterminate* le espressioni del tipo $+\infty + (-\infty)$, $\pm\infty\, 0$.

Si verifica immediatamente che in $\widetilde{\mathbb{R}}$ vale l'Assioma dell'estremo superiore nella forma seguente: ogni insieme $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ ammette estremo superiore in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Con ciò si intende che il minimo dei maggioranti di A in $\widetilde{\mathbb{R}}$ è dato da $-\infty$ se $A = \emptyset$, da $+\infty$ se A non è limitato superiormente ed è dato dall'ordinari $\sup(A)$ nei casi rimanenti. ∎

b) Famiglie notevoli di funzioni

Dati $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ con $a \leq b$, qui e nel seguito indicheremo con (a, b) l'intervallo della retta reale i cui estremi sono a, b, senza precisare se tale intervallo è chiuso, aperto o semi-aperto. Utilizzeremo la notazione più precisa ($[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$) solo quando ne avremo bisogno.

Data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diremo che f è di classe C^0 su (a, b) (o, più brevemente, $f \in C^0$ su (a, b)) se è continua in ogni punto di (a, b). Diremo che $f \in C^0((a, b))$ se f è continua e limitata su (a, b).

Analogamente, data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, diremo che f è di classe C^k su (a, b) (o, più brevemente, $f \in C^k$ su (a, b)) se f ammette tutte le derivate continue fino all'ordine k. Diremo invece che $f \in C^k((a, b))$ se f è di classe C^k su (a, b) e tutte le derivate fino all'ordine k sono limitate su (a, b).

Infine, data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, diremo che f è di classe C^∞ su (a, b) (o, più brevemente, $f \in C^\infty$ su (a, b)) se f ammette tutte le derivate continue (di qualunque ordine) fino all'ordine k. Tali funzioni vengono anche dette *indefinitamente differenziabili.* ∎

Nel presente capitolo studieremo il concetto di convergenza di una successione (o di una serie) di funzioni. Le nozioni introdotte estenderanno la nozione (già nota) di convergenza di una successione (o di una serie) di numeri reali.

2 - CONVERGENZA DELLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

a) Definizione e prime proprietà

Introduciamo due elementari definizioni di convergenza di successioni di funzioni (estensioni ulteriori di tali concetti verrano date nei prossimi capitoli).

2.1 **Definizione.** Sia A un arbitrario insieme non vuoto e $f_n : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni. Sia inoltre $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dice che

i) la successione f_n *converge puntualmente* alla funzione f, se

$$\forall x \in A \quad , \quad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \, ; \tag{2.1}$$

ii) la successione f_n *converge uniformemente* alla funzione f, se

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \, , \, x \in A\} = 0 \, . \blacksquare \tag{2.2}$$

È facile verificare che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, in quanto se è verificata l'ipotesi (2.2), si ha in particolare che, per ogni $x \in A$, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Più avanti constateremo che la convergenza puntuale non implica la convergenza uniforme.

2.2 **Osservazione.** Le Definizioni (2.1) e (2.2) possono essere equivalentemente espresse (semplicemente ricordando le definizioni esplicite di lim e di sup) dalle seguenti scritture:

$$\forall x \in A \, , \forall \varepsilon > 0 \, , \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \in \mathbb{N} \text{ si ha che } (n > \overline{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad \text{(conv.puntuale)} \tag{2.3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \in \mathbb{N} \, , \forall x \in A \text{ si ha che } (n > \overline{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad \text{(conv.uniforme)} \tag{2.4}$$

Si ha dunque che le due definizioni differiscono solamente per il fatto che i due quantificatori $\forall x \in A$ e $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ sono stati invertiti. Nella definizione di convergenza puntuale compare prima il quantificatore $\forall x \in A$ e successivamente il quantificatore $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$. Nella definizione di convergenza uniforme i due quantificatori compaiono in ordine invertito.

Sfruttando queste considerazioni si può facilmente ancora verificare che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

La situazione qui descritta è analoga a quella che si trova confrontando le nozioni di continuità puntuale e continuità uniforme. ∎

2.3 **Osservazione.** Nel seguito, la relazione (2.3) sarà spesso espressa, più sinteticamente, nel modo seguente:

$$\forall x \in A\,,\, \forall \varepsilon > 0\,, \quad \text{si ha che } \ |f_n(x) - f(x)| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon\,,$$

dove l'espressione $\overset{\mathrm{d}}{<}$ signica che il $<$ è verificato *definitivamente*, cioè da un certo indice in poi. Analogamente la relazione (2.4) sarà spesso espressa nel modo seguente:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \text{si ha che } \ |f_n(x) - f(x)| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon \ \ , \text{ uniformemente rispetto a } x\,,$$

in cui la relazione $<$ è valida definitivamente e uniformemente rispetto a x, cioè da un certo indice in poi, che è uniforme rispetto a x, cioè indipendente da x. ∎

2.4 **Osservazione.** La convergenza uniforme ammette una specie di interpretazione geometrica. Dati $A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, chiameremo "budello" di centro il grafico di f e ampiezza ε il seguente insieme

$$\beta(f, \varepsilon) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \,:\, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}\,.$$

Il fatto che una successione $f_n : A \to \mathbb{R}$ converga uniformemente a $f : A \to \mathbb{R}$, significa che fissato $\varepsilon > 0$ si ha che (definitivamente rispetto a $n \in \mathbb{N}$) il grafico delle funzioni f_n è contenuto nel "budello" di centro il grafico di f e ampiezza ε. ∎

2.5 **Osservazione.** Sia la convergenza puntuale che quella uniforme possono essere caratterizzate mediante il comportamento di opportune successioni di Cauchy.

Si verifica facilmente infatti che $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge puntualmente se e solo se per ogni $x \in A$ la successione reale $f_n(x)$ è di Cauchy su $\mathbb{R}$. In simboli l'ultima condizione si può scrivere

$$\forall x \in A\,,\, \forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che} : \forall n, m \in \mathbb{N}\ (n, m > \overline{n} \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)\,. \tag{2.5}$$

Si verifica anche che $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che} : \forall n, m \in \mathbb{N}\,,\, \forall x \in A\ (n, m > \overline{n}\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)\,. \tag{2.6}$$

Notare che le relazioni (2.5) e (2.6) differiscono soltamto per l'inversione di due quantificatori.

Per completezza, verifichiamo che la convergenza uniforme è equivalente alla condizione (2.6).

Verifichiamo che la condizione è necessaria. L'ipotesi (la convergenza uniforme) ci dice che esiste $f : A \to \mathbb{R}$ in modo tale che, dato $\varepsilon > 0$, si può determinare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ in modo tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \ \text{ uniformemente rispetto a } \ x \in A\,.$$

Se ora prendiamo $n, m > \overline{n}$, si ha che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ uniformemente rispetto a } \ x \in A\,,$$

da cui si ricava la condizione (2.6).

Verifichiamo anche che la condizione è sufficiente. Si ha intanto che esiste $f : A \to \mathbb{R}$ in modo tale che $f_n \to f$ puntualmente. Si ha inoltre che (passando al limite per $n \to \infty$)

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che} : \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\ (n, m > \overline{n}\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,,$$

che coincide con la nozione di convergenza uniforme secondo la formulazione introdotta nell'Osservazione 2.2. ∎

Controlliamo con alcuni contro-esempi che la convergenza puntuale non implica la convergenza uniforme.

2.6 **Esempio.** Data la successione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f_n(x) = x^n \quad , \quad x \in [0,1]\,,$$

è facile verificare che f_n converge puntualmente (ma non uniformemente) alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \in [0,1[, \\ 1, & \text{se } \ x = 1. \end{cases}$$ ∎

2.7 **Esempio.** Consideriamo ora la seguente successione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } \ x \in [2n\pi, 2(n+1)\pi], \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

è facile verificare che tale successione di funzioni converge puntualmente (ma non uniformemente) alla funzione identicamente nulla. ∎

2.8 **Esempio.** Un altro esempio si può costruire nel modo seguente: sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{se } \ x \in [0, 1/n[, \\ 2 - nx, & \text{se } \ x \in]1/n, 2/n[, \\ 0, & \text{se } \ x \in [2/n, 1]. \end{cases}$$

Anche in questo caso si ha che tale successione di funzioni converge puntualmente (ma non uniformemente) alla funzione identicamente nulla. ∎

b) Proprietà della convergenza uniforme

La convergenza uniforme ha preziose caratteristiche di conservazione della regolarità della funzione limite che ora descriveremo. Incominciamo con il seguente risultato:

2.9 **Teorema di conservazione della continuità.** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se le funzioni f_n sono continue su A e se le funzioni f_n convergono uniformemente alla funzione f, allora anche la funzione f è continua su A.

Dimostrazione: Per semplicità consideremo solo il caso in cui $N = 1$. Dimostreremo che la funzione f è continua in ogni punto $x_0 \in A$ fissato in modo arbitrario. Per ogni $x \in A$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \,. \tag{2.7}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, grazie alla convergenza uniforme, si ha che esiste un indice m sufficientemente grande in modo tale che:

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in A \quad ; \quad |f_m(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \,.$$

Fissato tale indice m per cui valgono tali relazioni e grazie al fatto che la funzione f_m è continua, scegliamo un $\delta > 0$ in modo tale che:

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in A \cap B(x_0, \delta) \,.$$

Grazie alla (2.7) con $n = m$, si ha allora, per tutti gli $x \in A \cap B(x_0, \delta)$, che $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$, che implica la continuità di f nel punto x_0, cioè l'asserto. ∎

2.10 **Osservazione.** Notiamo che la convergenza puntuale non è sufficiente a conservare la continuità, come si può controllare con l'Esempio 2.6. ∎

2.11 **Osservazione.** Il fatto che, sotto le ipotesi del Teorema 2.9, si abbia che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \,,$$

per ogni $x_0 \in X$, può essere interpretato anche nel modo seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \,, \tag{2.8}$$

cioè che si possono scambiare fra loro due complicate operazioni di limite. ∎

Vediamo un'altro risultato di questo tipo, che si dimostra con tecniche simili a quelle sopra utilizzate:

2.12 **Proposizione.** Dato $A \subset \mathbb{R}$, supponiamo che $x_0 \in X$ non sia un punto isolato di A, che $f \,,\, f_n : A \to \mathbb{R}$ e che:
i) $f_n \to f$ uniformemente,
ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista finito $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$,
si ha allora che esiste $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$, esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \,.$$

In altre parole, con le suddette ipotesi, vale ancora una relazione del tipo (2.8). ∎

Un altro importante risultato è dato dal:

2.13 **Teorema di conservazione dell'integrale.** Dati $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) funzioni continue su $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f_n \to f$ uniformemente, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx \,. \tag{2.9}$$

Dimostrazione: Siccome la successione di funzioni continue f_n converge uniformemente alla funzione f, si ricava che f è continua (grazie al Teorema 2.9) e dunque ha senso l'integrale di f su $[a, b]$.

Dato $\varepsilon > 0$, si ha che (definitivamente rispetto a n)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq (b-a)\varepsilon\,,$$

da cui l'asserto. ∎

2.14 **Osservazione.** Il Teorema di conservazione dell'integrale è usualmente considerato un Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (tale fatto è espresso dalla relazione (2.9)). Analogamente alla Osservazione 2.11, esprime il fatto che, grazie alla convergenza uniforme, due operazioni complesse (limite e integrale) possono essere invertite fra loro. ∎

2.15 **Osservazione.** Osserviamo che la convergenza puntuale non è sufficiente per ottenere la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale. come si può verificare esaminando il seguente esempio:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{definita da:} \ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{se} \ \ x \in [0, 1/n[, \\ 2n - n^2 x, & \text{se} \ \ x \in]1/n, 2/n[, \\ 0, & \text{se} \ \ x \in [2/n, 1]. \end{cases}$$

È facile verificare che f_n converge puntualmente (ma non uniformemente) alla funzione f identicamente nulla e che:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1\ , \ \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,. \blacksquare$$

2.16 **Osservazione.** Il Teorema 2.13 rappresenta un risultato di notevole interesse, anche se più avanti sarà generalizzato da molti punti di vista. ∎

Dimostriamo infine il:

2.17 **Teorema di conservazione della derivata.** Sia $]a,b[$ un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ e $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $f_n \in C^1$ su $]a,b[$, che $f_n \to f$ uniformemente su $]a,b[$ e che $f_n' \to g$ uniformemente su $]a,b[$.

Si ha allora che $f \in C^1$ su $]a,b[$ e che

$$f' = g\,. \tag{2.10}$$

Dimostrazione: Osserviamo che f , g sono funzioni continue su $]a,b[$ (essendo limite uniforme di funzioni continue su $]a,b[$).

Fissato $\overline{x} \in]a,b[$, si ha che (grazie alla Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$f_n(x) - f_n(\overline{x}) = \int_{\overline{x}}^x f_n'(s)\,ds\,.$$

Utilizzando le ipotesi di convergenza uniforme (in particolare il Teorema di conservazione dell'integrale) si ricava che:

$$f(x) - f(\overline{x}) = \int_{\overline{x}}^x g(s)\,ds\,.$$

Ricordando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene che f è derivabile su $]a,b[$. Derivando rispetto a x, si ricava infine che

$$f' = g\,,$$

da cui l'asserto. ∎

2.18 **Osservazione.** Il Teorema 2.17 è un risultato di conservazione della continuità della derivata. La relazione (2.10) può infatti anche essere riscritta nel seguente modo:

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,.$$

In tali condizioni si ha dunque che la derivata del limite coincide con il limite della derivata. Il Teorema 2.17 permette così di invertire due operazioni molto complesse. ∎

Con pochissima fatica in più, si può ottenere facilmente ottenere la seguente estensione del precedente risultato

2.19 **Teorema di conservazione della derivata parziale.** Siano dati Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Fissato $k = 1, \ldots, N$, supponiamo che le funzioni f_n siano continue, che esista continua $\partial f_n/\partial x_k$ su tutto Ω, che $f_n \to f$ uniformemente su Ω e che $\partial f_n/\partial x_k \to g$ uniformemente su Ω.

Si ha allora che f è continua, con derivata parziale continua rispetto a x_k, su Ω e che

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = g\,. \blacksquare$$

3 - CONVERGENZA DELLE SERIE DI FUNZIONI

a) Considerazioni preliminari

Introduciamo le seguenti generalizzazioni della nozione di serie numerica:

3.1 **Definizione.** Sia (a,b) un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge *puntualmente* su (a,b) se per ogni $t \in (a,b)$ si ha che la serie (numerica) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ converge. La funzione $S : (a,b) \to \mathbb{R}$ definita da $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ viene chiamata *somma* della serie di funzioni. ∎

3.2 **Definizione.** Sia (a,b) un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge *assolutamente* su (a,b), se per ogni $t \in (a,b)$ si ha che la serie (numerica) $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|$ converge. ∎

3.3 **Osservazione.** Nella precedente Definizione 3.1, il fatto che fissato $t \in (a,b)$, si pretenda che la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ converga verso la somma $S(t)$, significa ovviamente che la successione numerica delle somme parziali $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$ ammette limite finito per $n \to \infty$ e che tale limite è $S(t)$.

Un'analoga precisazione si deve fare per quanto riguarda la Definizione 3.2. ∎

Grazie a un noto risultato della Teoria delle serie numeriche, si ha ovviamente che la convergenza assoluta implica la convergenza puntuale (non vale, però, l'implicazione inversa).

Le precedenti Definizioni sono ovviamente di carattere puntuale. Nel seguito avremo anche bisogno di nozioni più complesse:

3.4 **Definizione.** Sia (a,b) un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge *uniformemente* su (a,b) alla funzione $S : (a,b) \to \mathbb{R}$, se le somme parziali $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$ convergono uniformemente alla funzione S su (a,b). ∎

Ovviamente la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Si ha anche che la convergenza uniforme non implica la convergenza assoluta come risulta dal seguente

3.5 **Esempio.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, sia $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ definita da

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \; , \; t \in (a,b) \, .$$

Si ha ovviamente che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, ma non assolutamente. ∎

Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ funzione limitata, poniamo

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \, , \, t \in (a,b)\} \, .$$

3.6 **Definizione.** Sia (a,b) un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una successione di funzioni limitate. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge *totalmente* su (a,b) se è convergente la serie numerica a termini non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| \, . \blacksquare$$

3.7 **Osservazione.** Fissato $t \in (a,b)$, indichiamo con $s_n(t)$, la successione delle somme parziali associate alla serie numerica delle $f_n(t)$. Poniamo cioè

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_n(t) \; , \; t \in A \, .$$

Si ha allora che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente se e solo se:

$$\forall t \in (a,b) \, , \text{ si ha che } \; s_n(t) \text{ è una successione di Cauchy} \, ,$$

o anche

$$\forall t \in (a,b) \, , \forall \varepsilon > 0 \, , \, |s_n(t) - s_m(t)| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon \, , \tag{3.1}$$

dove la notazione $\overset{\mathrm{d}}{<}$ significa che la maggiorazione deve essere valida *definitivamente*, cioè da un certo indice in poi.

Analogamente, fissato $t \in (a,b)$, indichiamo con $\widetilde{s}_n(t)$, la successione delle somme parziali associate alla serie numerica delle $|f_n(t)|$. Poniamo cioè

$$\widetilde{s}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} |f_n(t)| \; , \; t \in A \, .$$

Si ha allora che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge assolutamente se e solo se:

$$\forall t \in (a,b)\,,\, \forall \varepsilon > 0\,,\, |\widetilde{s}_n(t) - \widetilde{s}_m(t)| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon\,. \tag{3.2}$$

Se indichiamo con

$$\widehat{s}_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_n\|\,,$$

si ha allora che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, |\widehat{s}_n - \widehat{s}_m| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon\,. \tag{3.3}$$

Si ha infine che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, |s_n(t) - s_m(t)| \overset{\mathrm{d}}{<} \varepsilon \quad , \quad \text{uniformemente rispetto a } t \in (a,b)\,. \tag{3.4}$$

Osservare che le condizioni (3.1) e (3.4) differiscono, come prevedibile per uno scambio dei quantificatori. ∎

3.8 **Teorema.** Sia (a,b) un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una successione di funzioni limitate. Se la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su (a,b), allora si ha che converge assolutamente e uniformemente (e dunque puntualmente); si ha inoltre che la somma della serie S è una funzione limitata e che

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|\,. \blacksquare \tag{3.5}$$

Dimostrazione: Con le notazioni dell'Osservazione 3.7, è immediato verificare che

$$|s_n(t)| \leq \widetilde{s}_n(t) \leq |\widehat{s}_n| \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\, \forall t \in (a,b)\,. \tag{3.6}$$

$$|s_n(t) - s_m(t)| \leq |\widetilde{s}_n(t) - \widetilde{s}_m(t)| \leq |\widehat{s}_n - \widehat{s}_m| \quad , \quad \forall n,m \in \mathbb{N}\,,\, \forall t \in (a,b)\,. \tag{3.7}$$

Ricordando le considerazioni dell'Osservazione 3.7, grazie all'ipotesi della convergenza totale e alla maggiorazione (3.7), segue che sono verificate le relazioni (3.3) e (3.4) e dunque abbiamo provato la convergenza assoluta e uniforme.

Infine, passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione (3.6), si ottiene facilmente la stima (3.5). ∎

3.9 **Osservazione.** Il Teorema 3.8 è interessante in quanto riconduce il problema della convergenza (puntuale, assoluta e uniforme) di una serie a quello della convergenza di una serie numerica a termini non negativi. ∎

Conseguenza immediata del Teorema 3.8 e del criterio del confronto fra serie numeriche a termini non negativi, è il seguente:

3.10 **Teorema - (Criterio di Weierstrass).** Sia data una successione $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$. Se esiste una successione a_n di numeri reali tale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty ,$$

$$|f_n(t)| \leq a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall t \in (a,b) ,$$

allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su (a,b) e, dunque, uniformemente e assolutamente su (a,b).

Dimostrazione: Si ha infatti che

$$\|f_n\| = \sup\{|f_n(t)| \, , \, t \in (a,b)\} \leq a_n ,$$

da cui, per il criterio del confronto per serie numeriche, si ricava la convergenza totale su (a,b). ∎

3.11 **Osservazione.** Il Criterio di Weierstrass significa dunque che, se il termine generale della serie $f_n(t)$ è maggiorato (in valore assoluto e uniformemente rispetto a $t \in (a,b)$) dal termine generale di una serie numerica convergente, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su (a,b) e, dunque, uniformemente e assolutamente su $]a,b[$.

Il Criterio di Weierstrass è utile in molte situazioni concrete. Se, ad esempio, dobbiamo studiare la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+nt} e^{-n} \quad , \quad t \in [0,\infty[,$$

osservando che il termine generale di tale serie è maggiorato (indipendentemente da t) dal termine e^{-n}, si ricava che tale serie di funzioni converge uniformemente nell'intervallo $[0,\infty[$. ∎

Se traduciamo nel linguaggio delle serie i risultati relativi alla convergenza uniforme delle successioni di funzioni, si ottengono i seguenti importanti risultati:

3.12 **Teorema.** Data la successione di funzioni continue $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente alla funzione $S :]a,b[\to \mathbb{R}$, allora la funzione S è continua. ∎

3.13 **Teorema - (Teorema di integrazione per serie).** Data la successione di funzioni continue $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente alla funzione $S : [a,b] \to \mathbb{R}$, allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b S(t)\, dt \, . \blacksquare$$

3.14 **Teorema - (Teorema di derivazione per serie).** Data la successione di funzioni di classe C^1 $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente alla funzione $S :]a,b[\to \mathbb{R}$ e se la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente alla funzione $W :]a,b[\to \mathbb{R}$, allora S è di classe C^1 su $]a,b[$ e $W = S'$, cioè a dire:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right)' = S'(t) \quad , \quad \forall t \in]a,b[\, . \blacksquare$$

3.15 **Osservazione.** Ovviamente, anche i precedenti teoremi ammettono una interpretazione come risultati che permettono l'inversione di operazioni molto complesse. ∎

4 - SERIE DI POTENZE.

a) Aspetti preliminari

Nella precedente Sezione abbiamo visto le proprietà più importanti relative alle generiche serie di funzioni. Per avere ulteriori proprietà significative è necessario prendere in considerazione serie di funzioni particolari.

Sia $a_n \in \mathbb{R}$ una successione assegnata e $x_0 \in \mathbb{R}$. La serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.1}$$

viene chiamata *serie di potenze* con *centro* il punto x_0. Nella presente sezione studieremo il comportamento di tali serie di funzioni per approfondirne alcune fondamentali tematiche: caratterizzazione dell'insieme di convergenza, la regolarità della funzione somma, la rappresentabilità di funzioni generiche mediante serie di potenze,. . . .

Mediante una traslazione, si può ridurre lo studio della serie di potenze (4.1) a una una nuova serie di potenze con centro il punto 0: nel seguito ci limiteremo dunque solo allo studio delle serie di potenze con centro 0, cioè del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{4.2}$$

4.1 **Osservazione.** Notare che la nozione di serie di potenze è una estensione del concetto di polinomio. ∎

b) Massimo e minimo limite

Data una successione $\lambda_n \in \mathbb{R}$, l'estremo inferiore $L \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ della famiglia dei maggioranti definitivi della successione si dice il *massimo limite* di λ_n quando $n \to \infty$ (si scrive $\max\lim_{n\to\infty} \lambda_n = L$).

Proviamo a dare una definizione più esplicita della nozione di massimo limite. Se la successione λ_n è non limitata superiormente (in $\mathbb{R}$) si ha che $\max\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Nel caso in cui $L \in \mathbb{R}$, se $L = \max\lim_{n\to\infty} \lambda_n$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $L + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo per la successione, mentre $L - \varepsilon$ non lo è. Se esprimiamo queste considerazioni in simboli si ha che devono essere verificate le due condizioni (che complessivamente costituiscono una nuova definizione del massimo limite nel caso in cui $L \in \mathbb{R}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \; (n > \bar{n} \Rightarrow \lambda_n < L + \varepsilon) \,, \tag{4.3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \forall \bar{n} \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : (n > \bar{n} \;\text{ e }\; \lambda_n > L - \varepsilon) \,. \tag{4.4}$$

Procedendo in modo analogo, data una successione $\lambda_n \in \mathbb{R}$, l'estremo superiore $L \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ della famiglia dei minoranti definitivi della successione si dice il *minimo limite* di λ_n quando $n \to \infty$ (si scrive $\min\lim_{n\to\infty} \lambda_n = L$).

Ovviamente il massimo e minimo limite esistono sempre (al contrario dell'usuale limite) e si ha che

$$\min_{n\to\infty}\lim \lambda_n \le \max_{n\to\infty}\lim \lambda_n ,$$

$$\max_{n\to\infty}\lim(-\lambda_n) = -\min_{n\to\infty}\lim \lambda_n .$$

Vediamo ora alcune ulteriori proprietà di massimo e minimo limite.

Si può intanto caratterizzare l'esistenza del limite mediante il massimo e minimo limite.

4.2 **Proposizione.** Data una successione $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $\exists \lim_{n\to\infty} \lambda_n = L$ se e solo se

$$\min_{n\to\infty}\lim \lambda_n = L = \max_{n\to\infty}\lim \lambda_n . \blacksquare$$

Non è vero in generale che il il massimo (o il minimo) limite di una somma (o un prodotto) di successioni è uguale alla somma (o al prodotto) dei massimi (o dei minimi) limite. Valgono però i seguente risultati:

4.3 **Proposizione.** Date due successioni λ_n , $\eta_n \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\max_{n\to\infty}\lim(\lambda_n + \eta_n) \le \max_{n\to\infty}\lim \lambda_n + \max_{n\to\infty}\lim \eta_n ,$$

Se esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$, allora la precedente disuguaglianza diventa una uguaglianza. $\blacksquare$

4.4 **Proposizione.** Date due successioni λ_n , $\eta_n \in \mathbb{R}$, se esiste finito e positivo il $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$, segue che

$$\max_{n\to\infty}\lim(\lambda_n \eta_n) = (\max_{n\to\infty}\lim \lambda_n)\,(\max_{n\to\infty}\lim \eta_n) . \blacksquare$$

Un'ulteriore definizione di massimo limite è contenuta nel seguente:

4.5 **Esercizio.** Data una successione $\lambda_n \in \mathbb{R}$, dimostrare che

$$\max_{n\to\infty}\lim \lambda_n = \inf\{\sup\{\lambda_n\, ,\, n > k\}\, ,\, k \in \mathbb{N}\} = \lim_{k\to\infty}\{\sup\{\lambda_n\, ,\, n > k\}\, ,\, k \in \mathbb{N}\} . \blacksquare$$

c) Il Teorema della convergenza

Data la serie di potenze (4.2), indichiamo con $\mathcal{C}$ l'insieme su cui essa converge puntualmente, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ converga. È immediato provare che $\mathcal{C}$ non è mai vuoto in quanto $0 \in \mathcal{C}$.

4.6 **Osservazione.** L'insieme di convergenza può effettivamente ridursi a $\{0\}$. Se consideriamo infatti la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ si verifica immediatamente che (per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$) tale serie è non convergente in quanto il termine generale non è infinitesimo.

L'insieme di convergenza può anche essere dato da tutto $\mathbb{R}$, come nel caso della serie *esponenziale* $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)x^n$ (è ben noto che che tale serie è convergente su tutto $\mathbb{R}$ e che la somma di tale serie è data da e^x).

Se consideriamo infine la cosiddetta serie *geometrica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, è ben noto che l'insieme di convergenza è dato dall'intervallo $]-1,1[$ e che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ per ogni $x \in]-1,1[$. ∎

Il seguente risultato riassume le proprietà più importanti dell'insieme di convergenza $\mathcal{C}$:

4.7 **Definizione.** Data la serie di potenze (4.2), poniamo

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{4.5}$$

Viene allora chiamato *raggio di convergenza* della serie il reciproco (generalizzato) del numero L, cioè il numero:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \text{se } L \in]0,+\infty[, \\ +\infty, & \text{se } L = 0, \\ 0, & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$ ∎

La precedente Definizione 4.7 è giustificata dal seguente:

4.8 **Teorema.** Se R e $\mathcal{C}$ sono (rispettivamente) il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze (4.2), si ha allora che:

i) $]-R,R[\subset \mathcal{C} \subset [-R,R]$,

ii) se $0 < r < R$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge totalmente su $[-r,r]$ e, dunque, uniformemente e assolutamente in $[-r,r]$.

iii) nell'intervallo $]-R,R[$ la convergenza della serie di potenze è assoluta.

Dimostrazione: Supponiamo che il valore definito in (4.5) sia reale e strettamente positivo. Fissiamo inoltre $\varepsilon > 0$. Grazie alla caratterizzazione del massimo limite espressa nelle relazioni (4.3) e (4.4), si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}(n > \bar{n} \Rightarrow\ \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon)\,, \tag{4.6}$$

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} :\ \exists n \in \mathbb{N} : (n > \bar{n}\ \text{ e }\ \sqrt[n]{|a_n|} > L - \varepsilon)\,. \tag{4.7}$$

Proviamo intanto la asserzione ii). Grazie alla (4.6), si ha (definitivamente) che $|a_n| \le (L+\varepsilon)^n$, da cui (se $r \in]0,R[$):

$$|a_n\, x^n| = |a_n|\,|x^n| \le (L+\varepsilon)^n\, r^n = [(L+\varepsilon)\, r]^n\ ,\ \forall x \in]-r,r[\quad \text{(definitivamente)}\,. \tag{4.8}$$

Siccome $0 < r < R = 1/L$, si ha che $Lr < 1$. Esiste allora $\varepsilon > 0$ (sufficientemente piccolo) tale che $(L+\varepsilon)\, r < 1$. Per il Criterio di Weierstrass e utilizzando la relazione (4.8), si ha che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ su $]-r,r[$ (avendo il termine generale maggiorato dal termine generale della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} [(L+\varepsilon)\, r]^n$, di ragione minore di 1) converge totalmente su $[-r,r]$ e, dunque, uniformemente e assolutamente sull'intervallo $[-r,r]$. Ciò dimostra la parte ii) del Teorema.

Data l'arbitrarietà di $r \in]0,R[$, la asserzione iii) e l'inclusione $]-R,R[\subset \mathcal{C}$ sono conseguenza ovvia della ii).

Completiamo la dimostrazione della i). Grazie alla (4.7), per infiniti valori di n, si ha che $|a_n| \ge (L-\varepsilon)^n$ $(0 < \varepsilon < L)$, da cui:

$$|a_n\, x|^n = |a_n|\,|x|^n \ge (L-\varepsilon)^n |x|^n = [(L-\varepsilon)|x|]^n\ \ ,\ \ x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.9}$$

Se $|x| > R = 1/L$, esiste $\varepsilon \in]0, L[$ tale che $|x|(L - \varepsilon) > 1$. Utilizzando la relazione (4.9), si ottiene che il termine generale della serie (4.2) non tende a zero. Anche l'inclusione $\mathcal{C} \subset [-R, R]$ è dunque dimostrata. Segue la asserzione i).

I casi in cui $L = 0$ oppure $L = +\infty$ si trattano in modo simile. ∎

4.9 **Osservazione.** La parte *ii*) del precedente Teorema ci dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente su ogni sotto-insieme la cui chiusura sia un compatto contenuto in $]-R, R[$. ∎

4.10 **Osservazione.** Il Teorema appena provato ci dice che l'insieme di convergenza contiene l'intervallo aperto $]-R, R[$ ed è contenuto nell'intervallo chiuso $[-R, R]$, ma non dice alcunché sul comportamento della serie (4.2) sui punti di frontiera $-R$, R. La sola informazione del raggio di convergenza R della serie non può dare risultati più precisi.

Se consideriamo infatti la serie *geometrica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si ha che $R = 1$, ma si ha $\mathcal{C} =]-1, 1[$.

Considerandone la serie (delle primitive formali) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1)$, si ha ancora che $R = 1$, ma $\mathcal{C} = [-1, 1[$.

Considerando la serie (delle primitive formali) della serie precedente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

si ha ancora che $R = 1$, ma $\mathcal{C} = [-1, 1]$. ∎

d) Il Teorema della regolarità della somma

Il seguente risultato dà alcune informazioni relative alla regolarità della somma di una serie di potenze:

4.11 **Teorema.** Data la serie di potenze (4.2), sia R il suo raggio di convergenza. Si ha allora che la funzione:

$$f :]-R, R[\to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

è indefinitamente differenziabile su $]-R, R[$. Si ha inoltre ($k \in \mathbb{N}$):

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}, \quad \forall x \in]-R, R[, \tag{4.10}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \tag{4.11}$$

cioè lo sviluppo in serie di potenze di f coincide con la sua serie di Taylor.

Dimostrazione: Dimostriamo intanto che $f \in C^0$ su $]-R, R[$. Se $0 < r < R$, grazie al Teorema della Conservazione della continuità, la serie di potenze (4.2) converge uniformemente in $]-r, r[$. Utilizzando poi il Teorema 3.12, si ha che $f \in C^0(]-r, r[)$ (per ogni $0 < r < R$) e dunque $f \in C^0$ su $]-R, R[$.

Dimostriamo ora che $f \in C^1$ su $]-R, R[$ e che f' può essere rappresentato dalla (4.10) (con $k = 1$). Consideriamo la cosiddetta *serie derivata* della serie (4.2) (che non è altro che la serie delle derivate)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,. \tag{4.12}$$

Tale serie coincide con la serie (4.10) (nel caso $k = 1$). Tale nuova serie è ancora una serie di potenze il cui insieme di convergenza coincide con quello della seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,. \tag{4.13}$$

Il raggio di convergenza di quest'ultima serie è dato (grazie al Teorema 4.8) dal reciproco generalizzato del numero:

$$L' = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, utilizzando la Proposizione 4.4) si ricava che il raggio di convergenza della serie (4.13) (e dunque della serie (4.12)) coincide allora con il raggio di convergenza R della serie di partenza. Grazie al Teorema 4.8, sia la serie di partenza che la serie derivata convergono uniformente in ogni intervallo $]-r, r[$ con $0 < r < R$. Utilizzando il Teorema di derivazione per serie si ottiene che $f \in C^1$ su $]-r, r[$ e che f' (nell'intervallo $]-r, r[$), ammette la rappresentazione (4.10) (con $k = 1$). Siccome r è arbitrario, si ha che la relazione (4.10) è verificata per $k = 1$ in $]-R, R[$.

Per completare la dimostrazione, basta ragionare per induzione su k. ∎

4.12 **Osservazione.** Il precedente teorema ci dice che le derivate successive della funzione f sono anch'esse rappresentabili come la somma di una serie di potenze. Si ha inoltre che la serie di potenze che compare nella (4.10) converge puntualmente su $]-R, R[$ e totalmente (e dunque assolutamente e uniformemente) su $]-r, r[$ (dove $r \in]0, R[$). ∎

4.13 **Osservazione.** I Teoremi 4.8 e 4.11 si estendono facilmente al caso generale della serie di potenze (4.1) nel senso che valgono sull'intervallo aventi estremi $x_0 \pm R$. Il legame fra i coefficienti della serie di potenze e le derivate della funzione somma diventa:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,, \tag{4.14}$$ ∎

e) Rappresentabilità di una funzione come somma di una serie di potenze

Data una serie di potenze abbiamo già studiato le principali proprietà della somma (insieme di definizione, regolarità, rappresentazione delle derivate, ...). Adesso studieremo il problema inverso:

4.14 **Definizione.** Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$, diciamo che f è esprimibile vicino al punto x_0 come la somma di una serie di potenze, se esiste $R > 0$ ed esiste una successione $a_n \in \mathbb{R}$ in modo tale che:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\ , \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,.$$ ∎

Immediata conseguenza del Teorema 4.11 è il seguente:

4.15 **Teorema.** Data una funzione $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$, se f è esprimibile vicino al punto x_0 come la somma di una serie di potenze, allora esiste $R > 0$ in modo tale che $f \in C^\infty$ su $]x_0 - R, x_0 + R[$. Si ha anche che f coincide con la sua serie di Taylor su $]x_0 - R, x_0 + R[$ (cioè $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$). ∎

4.16 **Osservazione.** Il precedente Teorema costituisce anche un risultato di unicità della rappresentazione di una funzione come somma di una serie di potenze. ∎

4.17 **Osservazione.** Il Teorema 4.15 non può essere invertito, in quanto esistono funzioni di classe C^∞ che non possono essere espresse come somma di una serie di potenze. Vediamo il seguente contro-esempio:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definita da } f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si verifica che $f \in C^\infty$ su $\mathbb{R}$. Verifichiamo che tale funzione non è però somma di una serie di potenze (di centro 0). In caso contrario, si avrebbe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n \in \mathbb{R}$). Siccome $f(x) = 0$ ($x \leq 0$), si ha che $f^{(k)}(x) = 0$ ($x < 0$, $k \in \mathbb{N}$). Dato che $f \in C^\infty$ su $\mathbb{R}$, si ha $f^{(k)}(0) = \lim_{x \uparrow 0} f^{(k)}(x) = 0$. Segue allora che i coefficienti a_n dello sviluppo in serie di potenze devono essere tutti nulli (grazie alla relazione (4.11)). Tale risultato implica che $f \equiv 0$ in un intorno di 0, che ci dà una contraddizione. ∎

Grazie al Teorema 4.15, affinché una funzione $f :]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$ si possa esprimere come somma di una serie di potenze, dobbiamo supporre che f sia indefinitamente derivabile. Vale allora il Teorema della formula di Taylor che afferma che f può essere così rappresentato (per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0)\,, \tag{4.15}$$

dove R_n è il resto $n-$esimo. Lo studente dovrebbe sapere che esiste $\lim_{x \to x_0} R_n(x, x_0) = 0$. Più precisamente si sa che $R_n(x, x_0) = o(x - x_0)^n$, cioè che R_n è una funzione infinitesima per $x \to x_0$ di ordine superiore a $(x - x_0)^n$. Dovrebbe anche essere noto che R_n ammette diverse rappresentazioni, fra cui quella di Lagrange:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,, \tag{4.16}$$

dove ξ è un punto intermedio fra x_0 e x.

Vale ovviamente il seguente risultato:

4.18 **Teorema.** Una funzione $f \in C^\infty$ su $]x_0 - R, x_0 + R[$ è esprimibile come somma di una serie di potenze se e solo se:

$$\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,, \quad \lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) = 0\,,$$

dove R_n è il resto $n-$esimo della serie di Taylor (4.15) (cioè se e solo se $\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) \to 0$ puntualmente). ∎

Il precedente risultato permette di dimostrare alcuni utili criteri sufficienti per la sviluppabilità in serie di potenze di una funzione.

4.19 **Teorema.** Sia $f \in C^\infty$ su $]x_0 - R, x_0 + R[$, dove $x_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Se:
i) esiste $M > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 + R, x_0 + R[\ , |f^{(n)}(x)| \leq M\, n!/R^n$,
oppure se:
ii) esiste $M > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 + R, x_0 + R[\ , |f^{(n)}(x)| \leq M^n$,
allora f si può esprimere come somma di una serie di potenze (di centro x_0) nell'intervallo $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Dimostrazione: Sotto la ipotesi i), utilizzando la forma di Lagrange di R_n, si ha (dove ξ è un punto intermedio fra x_0 e x):

$$|R_n(x, x_0)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \left(\frac{|x - x_0)|}{R} \right)^{n+1} \ ,\ \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,;$$

siccome $|x - x_0)| < R$, si ha che $|R_n(x, x_0)|$ è maggiorato da una costante per il termine generale di una serie geometrica di ragione minore di 1. Segue che $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$.

Sotto la ipotesi ii) si ha inoltre:

$$|R_n(x, x_0)| \leq \frac{(M\,R)^{n+1}}{(n+1)!} \ ,\ \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,,$$

e conseguentemente si ha che $|R_n(x, x_0)|$ è maggiorato dal termine generale di una serie esponenziale. Segue che $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$.

Il Teorema è così dimostrato. ∎

4.20 **Esempi.** Dato $R > 0$, le derivate successive della funzione $\exp(x)$ verificano le seguenti relazioni:

$$|D_n \exp(x)| = \exp(x) \leq \exp(R) \leq [\exp(R)]^n \quad , \quad \forall x \in] - R, R[\,, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Ciò vuol dire che possiamo applicare alla funzione $\exp(x)$ (ristretta all'intervallo $] - R, R[$) il Teorema 4.19 ii), scegliendo $M = \exp R$. Esiste dunque una successione $a_n \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ ,\ \forall x \in] - R, R[\,.$$

Ricordando la relazione (4.11), si ha che $a_n = 1/n!$, da cui:

$$\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ ,\ \forall x \in] - R, R[$$

e dunque (dato che R è arbitrario):

$$\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \blacksquare \tag{4.17}$$

Analogamente si verificano le seguenti rappresentazioni (per ogni $x \in \mathbb{R}$):

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \ ,\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \ ,\ \forall z \in \mathbb{R}\,. \blacksquare \tag{4.18}$$

È ben nota anche la seguente relazione:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \quad \forall x \in]-1,1[\, . \tag{4.19}$$

Se sostituiamo x con $-x$ nella precedente relazione si ha:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n \ , \quad \forall x \in]-1,1[\tag{4.20}$$

e sostituendo x con x^2 in quest'ultima si ha:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n} \ , \quad \forall x \in]-1,1[\, . \tag{4.21}$$

Osserviamo che:

$$(\log(1-x))' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \quad \forall x \in]-1,1[$$

da cui:

$$\log(1-x) = \int_0^x (\log(1-s))' \, ds = -\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \right) ds \ , \quad \forall x \in]-1,1[\, .$$

Supponiamo, per semplicità, che $x \geq 0$. Siccome la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} s^n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0,x]$, utilizzando il Teorema di integrazione per serie, si ricava la seguente rappresentazione:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ , \quad \forall x \in]-1,1[\, . \tag{4.22}$$

Dimostriamo infine la seguente relazione (detta *identità della serie binomiale*):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ , \quad \forall x \in]-1,1[\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\, , \tag{4.23}$$

dove:

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{se } n \neq 0, \\ 1, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Poniamo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ ,$$

e dimostriamo che:

$$(1+x) f'(x) = \alpha\, f(x) \ , \ \forall x \in]-1,1[\, . \tag{4.24}$$

Si ha intanto che:

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n}$$

e, ponendo $n-1=m$ nella prima sommatoria del membro di destra,

$$(1+x)f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\binom{\alpha}{m+1}x^{m} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n}$$

è facile verificare che:

$$(m+1)\binom{\alpha}{m+1} = (\alpha-m)\binom{\alpha}{m}$$

e dunque:

$$(1+x)f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(\alpha-m)\binom{\alpha}{m}x^{m} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} = \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} = \alpha f(x)$$

cioè la (4.24). Si ha ancora:

$$(f(x)(1+x)^{-\alpha})' = f'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha f(x)(1+x)^{-\alpha-1}$$

e utilizzando la (4.24)

$$(f(x)(1+x)^{-\alpha})' = \alpha\frac{f(x)}{1+x}(1+x)^{-\alpha} - \alpha f(x)(1+x)^{-\alpha-1} = 0$$

che significa che:

$$f(x)(1+x)^{-\alpha} = \text{ costante}\,.$$

Valutando la costante per $x=0$, si ha che $f(x)(1+x)^{-\alpha}=1$, da cui, finalmente, la relazione (4.23). ∎

f) Il caso complesso

Nel caso in cui si supponga che i coefficienti siano numeri complessi, la serie (4.1) diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{4.25}$$

dove z_0 è un punto fissato del piano complesso e z è la variabile complessa. Nella presente Sezione daremo (molto velocemente) alcuni risultati relativi alle serie di potenze in campo complesso, senza alcuna pretesa di completezza e limitandoci, per gran parte, ad enunciati informali.

I risultati contenuti nel Teorema 4.8 si possono estendere facilmente nel senso che l'insieme di convergenza è intermedio fra la bolla complessa aperta $B(z_0,R)$ (di centro z_0 e raggio R) e la sua chiusura, dove il raggio di convergenza R è ancora dato dal reciproco generalizzato del numero:

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Si ha anche che la convergenza della serie (4.25) è uniforme su ogni compatto contenuto in $B(z_0, R)$.

Prima di dare un cenno relativo alla estensione del Teorema 4.11, introduciamo la seguente:

4.21 **Definizione.** Sia Ω una regione (cioè un aperto connesso) di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e z_0 un punto di Ω. Si dice che la funzione f è *derivabile (in senso complesso)* in z_0, se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ in modo tale che:

$$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda$$

Il valore λ viene chiamato *derivata (in senso complesso)* di f nel punto z_0 e viene indicato con $f'(z_0)$. Se inoltre f è derivabile in ogni punto $z \in \Omega$, allora si dice che f è *analitica (o olomorfa)* in Ω. ∎

Si dimostra che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa su Ω, cioè derivabile (in senso complesso) in ogni punto di Ω, è automaticamente indefinitamente derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω.

La versione complessa del Teorema 4.11, coincide allora formalmente con la versione reale. Si ha infatti che la somma della serie di potenze (4.25) è olomorfa su $B(z_0, R)$ e dunque indefinitamente derivabile (in senso complesso) nella bolla $B(z_0, R)$ e che le sue derivate possono essere rappresentate dalla formula (4.10) (opportunamente adattata).

Il precedente risultato può essere in un certo senso invertito. Si ha infatti che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa su Ω, allora può essere espressa localmente come la somma di una serie di potenze.

4.22 **Esempio.** È di particolare importanza il problema della estensione delle funzioni reali di variabile reale a funzioni complesse di variabile complessa. Data, ad esempio, la funzione $\exp(x)$ definita su $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, si vuole trovarne una estensione come funzione complessa di variabile complessa. Una buona proposta è la seguente (che generalizza la rappresentazione dell'esponenziale reale dato dalla (4.17)):

$$\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ , \ \forall z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.26}$$

Grazie alle considerazioni condotte sopra, la funzione sopradefinita, chiamata *esponenziale in campo complesso*, è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Si dimostra anzi che è l'unica funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ che coincida con $\exp x$ sull'asse reale.

Analogamente si possono definire le funzioni *seno* e *coseno* (*in campo complesso)* mediante le formule:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \ , \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.27}$$

che sono una estensione delle relazioni (4.18). Le funzioni seno e coseno (in campo complesso) in tal modo definite sono ancora funzioni olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ e sono l'unica estensione olomorfa su $\mathbb{C}$ del seno e del coseno in campo reale. ∎

Un sorprendente legame fra le funzioni esponenziale, seno e coseno (in campo complesso) è dato dalla:

4.23 **Formula di Eulero.** Si ha che:

$$\exp(ix) = \cos x + i \operatorname{sen} x \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

Dimostrazione: Grazie alla definizione 4.26 si ha:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,x)^n}{n!} = \sum_{n \text{ pari}} \frac{(i\,x)^n}{n!} + \sum_{n \text{ dispari}} \frac{(i\,x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

da cui, ricordando le definizioni 4.27 e il fatto che $i^2 = -1$, si ha:

$$\exp ix = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \operatorname{sen} x \, .$$

Ricordando le formule di rappresentazione (4.18), la formula di Eulero è così dimostrata. ∎

Si può dimostrare che l'esponenziale in campo complesso soddisfa (come in ambito reale) la seguente relazione:

$$\exp(z+w) = (\exp z)\,(\exp w) \ , \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \, . \tag{4.28}$$

Se $z = x + iy$ è un generico numero complesso la cui parte reale è x e il coefficiente dell'immaginario è y, si può calcolare facilmente $\exp(z)$ mediante la seguente formula (che è una ovvia conseguenza della formula di Eulero e della relazione (4.28)):

$$\exp(x+iy) = (\cos y + i \operatorname{sen} y) \exp x \, .$$

Tale relazione è particolarmente interessante perché ci permette di provare numerose proprietà dell'esponenziale complesso:

i) si ha che $\exp z \neq 0 \, , \forall z \in \mathbb{C}$,
ii) si ha che $\exp z = \exp(z + 2\pi i) \, , \forall z \in \mathbb{C}$.

La prima di tali proprietà afferma che l'esponenziale non si annulla mai, proprio come in campo reale. La seconda afferma che l'esponenziale è una funzione periodica di periodo $2\pi i$. L'esponenziale complesso non è dunque una funzione iniettiva. Tale fatto ci dice che avremo dei problemi per definire il *logaritmo* in campo complesso.

Per concludere questo argomento, approfondiamo il legame fra la nozione di derivabilità in senso complesso e derivabilità in senso reale.

Osserviamo che $\mathbb{C}$ può essere identificato a $\mathbb{R}^2$ e che un generico numero complesso z può essere equivalentemente rappresentato

$$z = x + iy = (x, y) \quad , \quad \text{dove x} = \operatorname{Re}\text{z} \ , \ \text{y} = \operatorname{Im}\text{z} \, .$$

Se, dato Ω aperto di $\mathbb{C}$ e data $f : \Omega \to \mathbb{C}$, si ha che f può essere considerata come definita sull'aperto Ω (come aperto di $\mathbb{R}^2$) a valori in $\mathbb{R}^2$. È anche lecito introdurre le funzioni reali di variabile reale

$$u\,,\,v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \text{ dove } \; \mathrm{u} = \mathrm{Re\,f} \;,\; \mathrm{v} = \mathrm{Im\,f}\,.$$

Vale l'importante risultato:

4.24 **Teorema.** Dato $z_0 \in \Omega$ si ha che f è derivabile in senso complesso in $z_0 = x_0 + i\,y_0$ se e solo se valgono le due condizioni
i) le funzioni $u\,,\,v$ sono derivabili parzialmente in (x_0, y_0),
ii) valgono le cosiddette *relazioni di Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,. \blacksquare$$

II - MISURA E INTEGRALE SECONDO LEBESGUE

Queste pagine costituiscono essenzialmente una riduzione del libro di Giusti E., ANALISI MATEMATICA 2, cap.5 e 6 e sono state redatte per facilitare lo studio dello studente il quale trova sul libro del Giusti una trattazione un po' troppo complessa e articolata e in ogni caso troppo gravosa perchè si possa inserire integralmente in un normale corso di Analisi Matematica del II anno.

L'esposizione degli argomenti trattati risulterà molto stringata: mancheranno alcuni esempi notevoli (che lo studente troverà nel libro del Giusti) e le "chiacchere" che vengono date a lezione. Raccomando dunque la frequenza delle lezioni e, soprattutto, delle esercitazioni al corso, perchè possa disporre di maggiori dettagli e di ulteriori complementi.

Lo studente si dovrà affidare al sopra-citato libro del Giusti, per un eventuale approfondimento della materia trattata.

1 - MISURA DI RETTANGOLI E PLURIRETTANGOLI

a) Misura dei rettangoli

Introduciamo la famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli:

1.1 **Definizione.** Un sottoinsieme R di $\mathbb{R}^n$ si dice un *rettangolo* se è il prodotto cartesiano di n intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. La famiglia di tutti i rettangoli di $\mathbb{R}^n$ verrà, nel seguito, indicata con $\mathcal{R}_n$ o, più semplicemente con $\mathcal{R}$. ∎

Ad esempio, nel caso $n = 2$, la famiglia $\mathcal{R}_2$ è formata da tutti i rettangoli chiusi a lati paralleli agli assi coordinati. Sugli elementi di $\mathcal{R}$ definiamo elementarmente una misura, cioè una funzione $m_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, ponendo $m_{\mathcal{R}}(R) = \text{volume}\,(R)$ dove $R \in \mathcal{R}$: cioè, se $R = \Pi_{i=1}^n\ [a_i, b_i]$, si pone $m_{\mathcal{R}}(R) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Si ha, ovviamente, che tale misura è sempre non negativa e che:

$$\forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}\ (R_1 \subset R_2 \Rightarrow m_{\mathcal{R}}(R_1) \leq m_{\mathcal{R}}(R_2)).$$

b) Misura dei pluri-rettangoli

Introduciamo ora una famiglia più vasta di insiemi su cui definire una misura:

1.2 **Definizione.** Un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ si dice un *pluri-rettangolo* se è unione finita di rettangoli $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}_n$, tali che $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$, $(i \neq j)$. In tal caso si pone:

$$m_{\mathcal{P}}(P) = \sum_{i=1}^{m} m_{\mathcal{R}}(R_i).$$

La famiglia di tutti i pluri-rettangoli di $\mathbb{R}^n$ verrà, nel seguito, indicata con $\mathcal{P}_n$ o, più semplicemente, con $\mathcal{P}$. ∎

È facilmente comprensibile (anche se laborioso da giustificare correttamente) che la definizione di misura di pluri-rettangolo è coerente, cioè è indipendente dalla particolare decomposizione in rettangoli. Importante è anche il concetto di *raffinamento* di un pluri-rettangolo: ciò vuol dire che dato $\varepsilon > 0$, si può dare, a un assegnato pluri-rettangolo $P \in \mathcal{P}$, una rappresentazione come unione di una famiglia finita di elementi di $\mathcal{R}$ aventi un diametro minore di ε. Anche la nozione di raffinamento è molto intuitiva e non verrà approfondita dal punto di vista formale. Notiamo inoltre che $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ (cioè la famiglia dei pluri-rettangoli è più ricca di quella dei rettangoli), che $m_{\mathcal{P}}$ è una estensione di $m_{\mathcal{R}}$ e che $\mathcal{P}$ ha buone proprietà insiemistiche (ad esempio, intersecando o riunendo due pluri-rettangoli si ottiene ancora un pluri-rettangolo). Si ha, infine, che $m_{\mathcal{P}}(P) \geq 0$, $\forall P \in \mathcal{P}$ e che valgono le seguenti ovvie proprietà:

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} \ (P_1 \subset P_2 \Rightarrow m_{\mathcal{P}}(P_1) \leq m_{\mathcal{P}}(P_2)), \tag{1.1}$$

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} \ (m_{\mathcal{P}}(P_1 \cup P_2) \leq m_{\mathcal{P}}(P_1) + m_{\mathcal{P}}(P_2)), \tag{1.2}$$

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} \ (\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset \Rightarrow m_{\mathcal{P}}(P_1 \cup P_2) = m_{\mathcal{P}}(P_1) + m_{\mathcal{P}}(P_2)). \tag{1.3}$$

2 - MISURA DEGLI APERTI E DEI COMPATTI

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{A}$ (risp. $\mathcal{K}$) la famiglia degli aperti (risp. compatti) di $\mathbb{R}^n$. Indicheremo inoltre con $\widetilde{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, estendendovi in modo abituale la relazione di $\leq$.

a) Misura degli aperti

Incominciamo a introdurre una misura definita su $\mathcal{A}$:

2.1 **Definizione.** Dato $\Omega \in \mathcal{A}$, si pone $m_{\mathcal{A}}(\emptyset) = 0$ e, se $\Omega \neq \emptyset$,

$$m_{\mathcal{A}}(\Omega) = \sup\{m_{\mathcal{P}}(P) \ , \ P \in \mathcal{P} \ , \ P \subset \Omega\}. \blacksquare$$

La funzione $m_{\mathcal{A}}$ è definita su $\mathcal{A}$ a valori in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Ovviamente tale misura può assumere anche il valore $+\infty$ (ad esempio se $A = \mathbb{R}^n$).

2.2 **Esercizio.** Verificare che se $\Omega \in \mathcal{A}$ è limitato, allora $m_{\mathcal{A}}(\Omega)$ è un numero reale non negativo. ∎

Consideriamo la ordinaria *distanza euclidea* in $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} \quad , \quad x \, , \, y \in \mathbb{R}^n \, ,$$

dove x_k e y_k sono le componenti di x e y. È ben nota la seguente *disuguaglianza triangolare*:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad , \quad x\,,\,y\,,\,z \in \mathbb{R}^n\,.$$

Prima di dimostrare le prime proprietà della misura degli aperti, verifichiamo i seguenti elementari risultati:

2.3 **Lemma.** Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ con $M \ne \emptyset$. Consideriamo, inoltre, la funzione definita in $\mathbb{R}^n$ a valori reali non negativi: $d(x,M) = \inf\{d(x,m)\,,\, m \in M\}$. Si ha che:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ , \ |d(x,M) - d(y,M)| \le d(x,y)$$

e, dunque, in particolare, tale funzione è continua su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: Fissiamo $x\,,\, y \in \mathbb{R}^n$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $m \in M$ tale che:

$$d(x,M) \le d(x,m) \le d(x,M) + \varepsilon\,,$$

e dunque (utilizzando la disuguaglianza triangolare)

$$d(y,M) \le d(y,m) \le d(y,x) + d(x,m) \le d(y,x) + d(x,M) + \varepsilon.$$

Sottraendo $d(x,M)$ da tale relazione, si ottiene:

$$d(y,M) - d(x,M) \le d(y,x) + \varepsilon$$

e, scambiando x con y,

$$|d(y,m) - d(x,M)| \le d(y,x) + \varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrariamente piccolo, si ha l'asserto. ∎

2.4 **Lemma.** Supponiamo che $\Omega_i \in \mathcal{A}$, $(i = 1, \ldots, k)$ e $K \in \mathcal{K}$ siano tali che $K \subset \cup_{i=1}^k \Omega_i$. Si ha allora che esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in K$, esiste $i \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $B(x,r) \subset \Omega_i$.

Dimostrazione: Il caso in cui uno degli aperti $\Omega_i = \mathbb{R}^n$ è banale. Negli altri casi possiamo considerare la funzione $f : \mathbb{R}^n \to R_+$ definita da $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^k d(x, \mathbb{R}^n - \Omega_i)$. Grazie al Lemma 2.3 tale funzione è continua e non negativa su $\mathbb{R}^n$. Sia ora $x \in \cup_{i=1}^k \Omega_i$: in tal caso, esiste $i \in \{1, \ldots, k\}$ in modo tale che $x \in \Omega_i$. Segue che, scegliendo $h > 0$ sufficientemente piccolo, si ha che che $B(x,h) \subset \Omega_i$ e dunque $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega_i) \ge h$, cioè $f(x) > 0$. Siccome K è compatto e $K \subset \cup_{i=1}^k \Omega_i$, si ha che $f(x) > 0 \ , \ \forall x \in K$. Dato che una funzione continua su un compatto ammette minimo, si ha che esiste $x_0 \in K$ tale che $f(x) \ge f(x_0) > 0 \ , \ \forall x \in K$. Ponendo $r = f(x_0)/k$, ciò vuol dire che esiste un indice i tale che $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega_i) \ge r$ e dunque $B(x,r) \subset \Omega_i$. Il Lemma è dunque provato. ∎

2.5 **Lemma.** Supponiamo che $\Omega_i \in \mathcal{A}$, $(i = 1, \ldots, k)$ e $K \in \mathcal{K}$ siano tali che $K \subset \cup_{i=1}^k \Omega_i$. Si ha allora che esiste $r > 0$ tale che per ogni $R \in \mathcal{R}$, tale che $R \cap K \ne \emptyset$ e $\operatorname{diam}(R) < r$, esiste $i \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $R \subset \Omega_i$.

Dimostrazione: Determinati $r > 0$ ed i in base al precedente Lemma, sia $R \in \mathcal{R}$ tale che $R \cap K \ne \emptyset$ e che $\operatorname{diam}(R) < r$. Se $x_0 \in R \cap K$, si ha che $R \subset B(x_0, r) \subset \Omega_i$. Il Lemma è dunque provato. ∎

Siamo ora in grado di dimostrare il:

2.6 **Lemma.** Dati $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}$ si ha che:
(i) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow m_{\mathcal{A}}(\Omega_1) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega_2)$,
(ii) $m_{\mathcal{A}}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega_1) + m_{\mathcal{A}}(\Omega_2)$.

Dimostrazione: La asserzione (i) è conseguenza immediata della definizione di $m_{\mathcal{A}}$. Verifichiamo la asserzione (ii). Sia P un pluri-rettangolo contenuto in $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Siccome P è compatto, grazie al Lemma 2.5, si può rappresentare P, dopo un eventuale raffinamento, mediante rettangoli R_i ciascuno contenuto in Ω_1 o in Ω_2. Indichiamo con P_i $(i = 1, 2)$ l'unione di tutti i rettangoli R_i contenuti in Ω_i. Si ha che:

$$P_1 \subset \Omega_1 \ , \ P_2 \subset \Omega_2 \ , \ P = P_1 \cup P_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \,.$$

e dunque (grazie alla (1.2) e alla definizione di misura di un aperto):

$$m_{\mathcal{P}}(P) \leq m_{\mathcal{P}}(P_1) + m_{\mathcal{P}}(P_2) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega_1) + m_{\mathcal{A}}(\Omega_2),$$

da cui:

$$m_{\mathcal{P}}(P) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega_1) + m_{\mathcal{A}}(\Omega_2) \ , \ \forall P \in \mathcal{P} \text{ con } P \subset \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

che, ancora per la definizione di misura di un aperto, dimostra l'asserto. ∎

2.7 **Osservazione.** Se $P \in \mathcal{P}$, si ha allora che $\overset{0}{P} \in \mathcal{A}$. Si verifica allora facilmente che:

$$m_{\mathcal{A}}(\overset{0}{P}) = m_{\mathcal{P}}(P) \ , \ \forall P \in \mathcal{P} \,. \blacksquare$$

b) Misura dei compatti

Introduciamo ora la nozione di misura per $\mathcal{K}$, cioè sulla famiglia dei compatti di $\mathbb{R}^n$:

2.8 **Definizione.** Dato $K \in \mathcal{K}$, si pone:

$$m_{\mathcal{K}}(K) = \inf\{m_{\mathcal{P}}(P) \ , \ P \in \mathcal{P} \ , \ P \supset K\}. \blacksquare$$

Dato $K \in \mathcal{K}$, si ha che K è limitato e dunque contenuto in un rettangolo sufficientemente grande: ciò vuol dire che $m_{\mathcal{K}}(K) \in \mathbb{R}$ o, anche che $m_{\mathcal{K}}$ non assume mai il valore $+\infty$. Osserviamo che la famiglia $\mathcal{P}$ dei plurirettangoli è contenuta nella famiglia $\mathcal{K}$ dei compatti e che:

$$m_{\mathcal{P}}(P) = m_{\mathcal{K}}(P) \ , \ \forall P \in \mathcal{P} \,.$$

Usando una dimostrazione analoga a quella utilizzata nel Lemma 2.6, si verifica anche il:

2.9 **Lemma.** Dati $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ si ha che:
(i) $K_1 \subset K_2 \Rightarrow m_{\mathcal{K}}(K_1) \leq m_{\mathcal{K}}(K_2)$,
(ii) se $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ allora: $m_{\mathcal{K}}(K_1 \cup K_2) \geq m_{\mathcal{K}}(K_1) + m_{\mathcal{K}}(K_2)$. ∎

2.10 **Osservazione.** Nella conclusione dell'asserzione (ii) del precedente lemma, si potrebbe (con un supplemento dimostrativo) sostituire $\geq$ con $=$. Tale enunciato (più forte) non verrà utilizzato più avanti e, in ogni caso, costituisce un caso particolare di un risultato che dimostreremo in seguito. ∎

c) Relazioni fra le misure degli aperti e dei compatti

c) Dimostriamo infine il seguente legame fra le misure $m_{\mathcal{K}}$ e $m_{\mathcal{A}}$:

2.11 **Lemma.** Dati $K \in \mathcal{K}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$, se $K \subset \Omega$ allora $m_{\mathcal{K}}(K) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega)$.

Dimostrazione: Grazie alle ipotesi e al Lemma 2.5 (con $k = 1$) esiste $r > 0$ tale che per ogni rettangolo $R \in \mathcal{R}$, con diam $(R) < r$ e che abbia intersezione non vuota con K, allora $R \subset \Omega$. Sia ora $Q \in \mathcal{P}$ tale che $K \subset Q$. Eventualmente raffinando Q, si può supporre che Q sia rappresentato da una famiglia finita di rettangoli R_i con diametro $< r$. Se P è l'unione dei rettangoli R_i aventi intersezione non vuota con K, si ha evidentemente che $K \subset P \subset \Omega$. Grazie alle definizioni di $m_{\mathcal{K}}$ e di $m_{\mathcal{A}}$, si ha che: $m_{\mathcal{K}}(K) \leq m_{\mathcal{P}}(P) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega)$, che implica l'asserto. ∎

3 - MISURA INTERNA E ESTERNA

Introduciamo la seguente

3.1 **Definizione.** Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e poniamo:

$$\overline{m}(E) = \inf\{m_{\mathcal{A}}(\Omega)\ ,\ \Omega \in \mathcal{A}\ ,\ \Omega \supset E\},$$

$$\underline{m}(E) = \sup\{m_{\mathcal{K}}(K)\ ,\ K \in \mathcal{K}\ ,\ K \subset E\}.$$

La funzione $\overline{m}$ (risp. $\underline{m}$) viene chiamata misura *esterna* (risp. *interna*). ∎

3.2 **Osservazione.** Se tutti gli aperti contenenti E hanno misura infinita, si pone $\overline{m}(E) = +\infty$. Notiamo inoltre che, se E è limitato, si ha che $\overline{m}(E) \in \mathbb{R}$ e $\underline{m}(E) \in \mathbb{R}$. ∎

Dimostriamo qualche proprietà della misura esterna e di quella interna:

3.3 **Lemma.** Si ha che:
(i) Per ogni $E, F \subset \mathbb{R}^n$, se $E \subset F$ allora $\underline{m}(E) \leq \underline{m}(F)$ e $\overline{m}(E) \leq \overline{m}(F)$,
(ii) Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha che $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$.

Dimostrazione: La asserzione (i) è immediata. Verifichiamo ora la proprietà (ii). Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Osserviamo che se $K \in \mathcal{K}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$, con $K \subset E \subset \Omega$, si ha (grazie al Lemma 2.11) che: $m_{\mathcal{K}}(K) \leq m_{\mathcal{A}}(\Omega)$. Si ha allora che le classi numeriche

$$\{m_{\mathcal{K}}(K)\ ,\ K \in \mathcal{K}\ ,\ K \subset E\} \quad , \quad \{m_{\mathcal{A}}(\Omega)\ ,\ \Omega \in \mathcal{A}\ ,\ \Omega \supset E\}$$

sono separate. Ricordando le definizioni di $\overline{m}$ e di $\underline{m}$, si ha l'asserto. ∎

4 - INSIEMI MISURABILI

a) Misura di Lebesgue sugli insiemi limitati

Introduciamo finalmente la seguente definizione di misurabiltà secondo Lebesgue, limitandoci, per ora, al caso di sotto-insiemi limitati di $\mathbb{R}^n$:

4.1 **Definizione.** Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue*, se $\overline{m}(E) = \underline{m}(E)$. La famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue verrà, nel seguito, indicata con $\mathcal{M}_n$, o, più semplicemente, con $\mathcal{M}$. Se $E \in \mathcal{M}$, indicheremo con $m(E)$ il valore comune della misura interna e della misura esterna di E (tale valore verrà chiamato *misura secondo Lebesgue* dell'insieme E). ∎

Osserviamo che, nelle ipotesi della precedente definizione, il valore di $m(E)$ è reale (cioè non assume mai il valore $+\infty$). Tenendo presente tale definizione, si dimostra allora facilmente il seguente:

4.2 **Teorema.** Dati $E, F \in \mathcal{M}$, se $E \subset F$, allora $m(E) \leq m(F)$. ∎

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{A}^*$ la famiglia degli aperti limitati di $\mathbb{R}^n$. Vale il:

4.3 **Lemma.** Si ha che:
(i) ogni aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ (cioè ogni $\Omega \in \mathcal{A}^*$) appartiene a $\mathcal{M}$ e $m(\Omega) = m_{\mathcal{A}}(\Omega)$,
(ii) ogni compatto K appartiene a $\mathcal{M}$ e $m(K) = m_{\mathcal{K}}(K)$.

Dimostrazione: Sia $\Omega \in \mathcal{A}^*$. Osserviamo che, grazie al Lemma 2.6 (i) e alla definizione di misura esterna, si ha che $\overline{m}(\Omega) = m_{\mathcal{A}}(\Omega)$ Dato che $m_{\mathcal{A}}(\Omega)$ è l'estremo superiore delle misure dei pluri-rettangoli contenuti in Ω e che $\underline{m}(\Omega)$ è l'estremo superiore della famiglia (più numerosa) delle misure dei compatti contenuti in Ω, si ha che $m_{\mathcal{A}}(\Omega) \leq \underline{m}(\Omega)$. Ricordando il Lemma 3.3, si ha allora:

$$m_{\mathcal{A}}(\Omega) \leq \underline{m}(\Omega) \leq \overline{m}(\Omega) = m_{\mathcal{A}}(\Omega)$$

e, dunque, la parte (i) è dimostrata. La parte (ii) può essere dimostrata in modo analogo (anche se con qualche piccola complicazione in più). ∎

4.4 **Osservazione.** Abbiamo dimostrato che la famiglia $\mathcal{M}$ dei sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue è molto vasta, in quanto essa contiene tutti i compatti e gli aperti (non troppo "grandi"). In realtà tale famiglia è effettivamente "ricchissima", dato che per la costruzione di un'insieme limitato non misurabile secondo Lebesgue, sono necessarie tecniche non costruttive e molto raffinate che utilizzano, in modo essenziale, l'assioma della scelta. ∎

4.5 **Osservazione.** Un'altra classica Teoria della misura è dovuta a Peano-Jordan: essa consiste nell'approssimare, per eccesso e per difetto, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ direttamente con pluri-rettangoli. Per un assegnato sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ vengono così costruite ancora una misura esterna $\overline{\mu}(E)$ ed una interna $\underline{\mu}(E)$. La famiglia $\mathcal{J}$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Peano-Jordam è costituita dagli insiemi E tali che $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$. È facile verificare che:

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n \ , \ \underline{\mu}(E) \leq \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) \leq \overline{\mu}(E),$$

e dunque $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ (cioè a dire un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Jordan è anche misurabile secondo Lebesgue). In realtà la misura secondo Peano-Jordan è effettivamente troppo rudimentale per molti capitoli dell'Analisi Matematica, in quanto non consente una adeguata Teoria dell'integrale (soprattutto per quanto riguarda i risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale).

Più avanti descriveremo un esempio di insieme misurabile secondo Lebesgue, ma non misurabile secondo Jordan. ∎

b) Prime proprietà della misura di Lebesgue

Immediata conseguenza della definizione di misura secondo Lebesgue è la seguente:

4.6 **Proposizione.** Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$. Si ha allora che $E \in \mathcal{M}$ se e solo se:

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\Omega \in \mathcal{A}^*\,,\ \exists K \in \mathcal{K}\,,\ \text{ in modo tale che } K \subset E \subset \Omega \text{ e } m(\Omega) - m(K) < \varepsilon\,. \tag{4.1}$$

Dimostrazione: Dimostriamo che se $E \in \mathcal{M}$ allora vale la relazione (4.1). Sia $h > 0$ tale che $E \subset B(0,h)$. Dato $\varepsilon > 0$, grazie alla Definizione 4.1, esistono $\Lambda \in \mathcal{A}$, $K \in \mathcal{K}$ in modo tale che $K \subset E \subset \Lambda$ e $m_{\mathcal{A}}(\Lambda) - m(K) < \varepsilon$. Se poniamo $\Omega = \Lambda \cap B(0,h)$, si ha subito la relazione (4.1). Il viceversa è banale. ∎

Dimostriamo ora il:

4.7 **Lemma.** Se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, si ha che $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ e:

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)\,.$$

Dimostrazione: Dati $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, dato $\varepsilon > 0$, grazie alla Proposizione 4.6, si possono determinare $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}^*$ e $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tali che (i=1,2):

$$K_i \subset E_i \subset \Omega_i\,,$$

$$m(K_i) \le m(E_i) \le m(\Omega_i) \quad , \quad m(\Omega_i) - m(K_i) < \varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Osserviamo che:

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \in \mathcal{A}^*\ ,\ K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}\ ,\ K_1 \cup K_2 \subset E_1 \cup E_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2\,. \tag{4.3}$$

Siccome $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, grazie alla (4.2) e ai Lemmi 2.6 e 2.9, si ha che:

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le m(\Omega_1) + m(\Omega_2) \le m(E_1) + m(E_2) + 2\varepsilon\,, \tag{4.4}$$

$$m(K_1 \cup K_2) \ge m(K_1) + m(K_2) \ge m(E_1) + m(E_2) - 2\varepsilon\,, \tag{4.5}$$

e dunque $0 < m(\Omega_1 \cup \Omega_2) - m(K_1 \cup K_2) < 4\,\varepsilon$: tale relazione implica che $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ (utilizzando anche la (4.3)). Grazie alla monotonia della misura secondo Lebesgue, si ha che:

$$m(K_1 \cup K_2) \le m(E_1 \cup E_2) \le m(\Omega_1 \cup \Omega_2)\,.$$

Utilizzando anche le relazioni (4.4) e (4.5), si ottiene che:

$$m(E_1) + m(E_2) - 2\varepsilon \le m(E_1 \cup E_2) \le m(E_1) + m(E_2) + 2\varepsilon\,,$$

che, data l'arbitrarietà di ε, completa la dimostrazione dell'asserto ∎

Con un facile ragionamento per induzione, si può dimostrare la seguente generalizzazione della Proposizione 4.7:

4.8 **Proposizione.** Dato un numero finito di insiemi $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{M}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $i \neq j$, si ha che:

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i \in \mathcal{M} \ , \ m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i) \,. \blacksquare$$

4.9 **Lemma.** Sia $\Omega \in \mathcal{A}^*$ e $K \in \mathcal{K}$ con $K \subset \Omega$. Si ha allora che $\Omega - K \in \mathcal{M}$ e che:

$$m(\Omega) = m(\Omega - K) + m(K)\,.$$

Dimostrazione: Osserviamo che $\Omega - K = \Omega \cap (-K) \in \mathcal{A}^* \subset \mathcal{M}$ dato che è intersezione di due aperti. L'asserto è dunque conseguenza del Lemma 4.7. $\blacksquare$

Alla luce di tale risultato, possiamo enunciare una variante della Proposizione 4.6:

4.10 **Proposizione.** Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$. Si ha allora che $E \in \mathcal{M}$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \Omega \in \mathcal{A}^*\,, \exists K \in \mathcal{K}\,, \ \text{ in modo tale che } K \subset E \subset \Omega \text{ e } m(\Omega - K) < \varepsilon\,. \blacksquare$$

A tale punto siamo in grado di dimostrare la seguente:

4.11 **Proposizione.** Dati $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, si ha che $E_1 - E_2 \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione: Dati $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, dato $\varepsilon > 0$, si possono determinare $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}^*$ e $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ verificanti $(i = 1, 2)$:

$$K_i \subset E_i \subset \Omega_i \quad , \quad m(\Omega_i - K_i) < \varepsilon\,. \tag{4.6}$$

Osserviamo inoltre che:

$$\Omega_1 - K_2 \in \mathcal{A}^* \ , \ K_1 - \Omega_2 \in \mathcal{K} \ , \ K_1 - \Omega_2 \subset E_1 - E_2 \subset \Omega_1 - K_2\,. \tag{4.7}$$

Dimostriamo ora che:

$$(\Omega_1 - K_2) - (K_1 - \Omega_2) \subset (\Omega_1 - K_1) \cup (\Omega_2 - K_2), \tag{4.8}$$

Per dimostrare tale relazione utilizzeremo le seguenti semplici regole insiemistiche (A, B, C essendo insiemi generici):
(a) $A - B = A \cap (-B)$,
(b) $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$,
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Si ha allora (specificando anche le giustificazioni dei passaggi):

$$(\Omega_1 - K_2) - (K_1 - \Omega_2) \overset{(a)}{=} \big(\Omega_1 \cap (-K_2)\big) \cap \big(-(K_1 \cap (-\Omega_2)\big) \overset{(b)}{=} \big(\Omega_1 \cap (-K_2)\big) \cap \big((-K_1) \cup \Omega_2\big) \overset{(c)}{=}$$
$$= \Big(\big(\Omega_1 \cap (-K_2)\big) \cap (-K_1)\Big) \cup \Big(\big(\Omega_1 \cap (-K_2)\big) \cap \Omega_2\Big) \subset \big(\Omega_1 \cap (-K_1)\big) \cup \big(\Omega_2 \cap (-K_2)\big)\,.$$

e, dunque, grazie alla proprietà (a), la relazione (4.8) è dimostrata. Si ha allora che (utilizzando il Lemma 2.6 e le relazioni (4.6)):

$$m\big((\Omega_1 - K_2) - (K_1 - \Omega_2)\big) \leq m\big((\Omega_1 - K_1) \cup (\Omega_2 - K_2)\big) \leq m(\Omega_1 - K_1) + m(\Omega_2 - K_2) < 2\varepsilon \,.$$

Ricordando anche la (4.7), si ha l'asserto. ∎

Si ha anche che:

4.12 **Proposizione.** Se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ e $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Si ha inoltre che:

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

e, in particolare,

$$m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2) \,.$$

Dimostrazione: Dato che $E_1 \cap E_2 = E_1 - (E_1 - E_2)$, utilizzando la Proposizione 4.11, si ha che $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$. Si ha inoltre che:

$$E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 - E_2) \quad , \quad (E_1 \cap E_2) \cap (E_1 - E_2) = \emptyset \,.$$

Si ha allora (grazie al Lemma 4.8) che:

$$m(E_1) = m(E_1 \cap E_2) + m(E_1 - E_2) \,. \tag{4.9}$$

In modo analogo si ricava che:

$$m(E_2) = m(E_2 \cap E_1) + m(E_2 - E_1). \tag{4.10}$$

Osserviamo che:

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1) \,. \tag{4.11}$$

Dato che $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ e dato che la differenza di insiemi misurabili è misurabile, si ha che $E_1 \cup E_2$ è rappresentabile come unione di insiemi misurabili disgiunti: ciò implica che $E_1 \cup E_2$ è misurabile. Si ha allora che:

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \cap E_2) + m(E_1 - E_2) + m(E_2 - E_1). \tag{4.12}$$

Sottraendo alla (4.12), le relazioni (4.9) e (4.10), l'asserto è dimostrato. ∎

c) Estensione della definizione di misura di Lebesgue

c) Per gli scopi che ci prefiggiamo è bene generalizzare ulteriormente la definizione di insieme misurabile prendendo in considerazione anche i sottoinsiemi non limitati di $\mathbb{R}^n$:

4.13 **Definizione.** Dato E insieme non limitato di $\mathbb{R}^n$, supponiamo che per ogni $r > 0$, si abbia che $E_r = E \cap B(0,r) \in \mathcal{M}$. In tale caso diciamo che E è misurabile secondo Lebesgue e si pone $m(E) = \lim_{r \to +\infty} m(E_r)$ (tale limite esiste in $\widetilde{\mathbb{R}}$ dato che la funzione $r \to m(E_r)$ è monotona non decrescente). ∎

4.14 **Osservazione.** D'ora in poi indicheremo con $\mathcal{M}_n$ (o, più semplicemente con $\mathcal{M}$) la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ verificanti la vecchia Definizione 4.1 oppure la nuova 4.13. ∎

4.15 **Osservazione.** Grazie alla precedente Definizione si ricava facilmente che ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ (limitato o non limitato) appartiene a $\mathcal{M}$ e $m(\Omega) = m_{\mathcal{A}}(\Omega)$. ∎

d) σ-additività

La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili e la misura m hanno ottime proprietà formali, che sono riassunte dal seguente fondamentale risultato (di cui abbiamo dato solo alcune tappe della dimostrazione):

4.16 **Teorema della σ-additività.** Si ha che, se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, allora $E_1 - E_2 \in \mathcal{M}$ e, se $E_1 \subset E_2$, si ha che $m(E_1) \leq m(E_2)$. Se inoltre E_i , $i \in \mathbb{N}$, è una famiglia numerabile di insiemi appartenenti a $\mathcal{M}$, si ha che:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M} \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M} \,,$$

e che:

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \,.$$

Se, inoltre, gli insiemi E_i sono a due a due disgiunti, allora:

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \,.$$

Se si ha che $E_i \subset E_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, allora:

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} m(E_i) = \sup\{m(E_i)\,,\, i \in \mathbb{N}\} \,.$$

Se infine si ha che $m(E_1) < +\infty$ e che $E_i \supset E_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, allora:

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} m(E_i) = \inf\{m(E_i)\,,\, i \in \mathbb{N}\} \,. \blacksquare$$

4.17 **Osservazione.** Siccome $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$, si ricava che $E \subset \mathbb{R}^n$ appartiene a $\mathcal{M}_n$ se e solo se $-E = \mathbb{R}^n - E$ appartiene a $\mathcal{M}_n$. ∎

4.18 **Osservazione.** Il fatto che una unione numerabile di insiemi misurabili sia ancora misurabile, è una proprietà molto importante (chiamata σ-additività) che ci permetterà di costruire, più avanti, una Teoria dell'integrale molto efficiente. Si può verificare che la σ-additività non è valida per la Teoria della misura secondo Jordan, come risulterà dall'Esempio che fra poco descriveremo. ∎

4.19 **Osservazione.** La definizione di misura secondo Lebesgue è stata introdotta attraverso molte tappe. Se avessimo impiegato direttamente la Definizione 4.1, senza imporre la restrizione che l'insieme E sia limitato (e dunque saltando la fase descritta nella Definizione 4.13), avremmo ottenuto una misura che non soddisfa le fondamentali proprietà contenute nel Teorema della σ-additività. ∎

4.20 **Osservazione.** È immediato verificare che $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$. Si verifica allora immediatamente che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è nisurabile se e solo se è misurabile il suo complementare $-E = \mathbb{R}^n - E$. ∎

4.21 **Esempio.** Consideriamo l'insieme:

$$E = \{x \in [0,1] \, : \, x \in \mathbb{Q}\} \, .$$

Tale insieme è unione numerabile di insiemi costituiti da un solo punto. Grazie al Teorema della σ-additività, si ha che $E \in \mathcal{M}_1$ (cioè E è misurabile secondo la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$) e inoltre $m_1(E) = 0$. Si verifica inoltre facilmente che la misura interna (risp esterna) secondo Jordan di E è data da $\underline{\mu}(E) = 0$ (risp. $\overline{\mu}(E) = 1$).

Dunque E è un insieme misurabile secondo Lebesgue, ma non secondo Jordan. In tal modo abbiamo verificato che la σ-additività non è valida per la misura secondo Jordan.

L'insieme:

$$F = \{x \in [0,1] \, : \, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\} \, ,$$

è ancora misurabile secondo Lebesgue (con $m(F) = 1$), ma non è misurabile secondo Jordan. ∎

4.22 **Esempio.** Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = 0\}$, si verifica facilmente che, posto $E_r = E \cap B(0, r) \in \mathcal{M}_2$, si ha che $m_2(E_r) = 0$. Utilizzando la Definizione 4.13, si ottiene che E è misurabile secondo Lebesgue con $m_2(E) = 0$.

In modo analogo si verifica che ogni retta di $\mathbb{R}^2$ parallela a uno degli assi coordinati è misurabile secondo Lebesgue e ha misura nulla. ∎

4.23 **Esempio.** L'insieme:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \in \mathbb{Q}\} \, ,$$

è unione numerabile di rette parallele all'asse x. Utilizzando l'Esempio 4.22, si ottiene che E è misurabile secondo Lebesgue e ha misura nulla.

Si vede inoltre che E non è misurabile secondo Jordan. ∎

4.24 **Esercizio.** Dati $E, F \subset \mathbb{R}^n$ con $F \subset E$, se $E \in \mathcal{M}$ e $m(E) = 0$, dimostrare che $F \in \mathcal{M}$ e $m(F) = 0$. ∎

e) Misura prodotto

d) Un aspetto della Teoria della misura che non abbiamo studiato e che, invece, dovrebbe contenere risultati interessanti, riguarda il legame fra le varie misure n-dimensionali. Dato, ad esempio, un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, sappiamo che la sua misura bi-dimensionale è data dal prodotto delle misure uni-dimensionali dei lati. Tale argomento verrà discusso più esaurientemente quando tratteremo il Teorema di Fubini, che, fra l'altro, ci permetterà di ridurre una misura n-dimensionale, a misure di dimensione inferiore. Per il momento, ci limitiamo a enunciare, senza dimostrazione, il seguente elementare risultato:

4.25 **Proposizione.** Se $E \in \mathcal{M}_n$ e $F \in \mathcal{M}_k$, allora $E \times F \in \mathcal{M}_{n+k}$ e:

$$m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) \, m_k(F) \, . \blacksquare$$

5 - DEFINIZIONE DI INTEGRALE

Abbiamo costruito, per gradi successivi, una Teoria della misura per la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Anche la definizione di integrale verrà introdotta gradualmente. A tale scopo, ricordiamo che se $E \subset \mathbb{R}^n$, la funzione $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che è uguale a 1 nei punti di E e 0 altrove, viene chiamata *funzione caratteristica* di E. Introduciamo ora una famiglia molto rudimentale di funzioni:

5.1 **Definizione.** Si dice *funzione semplice* definita in $\mathbb{R}^n$, una combinazione lineare (finita) di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e limitati di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti. Ciò vuol dire che, se φ è una funzione semplice di $\mathbb{R}^n$, allora esistono un numero finito di insiemi limitati e disgiunti $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{M}_n$ e un numero finito di costanti $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, \chi_{E_i}(x) \, .$$

dove χ_{E_i} è la funzione caratteristica dell'insieme E_i. Con tale rappresentazione, il numero:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, m(E_i).$$

viene chiamato integrale (su $\mathbb{R}^n$) della funzione (semplice) φ. Tale numero viene di solito indicato con le notazioni:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \ , \ \int \varphi(x)\, dx \ , \ \int \varphi.$$

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{S}_n$, o più semplicemente con $\mathcal{S}$, la famiglia delle funzioni semplici definite in $\mathbb{R}^n$. ∎

5.2 **Osservazione.** Se $\varphi \in \mathcal{S}$, allora si dimostra facilmente che l'integrale di φ è indipendente dalla particolare rappresentazione di φ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. ∎

Lasciamo al lettore la verifica della seguente proprietà di monotonia dell'integrale per le funzioni semplici:

5.3 **Proposizione.** Per ogni $\varphi \, , \, \psi \in \mathcal{S}$ si ha che:

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \, , \, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx \, . \blacksquare$$

Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Introduciamo le sotto-famiglie di $\mathcal{S}_n$ così definite:

$$\mathcal{S}_n^+(f) = \{\varphi \in \mathcal{S} : \varphi(x) \geq f(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathcal{S}_n^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{S} : \varphi(x) \leq f(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n\};$$

$\mathcal{S}_n^+(f)$ (risp. $\mathcal{S}_n^-(f)$) è la famiglia delle funzioni semplici che maggiorano (risp. minorano) la funzione f. Quando non ci sia pericolo di ambiguità, scriveremo, più semplicemente, $\mathcal{S}^+(f)$ e $\mathcal{S}^-(f)$. Tali famiglie possono essere anche vuote (ad esempio, nel caso in cui la funzione f sia una costante non nulla oppure una funzione non limitata). Nel seguito avremo bisogno della seguente:

5.4 **Definizione.** Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, viene chiamato *supporto* di f la chiusura in $\mathbb{R}^n$ del seguente insieme:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq 0\}.$$

Il supporto di f verrà indicato con $\mathrm{supp}\,(f)$. ∎

Daremo ora la definizione di integrale secondo Lebesgue in un caso particolarmente semplice, riservandoci più avanti di darne una estensione. Diamo ora la fondamentale:

5.5 **Definizione.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e a supporto compatto. Definiamo *integrale superiore* (risp. *inferiore*) il numero reale:

$$\int^* f\,dx = \inf\left\{\int \varphi\,dx\ ,\ \varphi \in \mathcal{S}^+(f)\right\}\ ,\ (\text{risp.}\quad \int_* f\,dx = \sup\left\{\int \varphi\,dx\ ,\ \varphi \in \mathcal{S}^-(f)\right\}).$$

Se l'integrale superiore e quello inferiore di f coincidono, la funzione f si dice *integrabile* secondo Lebesgue (o, più semplicemente, *integrabile*) e il valore comune dell'integrale superiore e di quello inferiore viene chiamato *integrale* secondo Lebesgue che viene indicato con le notazioni:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n\ ,\quad \int f(x)\,dx\ ,\quad \int f\ .$$

La famiglia delle funzioni integrabili secondo Lebesgue verrà, nel seguito, indicata con **I**. ∎

5.6 **Osservazione.** Notiamo che l'ipotesi $\mathrm{supp}\,(f)$ compatto equivale ad imporre che la funzione f sia nulla fuori da un limitato di $\mathbb{R}^n$.

È facile inoltre verificare che, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è limitata e a supporto compatto, allora $\mathcal{S}^+(f)$ e $\mathcal{S}^-(f)$ sono entrambe non vuote. Ciò significa che la Definizione 5.5 ha senso. ∎

5.7 **Osservazione.** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e a supporto compatto, è facile verificare che (utilizzando la Proposizione 5.3):

$$\int_* f\,dx \le \int^* f\,dx\ . \blacksquare$$

5.8 **Osservazione.** È immediato provare che ogni funzione semplice $\varphi \in \mathcal{S}$ è integrabile secondo Lebesgue e che il suo integrale (secondo Lebesgue) coincide con il valore dato dalla Definizione 5.1. Come caso particolare, osserviamo inoltre che, se $E \in \mathcal{M}_n$ è un sottoinsieme misurabile limitato di $\mathbb{R}^n$, allora la funzione caratteristica χ_E, essendo una funzione semplice, è integrabile e inoltre si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\,dx = m_n(E)\ . \blacksquare$$

La definizione di integrabilità può essere espressa in molti modi equivalenti. Immediata è la dimostrazione del seguente risultato:

5.9 **Proposizione.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata e a supporto compatto. Si ha che f è integrabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{S}^+(f), \exists \psi \in \mathcal{S}^-(f)\ :\ \int \varphi - \int \psi) < \varepsilon\ . \blacksquare$$

5.10 **Osservazione.** Facciamo ora un confronto fra la presente Teoria dell'integrale e la Teoria di Riemann. Osserviamo che nella costruzione dell'integrale secondo Riemann si sfruttava la medesima idea quì utilizzata, ma a partire da una famiglia di funzioni semplici estremamente più povera, in quanto era costituita dalle combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli (invece che di insiemi misurabili). Una famiglia più ricca è, evidentemente, in grado di approssimare meglio: a partire da questo elementare principio si verifica facilmente che ogni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, limitata e a supporto compatto, che sia integrabile secondo Riemann, è anche integrabile secondo Lebesgue. Ciò significa che vengono conservati, dalla nuova teoria, tutti i risultati riguardanti la Teoria dell'integrale secondo Riemann per le funzioni di una variabile (integrabilità delle funzioni continue,...).

Si possono costruire facilmente esempi di funzioni integrabili secondo Lebesgue e non integrabili secondo Riemann. Ad esempio la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da:

$$f(x)=\begin{cases}1\,, & \text{se } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\,,\\ 0\,, & \text{altrove.}\end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann, ma essendo f funzione caratteristica dell'insieme $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, che è misurabile, limitato e di misura nulla (secondo Lebesgue), si ricava che f è integrabile su $\mathbb{R}$ e che il suo integrale è uguale a zero (vedere anche la Osservazione 5.8).

Analogamente si verifica che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da:

$$f(x)=\begin{cases}1\,, & \text{se } x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\,,\\ 0\,, & \text{altrove.}\end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann, ma è integrabile (secondo Lebesgue) e il suo integrale è uguale a uno. ∎

Il seguente Teorema descrive le prime proprietà dell'integrale secondo Lebesgue:

5.11 **Teorema.** Per ogni $f,g\in\mathbf{I}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ si ha che:

$$f+g\ ,\ \lambda f\ ,\ f^+\ ,\ f^-\ ,\ |f|\ ,\ f\vee g\ ,\ f\wedge g\in\mathbf{I}\,,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\lambda f(x)\,dx=\lambda\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)+g(x))\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx\,,$$

$$f(x)\le g(x)\,,\,\forall x\in\mathbb{R}^n\quad\Rightarrow\quad\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx\le\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx\,.$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx\,.\ \blacksquare$$

Dimostrazione: Diamo solo un cenno della dimostrazione in quanto questa può essere condotta secondo schemi molto abituali.

Si dimostra l'enunciato per le funzioni semplici. Utilizzando poi la definizione di integrale 5.5 oppure la Proposizione 5.9, si arriva facilmente all'asserto. ∎

6 - FUNZIONI MISURABILI

a) Definizione di funzione misurabile

Introdurremo ora una famiglia di funzioni che avrà un ruolo importante nella Teoria dell'integrale di Lebesgue.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ e $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Poniamo (con la convenzione che $-\infty < t < +\infty$ per ogni $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$):

$$f_t^{(>)} = f^{-1}\left(]t, +\infty]\right)\ ,\ f_t^{(\geq)} = f^{-1}\left([t, +\infty]\right),$$

$$f_t^{(<)} = f^{-1}\left([-\infty, t[\right)\ ,\ f_t^{(\leq)} = f^{-1}\left([-\infty, t]\right).$$

Ricordiamo che abbiamo indicato con $\mathcal{M}_n$ la famiglia dei sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di $\mathbb{R}^n$. Diamo ora la importante:

6.1 **Definizione.** Data $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$, si dice che f è *misurabile secondo* Lebesgue se, per ogni $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $f_t^{(>)} \in \mathcal{M}_n$, cioè $f_t^{(>)}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue. La famiglia delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ misurabili secondo Lebesgue, verrà nel seguito indicata con $\mathbf{M}_n$. ∎

6.2 **Proposizione.** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f \in \mathbf{M}_n$.

Dimostrazione: Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha che l'immagine inversa degli aperti di $\mathbb{R}$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$. Dato che gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue, si ha facilmente l'asserto. ∎

La definizione di misurabilità può essere formulata in molti modi differenti, come risulta anche dalla seguente:

6.3 **Proposizione.** Se $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$, allora le proprietà seguenti sono equivalenti:
(a) $f \in \mathbf{M}_n$,
(b) $\forall t \in \widetilde{\mathbb{R}}\ ,\ f_t^{(\leq)} \in \mathcal{M}_n$,
(c) $\forall t \in \widetilde{\mathbb{R}}\ ,\ f_t^{(<)} \in \mathcal{M}_n$,
(d) $\forall t \in \widetilde{\mathbb{R}}\ ,\ f_t^{(\geq)} \in \mathcal{M}_n$,

Dimostrazione. Sia $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Osserviamo che:

$$f_t^{(\leq)} = \mathbb{R}^n - f_t^{(>)}\ ,\ f_t^{(\geq)} = \mathbb{R}^n - f_t^{(<)}.$$

Ricordando che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se lo è il suo complementare (vedere l'Osservazione 4.20), si ricava che $(a) \Longleftrightarrow (b)$ e che $(c) \Longleftrightarrow (d)$. Osserviamo inoltre che ($t \in \widetilde{\mathbb{R}}$):

$$f_t^{(>)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_{t+1/k}^{(\geq)}\ ,\ f_t^{(<)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_{t-1/k}^{(\leq)}.$$

Ciò significa, grazie al Teorema della σ-additività, che $(b) \Longrightarrow (c)$ e che $(d) \Longrightarrow (a)$. L'asserto del Teorema è dunque provato come risulta dal seguente schema dei risultati ottenuti:

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Longleftrightarrow & (b) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (d) & \Longleftrightarrow & (c) \end{array}$$

∎

b) Proprietà delle funzioni misurabili

Prima di dimostrare le principali proprietà delle funzioni misurabili, proviamo il seguente:

6.4 **Lemma.** Se $h, \ell \in \mathbf{M}_n$, allora:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \ h(x) > \ell(x)\} \in \mathcal{M}_n .$$

Dimostrazione: Poniamo:

$$F = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > r\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ell(x) < r\}] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[h_r^{(>)} \cap \ell_r^{(<)} \right] .$$

Grazie al fatto che $h, \ell \in \mathbf{M}_n$ e al Teorema della σ-additività, si ha che $F \in \mathcal{M}_n$. Se dimostriamo che $E = F$, allora l'asserto è provato. Se $x \in E$, allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $h(x) > r > \ell(x)$: si ha allora che:

$$x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > r > \ell(x)\}$$

e, dunque, $x \in F$, da cui $E \subset F$. Viceversa, è facile verificare che, se $x \in F$, allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $h(x) > r > \ell(x)$, da cui $x \in E$. Si ha dunque che $E = F$. ∎

Nel seguito la seguente nozione avrà una notevole importanza

6.5 **Definizione.** Date $f, g : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$, si dice che $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ (o anche che $f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$), se l'insieme in cui le due funzioni sono diverse è misurabile con misura nulla. ∎

Riassumiamo ora le principali proprietà della famiglia delle funzioni misurabili:

6.6 **Teorema.** Si ha che:
(a) se $f \in \mathbf{M}_n$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $f + c\,,\ c\,f \in \mathbf{M}_n$,
(b) se $f, g \in \mathbf{M}_n$, allora $f + g\,,\ f\,g \in \mathbf{M}_n$,
(c) se $f_i \in \mathbf{M}_n$ $(i \in \mathbb{N})$ e se poniamo:

$$m^*(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \ ,\ m_*(x) = \inf_{i \in \mathbb{N}} f_i(x),$$

allora $m^*\,,\ m_* \in \mathbf{M}_n$,
(d) se $f\,,\ g \in \mathbf{M}_n$, allora $f \vee g\,,\ f \wedge g \in \mathbf{M}_n$,
(e) se $f \in \mathbf{M}_n$, allora $f^+\,,\ f^-\,,\ |f| \in \mathbf{M}_n$,
(f) se $f_i \in \mathbf{M}_n$ $(i \in \mathbb{N})$ e se poniamo:

$$\overline{n}\,(x) = \max_{i \to \infty} \lim \ f_i(x) \ ,\ \underline{n}\,(x) = \min_{i \to \infty} \lim \ f_i(x),$$

allora $\overline{n}\,,\ \underline{n} \in \mathbf{M}_n$.

(g) se $f_i \in \mathbf{M}_n$ $(i \in \mathbb{N})$ e $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ sono tali che:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ \exists \lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)\,,$$

allora anche $f \in \mathbf{M}_n$.

(h) se $f, g : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ con $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}^n$, allora si ha che $f \in \mathbf{M}_n$ se e solo se $g \in \mathbf{M}_n$.

Dimostrazione: La proprietà (a) è di verifica immediata.

Date $f\,, g \in \mathbf{M}_n$, verifichiamo che $f + g \in \mathbf{M}_n$. Se $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) + g(x) > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t - g(x)\}$$

e utilizzando il Lemma 6.4 con $h(x) = f(x)$ e $\ell(x) = t - g(x)$, si ottiene che $f + g \in \mathbf{M}_n$. Verifichiamo ora che, se $f \in \mathbf{M}_n$, allora $f^2 \in \mathbf{M}_n$. Dato $t \geq 0$, se $f^2(t) > t$, segue che $|f(t)| > \sqrt{t}$. Dunque

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f^2(x) > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \sqrt{t}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < -\sqrt{t}\} \in \mathcal{M}_n;$$

se, invece, $t < 0$, allora:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f^2(x) > t\} = \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n\,,$$

e dunque $f^2 \in \mathbf{M}_n$. Grazie alla seguente identità:

$$f\,g = [(f + g)^2 - (f - g)^2]/4,$$

si ottiene anche che, se $f\,,\ g \in \mathbf{M}_n$, allora $f\,g \in \mathbf{M}_n$. La affermazione (b) è dimostrata.

Dimostriamo la asserzione (c). Dato $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) > t\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) > t\};$$

infatti x appartiene al primo insieme se e solo se esiste $i \in \mathbb{N}$ tale $f_i(x) > t$ e ciò equivale all'appartenenza di x al secondo insieme: siccome il secondo insieme appartiene a $\mathcal{M}_n$ (grazie al Teorema della σ-additività) si ha che $m^* \in \mathbf{M}_n$. In modo del tutto analogo si prova che $m_* \in \mathbf{M}_n$.

Le asserzioni (d) sono conseguenza di (c).

Supponiamo ancora che $f\,,\ g \in \mathbf{M}_n$. Dato che $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = -(f \wedge 0)$, si ha che $f^+\,,\ f^- \in \mathbf{M}_n$. Ricordando che $|f| = f^+ + f^-$, è dimostrata anche la asserzione (e).

Osserviamo infine che:

$$\max\lim_{i\to\infty} f_i(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} [\sup_{i>k} f_i(x)]$$

e dunque anche il massimo limite (analogamente il minimo limite) di una successione di funzioni misurabili è una funzione misurabile (abbiamo dunque provato la parte (f)).

La parte (g) del Teorema è conseguenza della parte (f).

Si ha che (per ogni $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$):

$$(f_t^{(>)} - g_t^{(>)}) \cup (g_t^{(>)} - f_t^{(>)}) \subset \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ f(x) \neq g(x)\,\}\,.$$

La parte (h) del Teorema è allora conseguenza immediata dell'Esercizio 4.24.

Il Teorema è completamente dimostrato. ∎

6.7 **Osservazione.** Il Teorema appena dimostrato, ci dice che la classe $\mathbf{M}_n$ delle funzioni misurabili è chiusa rispetto alle principali operazioni che possiamo eseguire su di essa. In particolare, sottolineiamo che, grazie alla parte (g), si ottiene che il limite puntuale di funzioni misurabili è ancora una funzione misurabile. ∎

c) Funzioni misurabili e integrabilità

Discuteremo ora i legami fra la nozione di funzione misurabile e quella di integrale secondo Lebesgue. Sarà trattato, per semplicità, solo il caso in cui:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ,\ f \geq 0\ ,\ \text{limitata e a supporto compatto.} \tag{6.1}$$

Per tali funzioni poniamo inoltre:

$$\Gamma(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\},$$

cioè $\Gamma(f)$ è il sottografico di f. Premettiamo il:

6.8 **Lemma.** Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione semplice non negativa, allora il sottografico $\Gamma(\varphi)$ di φ è misurabile e inoltre:

$$m_{n+1}(\Gamma(\varphi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx.$$

Dimostrazione: Si ha che $\varphi = \sum_{k=1}^m \lambda_k\, \chi_{E_k}$ con $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ e gli insiemi E_k sono sotto-insiemi misurabili e limitati di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti. Si ha che

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi) &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t < \sum_{k=1}^m \lambda_k\, \chi_{E_k}(x)\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^m \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E_k : 0 < t < \lambda_k\} = \bigcup_{k=1}^m E_k \times]0, \lambda_k[.\end{aligned}$$

Dato che il prodotto cartesiano di insiemi misurabili è ancora misurabile (vedere la Proposizione 4.25), si ha che $\Gamma(\varphi) \in \mathcal{M}_{n+1}$. Dato che gli insiemi $E_k \times]0, \lambda_k]$ sono a due disgiunti, si ha inoltre che:

$$m_{n+1}(\Gamma(\varphi)) = \sum_{k=1}^m \lambda_k\, m_n(E_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx\ . \quad ∎$$

Vale il:

6.9 **Teorema.** Se f è una funzione verificante la condizione (6.1), le seguenti condizioni sono equivalenti:
(a) $f \in \mathbf{M}_n$, cioè f è misurabile,
(b) $f \in \mathbf{I}_n$, cioè f è integrabile,
(c) $\Gamma(f) \in \mathcal{M}_{n+1}$, cioè il sottografico è misurabile.

Sotto una di tali condizioni, si ha inoltre:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = m_{n+1}(\Gamma(f))\,. \tag{6.2}$$

Dimostrazione: $(a) \Rightarrow (b)$. Siccome f è limitata, esiste $H > 0$ tale che $0 \le f(x) < H$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$. Dato $r \in \mathbb{N}$, suddividiamo l'intervallo $]0, H]$ in r intervalli uguali dati da:

$$I_1 =]0, \frac{H}{r}], \ldots, I_k =](k-1)\,\frac{H}{r}, k\,\frac{H}{r}], \ldots, I_r =](r-1)\,\frac{H}{r}, H]\,.$$

Poniamo inoltre $E_k = f^{-1}(I_k)$. Dato che, per ipotesi, f è misurabile, si ha che $E_k \in \mathcal{M}_n$, in quanto

$$E_k = f^{-1}(](k-1)\frac{H}{r}, +\infty]) - f^{-1}(]k\frac{H}{r}, +\infty])$$

e dunque $E_k \in \mathcal{M}_n$, come differenza di insiemi misurabili. Si ha inoltre che $E_k \subset \mathrm{supp(f)}$, che gli E_k sono a due a due disgiunti e che:

$$(k-1)\,\frac{H}{r} < f(x) \le k\,\frac{H}{r} \quad , \quad \forall x \in E_k\,. \tag{6.3}$$

Consideriamo le funzioni:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{r} k\,\frac{H}{r}\,\chi_{E_k}(x)\ ,\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{r} (k-1)\,\frac{H}{r}\,\chi_{E_k}(x).$$

Grazie alla (6.3), si ha che $\varphi \in \mathcal{S}^+(f)$ e $\psi \in \mathcal{S}^-(f)$. Si ha ancora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi - \psi) = \frac{H}{r} \sum_{k=1}^{r} m(E_k).$$

Siccome gli insiemi E_k sono a due a due disgiunti e sono contenuti nel supporto di f (che per ipotesi è compatto e dunque limitato), utilizzando la Proposizione 5.9 e scegliendo r sufficientemente grande, si ottiene che (a) $\Rightarrow$ (b) .

$(b) \Rightarrow (c)$. Grazie alla integrabilità di f, dato $\varepsilon > 0$, si possono determinare due funzioni semplici $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_n(f)$ tali che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi - \psi) < \varepsilon, \tag{6.4}$$

$$\psi \le f \le \varphi\ , \quad \text{da cui } \Gamma(\psi) \subset \Gamma(f) \subset \Gamma(\varphi). \tag{6.5}$$

Si può supporre che $\psi \ge 0$, perchè, altrimenti, si potrebbe sostituire ψ con $\psi \vee 0$, mantenendo il comportamento dato dalle (6.4) e (6.5). Per la monotonia della misura interna e della misura esterna, si ha allora:

$$\underline{m}_{\,n+1}(\Gamma(\psi)) \le \underline{m}_{\,n+1}(\Gamma(f)) \le \overline{m}_{n+1}(\Gamma(f)) \le \overline{m}_{n+1}(\Gamma(\varphi)).$$

Ricordando il Lemma 6.8, si ha anche:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \leq \underline{m}(\Gamma(f)) \leq \overline{m}(\Gamma(f)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Grazie alla (6.4), si ha che $0 \leq \overline{m}(\Gamma(f)) - \underline{m}(\Gamma(f)) < \varepsilon$. Dato che ε è arbitrario, si allora che $\underline{m}(\Gamma(f)) = \overline{m}(\Gamma(f))$ e così abbiamo dimostrato la implicazione (b) $\Rightarrow$ (c) e la relazione (6.2).

(c) $\Rightarrow$ *(a)*. Sapendo che $\Gamma(f) \in \mathcal{M}_{n+1}$, si deve dimostrare che f è misurabile.

Siccome $\Gamma(f)$ è misurabile e limitato, dato $N \in \mathbb{N}$ esiste un compatto K^N tale che:

$$K^N \subset \Gamma(f) \quad , \quad 0 \leq m(\Gamma(f)) - m(K^N) < 1/N\,. \tag{6.6}$$

Eventualmente sostituendo K^N con $\cup_{j=1}^N K^j$, si può supporre che:

$$K^N \subset K^{N+1}\ ,\ N \in \mathbb{N}\,. \tag{6.7}$$

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$K_x^N = \{t \in \mathbb{R}\ :\ (x,t) \in K^N\}\,, \tag{6.8}$$

$$f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \text{ definita da : }\ f_N(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } K_x^N = \emptyset, \\ \max K_x^N\,, & \text{se } K_x^N \neq \emptyset. \end{cases} \tag{6.9}$$

Si ha ovvianente che:

$$f_N(x) \leq f_{N+1}(x) \leq f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n\ ,\ N \in \mathbb{N}\,, \tag{6.10}$$

$$K^N \subset \Gamma(f_N) \subset \Gamma(f)\,, \tag{6.11}$$

Si ha anche che le funzioni f_N sono misurabili. Osserviamo infatti che, se $a \leq 0$, si ha che:

$$f_N^{-1}([a,+\infty[) = \mathbb{R}\,. \tag{6.12}$$

Sia $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ definita da $\pi(x,t) = x$. Dimostriamo che, se $a > 0$, si ha che:

$$f_N^{-1}([a,+\infty[) = \pi\big(K^N \cap (\mathbb{R}^n \times [a,+\infty[)\big)\,. \tag{6.13}$$

Si ha infatti che:

$$\begin{aligned} &x \in \pi\big(K^N \cap (\mathbb{R}^n \times [a,+\infty[)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}\ :\ (x,t) \in K^N \cap (\mathbb{R}^n \times [a,+\infty[\quad \Leftrightarrow \\ &\exists t \in \mathbb{R}\ :\ (x,t) \in K^N \text{ e } t \geq a \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \geq a\ :\ (x,t) \in K^N \quad \Leftrightarrow \\ &\exists t \geq a\ :\ t \in K_x^N \quad \Leftrightarrow \quad f_N(x) \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \in f_N^{-1}([a,+\infty[)\,. \end{aligned}$$

Siccome K^N è un compatto, si che $K^N \cap (\mathbb{R}^n \times [a,+\infty[)$ è un compatto. Siccome π è una funzione continua, si ricava che $\pi\big(K^N \cap (\mathbb{R}^n \times [a,+\infty[)\big)$ è un compatto (e dunque un insieme misurabile). Grazie alle relazioni (6.12) e (6.13), si ricava che f_N è misurabile.

Grazie alla (6.10), esiste $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \widetilde{f}(x) \leq f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{6.14}$$

Si ha allora che la funzione $\widetilde{f}$ è misurabile e, grazie alla parte del teorema già provata, si ha che $\Gamma(\widetilde{f})$ è misurabile.

Grazie alla (6.11), si ha che:

$$K^N \subset \Gamma(\widetilde{f}) \subset \Gamma(f)) \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

e dunque

$$m(K^N) \leq m(\Gamma(\widetilde{f})) \leq m(\Gamma(f)) \,.$$

Grazie alla (6.6), si ha che

$$m(\Gamma(\widetilde{f})) = m(\Gamma(f)) \,. \tag{6.15}$$

Dimostriamo che $f \equiv \widetilde{f}$ q.o. A tale scopo, dato $\lambda \geq 0$, poniamo

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) - \widetilde{f}(x) > \lambda\} \,.$$

Si ha che:

$$\widetilde{f}(x) + \lambda \chi_{E_\lambda}(x) \leq f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{6.16}$$

e dunque

$$\Gamma(\widetilde{f} + \lambda \chi_{E_\lambda}) \subset \Gamma(f) \,. \tag{6.17}$$

D'altra parte si ha che $\widetilde{f} + \lambda\chi_{E_\lambda}$ è integrabile e che

$$m(\Gamma(f)) \geq \int (\widetilde{f} + \lambda\chi_{E_\lambda}) = \int \widetilde{f} + \lambda m(E_\lambda) = m(\Gamma(\widetilde{f})) + \lambda m(E_\lambda) \,.$$

Si ha dunque che $m(E_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda > 0$. Siccome $E_0 = \cup_{k=1}^{\infty} E_{1/k}$, si ricava che E_0 è misurabile e che $m(E_0) = 0$. Utilizzando la relazione (6.14), si ha che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) < \widetilde{f}(x)\}$$

è vuoto. Si ha dunque che $f \equiv \widetilde{f}$ q.o. Grazie alla asserzione (h) del Teorema 6.6 si ha che f è misurabile, da cui l'asserto. ∎

6.10 **Osservazione.** Con le ipotesi del Teorema 6.9 si ha che le condizioni (a) e (b) sono equivalenti fra loro senza imporre la condizione $f \geq 0$. Infatti se f è misurabile anche le funzioni $f^\pm$ sono misurabili (grazie al Teorema 6.6), da cui (grazie al Teorema 6.9) le funzioni $f^\pm$ sono integrabili e dunque $f = f^+ = f^-$ è integrabile (grazie al Teorema 5.11).

In modo analogo si verifica che se f è integrabile, allora f è misurabile. ∎

7 - ESTENSIONE DELLA NOZIONE DI INTEGRALE

a) Prima estensione

a) Per ora abbiamo definito la nozione di integrabilità e di integrale nel caso in cui la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia limitata e a supporto compatto. La estensione, che ora daremo, verrà effettuata con un procedimento abituale di *troncatura.* Dati $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$, poniamo

$$f_\lambda(x) = \big[f(x) \wedge \lambda\big]\, \chi_{B(0,\lambda)}(x) = \begin{cases} f(x) \wedge \lambda & \text{se } x \in B(0,\lambda) \\ 0 & \text{se } x \notin B(0,\lambda) \end{cases}$$

cioè f_λ è nulla fuori dalla bolla $B(0,\lambda)$ e uguale al minimo fra f e λ nella bolla $B(0,\lambda)$. Osserviamo che, se $f \geq 0$, allora la funzione f_λ è limitata e a supporto compatto e, dunque, ad essa possiamo applicare la definizione di integrabilità (5.5). Possiamo ora dare la seguente estensione della Definizione 5.5:

7.1 **Definizione.** La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ viene detta *integrabile* secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ se:

$$(f^+)_\lambda\,,\ (f^-)_\lambda \in \mathbf{I}_n\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

e sono finiti i seguenti limiti:

$$L_+ = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f^+)_\lambda\, dx\ ,\ \ L_- = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f^-)_\lambda\, dx\,. \tag{7.1}$$

Nel caso in cui almeno uno di questi limiti sia finito si dirà che f è integrabile in senso generalizzato (o, più semplicemente, che f è g-integrabile).

Si pone inoltre (con le convenzioni $+\infty - a = +\infty$, $a - (+\infty) = -\infty$, per ogni $a \in \mathbb{R}$):

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = L_+ - L_-. \tag{7.2}$$

Nel caso in cui $L_+ = L_- = +\infty$, diremo che f è *non integrabile.* ∎

7.2 **Osservazione.** Notiamo che i due limiti L_+ , L_- esistono grazie alla monotonia rispetto a λ degli integrali che compaiono nella relazione (7.1)

∎

7.3 **Osservazione.** La g-integrabilità deve essere intesa come una estensione della integrabilità (ogni funzione integrabile è anche g-integrabile). Si ha infatti che le funzioni integrabili possono essere caratterizzate come le funzioni g-integrabili con integrale reale. ∎

b) Seconda estensione

Consideriamo ora l'estensione al caso in cui la funzione f sia definita su un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^n$.

7.4 **Definizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è *integrabile* (risp. *g-integrabile*, *non integrabile*) su E se la funzione:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \tag{7.3}$$

è integrabile (risp. g-integrabile, non integrabile) su $\mathbb{R}^n$. In tal caso, si pone:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\,dx\,. \blacksquare$$

7.5 **Osservazione.** L'Osservazione 7.3 si generalizza alla presente situazione. ∎

7.6 **Esercizio.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Se $m_n(E) = 0$ allora f è integrabile su E e

$$\int_E f(x)\,dx = 0\,. \blacksquare$$

c) Prime Proprietà

A partire dalle precedenti Definizioni si ha facilmente il seguente

7.7 **Teorema.** Dati $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che f è una funzione integrabile su E se e solo se f^+ e f^- sono funzioni integrabili su E. ∎

Estendiamo anche la nozione di funzione misurabile:

7.8 **Definizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Si dice che f è *misurabile* su E se $\widetilde{f} \in \mathbf{M}_n$ dove la funzione $\widetilde{f}$ è definita in (7.3). ∎

È facile la verifica della:

7.9 **Proposizione.** Se $E \in \mathcal{M}_n$ si ha allora che $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, se e solo se:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \{x \in E : f(x) > \lambda\} \in \mathcal{M}_n\,. \blacksquare$$

7.10 **Osservazione.** Si estendono, con gli opportuni adattamenti, i risultati contenuti nel Teorema 5.11 e nel Teorema 6.6. ∎

Anche i risultati contenuti nel Teorema 6.9 si possono generalizzare. Diamo un enunciato preciso, omettendone la dimostrazione:

7.11 **Teorema.** Supponiamo che $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, con $f(x) \geq 0\ ,\ \forall x \in E$. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:
(a) f è misurabile su E.
(b) f è g-integrabile su E,
(c) il sottografico di f

$$\Gamma(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

appartiene a $\mathcal{M}_{n+1}$. Sotto una di tali condizioni, si ha inoltre:

$$\int_E f(x)\,dx = m_{n+1}(\Gamma(f))\,. \blacksquare$$

7.12 **Osservazione.** Nell'enunciato del precedente Teorema la condizione $f \geq 0$ è essenziale perchè si abbia equivalenza fra misurabilità e g-integrabilità. Se prendiamo infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$, si verifica facilmente che f è misurabile, ma non è g-integrabile. ∎

Conseguenza immediata del precedente Teorema è il seguente:

7.13 **Corollario.** Se $E \subset \mathbb{R}^n$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
(a) la funzione χ_E è misurabile,
(b) la funzione χ_E caratteristica di E è g-integrabile,
(c) E è misurabile rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
Sotto una di tali condizioni, si ha inoltre:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\, dx = \int_E 1\, dx = m_n(E)\,. \blacksquare$$

Se la funzione f non verifica la condizione $f \geq 0$, è spesso utile applicare il Teorema 7.11 separatamente a f^+ e f^-. Utilizzando tale metodo, il seguente risultato stabilisce un legame fra misurabilità e g-integrabilità senza la restrizione $f \geq 0$.

7.14 **Lemma.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, $f\,,\, g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, con g integrabile su E e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$. Sono allora equivalenti le condizioni: a) f misurabile, b) f g-integrabile.
Sotto una di tali condizioni si ha inoltre che $\int_E f(x)\, dx < +\infty$.

Dimostrazione: Se f è misurabile, si ha f^+, f^- sono misurabili e dunque, grazie al Teorema 7.11, si ha che f^+, f^- sono g-integrabili. Si ha inoltre che $f^+(x) \leq g^+(x)$ per ogni $x \in E$. Per la monotonia dell'integrale si ha allora

$$\int_E f^+(x)\, dx \leq \int_E g^+(x)\, dx < +\infty\,.$$

Dunque f è g-integrabile e

$$\int_E f(x)\, dx \leq \int_E f^+(x)\, dx < +\infty\,.$$

In modo simile si verifica che se f è g-integrabile allora f è misurabile. $\blacksquare$

In modo completamente analogo si dimostra anche il seguente criterio

7.15 **Lemma.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, $f\,,\, g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, con g integrabile su E e $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in E$. Sono allora equivalenti le condizioni: a) f misurabile, b) f g-integrabile.
Sotto una di tali condizioni si ha inoltre che $\int_E f(x)\, dx > -\infty$. $\blacksquare$

Conseguenza immediata dei precedenti Lemmi è la seguente importante condizione sufficiente per la integrabilità:

7.16 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile su E. Se esiste una funzione $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E, in modo tale che $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in E$, allora anche f è integrabile su E. $\blacksquare$

È fondamentale anche la seguente caratterizzazione dell'integrabilità:

7.17 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile su E. Si ha allora che la funzione f è integrabile su E se e solo se la funzione $|f|$ è integrabile su E.

Dimostrazione: Grazie al Teorema 7.16, se $|f|$ è integrabile, si ottiene subito che anche f è integrabile.

Viceversa, se f è integrabile (grazie alla definizione di integrabilità data nella presente Sezione) si ricava che sono integrabili le funzioni f^+ e f^- e dunque è integrabile la funzione $f^+ + f^- = |f|$. ∎

7.18 **Osservazione.** Il precedente risultato costituisce una importante differenza fra l'integrale secondo Riemann e quello secondo Lebesgue. È facile infatti verificare che la funzione:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ definita da : } \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann, mentre la funzione $|f| \equiv 1$ è invece integrabile secondo Riemann. La equivalenza asserita nel Teorema 7.17 non è dunque vera nel caso dell'integrale secondo Riemann. ∎

7.19 **Teorema.** Siano E , E_1 , $E_2 \in \mathcal{M}_n$ tali che $E_1 \cup E_2 = E$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Si ha allora che la funzione $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è integrabile su E se e solo se le funzioni $f_i = f\,\chi_{E_i}$ $(i = 1, 2)$ sono integrabili su E_i. Si ha inoltre che:

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f\,.$$

Dimostrazione: Come nella dimostrazione del Teorema precedente non è limitativo supporre che: $f : \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}$ e che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Si ha allora che $f = f_1 + f_2$. Se la funzione f è integrabile (e dunque misurabile), si ricava che le funzioni f_i sono misurabili $(i = 1, 2)$ e che $0 \leq f_i \leq f$. Si ha allora (grazie al Teorema 7.16) che le funzioni f_i sono integrabili e che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f_2\,.$$

La asserzione inversa viene condotta in modo simile. ∎

d) Funzioni uguali quasi ovunque

Introduciamo la definizione seguente (che generalizza quella data in 6.5):

7.20 **Definizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f, g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Si dice che $f = g$ (q.o. in E) (o anche che $f = g$ quasi ovunque in E), se l'insieme in cui le due funzioni sono diverse è misurabile con misura nulla. ∎

Dati $E \in \mathcal{M}_n$ e $f, g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, la relazione $f = g$ (q.o. in E) è ovviamente una relazione di equivalenza. Si può inoltre osservare che molte proprietà sono invarianti rispetto a tale relazione. Vale, ad esempio, il seguente risultato di facile dimostrazione:

7.21 **Proposizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f, g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, tali che $f = g$ (q.o. in E). Se f è g-integrabile su E, allora anche g è g-integrabile su E e inoltre:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx\,. \blacksquare$$

Come evidente conseguenza di tale risultato, si ha che se $f = 0$ (q.o. in E), allora f è integrabile su E con integrale uguale a zero. Non vale evidentemente il viceversa. Si ha però:

7.22 **Proposizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Se f è integrabile su E e $\int_E f(x)\,dx = 0$, allora $f = 0$ (q.o. in E).

Dimostrazione: Sia $\lambda \geq 0$ e si ponga $H_\lambda = \{x \in E : f(x) > \lambda\} = f^{-1}(]\lambda, +\infty])$. Grazie alla Proposizione 7.9 e al Teorema 7.11, si ha che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $H_\lambda \in \mathcal{M}_n$. Se dimostriamo che $m(H_0) = 0$, l'asserto è provato. Si ha che $f(x) \geq \lambda\,\chi(H_\lambda)$ per ogni $x \in E$, da cui ($\lambda > 0$):

$$0 = \int_E f\,dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \chi(H_\lambda)\,dx = \lambda\, m(H_\lambda) \geq 0$$

e dunque $m(H_\lambda) = 0$, per ogni $\lambda > 0$. Siccome $H_0 = \cup_{k\in\mathbb{N}} H_{1/k}$, grazie al Teorema della σ-additività, si ha che $m(H_0) = 0$ e dunque l'asserto. ∎

Abbiamo ammesso che una funzione integrabile possa assumere valori $\pm\infty$. Come è prevedibile, vale, però, la seguente:

7.23 **Proposizione.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e sia $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile su E. Se si pone:

$$F_{+\infty} = \{x \in E : f(x) = +\infty\}\ ,\ F_{-\infty} = \{x \in E : f(x) = -\infty\},$$

si ha allora che $F_{+\infty}\,,\, F_{-\infty} \in \mathcal{M}_n$ e che $m(F_{+\infty}) = m(F_{-\infty}) = 0$.

Dimostrazione: Al solito si può supporre che $f \geq 0$. Dato che f è integrabile su E, si ha, grazie al Teorema 7.11, che f è misurabile su E. Si ha inoltre che $F_{+\infty} \in \mathcal{M}_n$ in quanto (vedere il Teorema della σ-additività e la Proposizione 7.9):

$$F_{+\infty} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k\ ,\ \text{dove } F_k = \{x \in E : f(x) > k\}\,.$$

Siccome f è integrabile su E, grazie al Teorema 7.19, si ha che la funzione f è integrabile su $F_{+\infty}$ e dunque:

$$\int_{F_{+\infty}} f < +\infty\,. \tag{7.4}$$

Se per assurdo si avesse che $m(F_{+\infty}) > 0$, si dimostrerebbe facilmente che:

$$\int_{F_{+\infty}} f = \int_{F_{+\infty}} (+\infty) = +\infty\,,$$

che, confrontata con la (7.4), ci dà una contraddizione.

In modo analogo si verifica che $F_{-\infty}$ è misurabile ed ha misura nulla. ∎

7.24 **Osservazione.** Se $f = g$ q.o. non è detto che il supporto di f coincida con il supporto di g. Ci sono anzi funzioni quasi ovunque nulle in $\mathbb{R}^n$ il cui supporto coincide con tutto $\mathbb{R}^n$. ∎

8 - PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

a) Preliminari

Consideriamo il seguente:

8.1 **Problema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f, f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ e supponiamo che $f_k(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$, cioè che la successione f_k converga puntualmente a f. Se le funzioni f_k sono integrabili (risp. g-integrabili) su E, ci si può chiedere sotto quali condizioni **(i)** f è integrabile (risp. g-integrabile) su E, **(ii)** vale una formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale del tipo:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx\,, \tag{8.1}$$

cioè quando l'operazione di limite commuta con l'operazione di integrale. ∎

È ben noto che la formula (8.1) non è sempre valida. Lo studente dovrebbe già conoscere il seguente risultato:

8.2 **Teorema.** Sia $f_k \in C^0([a,b])$, con $a < b$, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f_k \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $f \in C^0([a,b])$ e inoltre:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,. \blacksquare$$

Nell'ambito della Teoria dell'integrale secondo Riemann, il suddetto risultato è essenzialmente l'unico disponibile per quanto riguarda il passaggio al limite sotto il segno di integrale. La Teoria dell'integrale secondo Lebesgue, invece, è estremamente potente da tale punto di vista. Un poco semplicisticamente, si può affermare che la Teoria della misura e dell'integrale secondo Lebesgue è stata concepita per avere a disposizione i risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale che ora verranno esposti.

b) I teoremi fondamentali

8.3 **Teorema di B. Levi.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni g-integrabili su E. Se $\int f_0 > -\infty$ e se $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$, allora esiste $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ g-integrabile su E tale che $f_k \to f$ puntualmente su E e in modo tale che valga la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale (8.1).

Dimostrazione: Supponiamo per il momento che $f_0(x) \ge 0$ $(x \in E)$.

L'esistenza di una funzione $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $f_k \to f$ puntualmente in E, è ovvia dato che la successione $f_k(x)$ è monotona non decrescente in k. La funzione f è una funzione non negativa e (grazie al Teorema 6.6,(g)) misurabile. Si ponga:

$$\Gamma(f_k) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f_k(x)\}\ ,\ \Gamma(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\},$$

cioè, dato che $f_k \ge 0$ e $f \ge 0$, l'insieme $\Gamma(f_k)$ (risp. $\Gamma(f)$) è il sottografico di f_k (risp. f). Grazie al Teorema 7.11, si ha che $\Gamma(f_k) \in \mathcal{M}_{n+1}$. Si ha d'altra parte che $\Gamma(f_k) \subset \Gamma(f_{k+1})$ e che $\Gamma(f) = \cup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(f_k)$. Utilizzando il Teorema della σ-additività, si ottiene che $\Gamma(f) \in \mathcal{M}_{n+1}$ e che

$$\lim_{k\to\infty} m\big(\Gamma(f_k)\big) = m\big(\Gamma(f)\big)$$

e dunque, utilizzando ancora il Teorema 7.11, si ha l'asserto nel caso in cui $f_0 \geq 0$.

Nel caso generale si può applicare il precedente risultato alla successione $f_n - f_0$, ottenendo facilmente la conclusione della dimostrazione. ∎

8.4 **Osservazione.** La condizione $\int_E f_0 > -\infty$ contenuta nel precedente Teorema è effettivamente essenziale, come si verifica facilmente con il seguente contro-esempio:

$$E = \mathbb{R}^n \ , \ f_k = -\frac{1}{k} \, .$$

Si ha infatti che $f_k \to f \equiv 0$. D'altra parte:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k = -\infty \ , \ \int_{\mathbb{R}^n} f = 0 \, ,$$

che significa che non vale la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale. ∎

Il Teorema di B. Levi, nella formulazione data sopra, dà una condizione di g-integrabilità sulla funzione limite f. Nel caso in cui si pretendesse, invece, una condizione (più forte) di integrabilità, potrebbe essere utilizzato il seguente enunciato (la cui dimostrazione è molto facile a partire dal Teorema di B. Levi):

8.5 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni integrabili su E. Se $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$ e inoltre esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che:

$$\int_E f_k \, dx \leq \lambda \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \, ,$$

allora esiste $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E tale che $f_k \to f$ puntualmente su E e in modo tale che valga la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale (8.1). ∎

Un altro risultato importante è il seguente:

8.6 **Lemma di Fatou.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni g-integrabili su E. Si supponga inoltre che esista una funzione $\varphi : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E, in modo tale che:

$$f_k(x) \geq \varphi(x) \ , \ \forall x \in E \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \, . \tag{8.2}$$

Si ha allora che:

$$\int_E (\min\lim_{k\to\infty} f_k(x)) \, dx \leq \min\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) \, dx.$$

Dimostrazione: Poniamo $g_i(x) = \inf_{h \geq i} f_h(x)$. Osservando che la successione $i \to g_i(x)$ è nonotona non decrescente, si ha che:

$$\min\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x) = \sup\{g_i(x), i \in \mathbb{N}\} \, .$$

Se $i \leq k$, si ha che $g_i \leq f_k$ e dunque $\int_E g_i \, dx \leq \int_E f_k \, dx$, da cui:

$$\int_E g_i \, dx \leq \min\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) \, dx \quad , \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{8.3}$$

e dunque

$$\lim_{i\to\infty}\int_E g_i\,dx \le \min\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx\,. \tag{8.4}$$

Grazie alla ipotesi (8.2), si ha che $g_0(x) \ge \varphi(x)$ per ogni $x \in E$, da cui, ricordando il fatto che φ è una funzione integrabile su E,

$$\int_E g_0 \ge \int_E \varphi > -\infty\,.$$

Dato che la successione g_k è non decrescente, grazie al Teorema di B. Levi si ha allora:

$$\int_E \min\lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_E \lim_{i\to\infty} g_i(x)\,dx = \lim_{i\to\infty}\int_E g_i(x)\,dx\,.$$

Ricordando anche la disuguaglianza (8.4), si ha inoltre che:

$$\lim_{i\to\infty}\int_E g_i(x)\,dx \le \min\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx,$$

cioè l'asserto. ∎

8.7 **Osservazione.** Una ovvia variante del Lemma di Fatou consiste nella sostituzione della condizione (8.2) con la seguente:

$$f_k(x) \le \varphi(x)\ ,\ \forall x \in E.$$

dove φ è una funzione integrabile su E. In tale caso si ha:

$$\int_E (\max\lim_{k\to\infty} f_k(x))\,dx \ge \max\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx. \quad ∎$$

Abbiamo infine il seguente teorema dovuto allo stesso Lebesgue:

8.8 **Teorema della convergenza dominata.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni g-integrabili su E e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_k \to f$ puntualmente in E. Si supponga inoltre che esista una funzione $\varphi : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E, in modo tale che:

$$|f_k(x)| \le \varphi(x)\ ,\ \forall x \in E\,. \tag{8.5}$$

Si ha allora che f è integrabile su E e che vale la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale (8.1).

Dimostrazione: Grazie al fatto che $f_k \to f$ puntualmente in E, si ha (cfr. il Teorema 6.6 e l'Osservazione 7.10) che f è misurabile su E. Si ha inoltre che $|f(x)| \le \varphi(x)$ per ogni $x \in E$. Utilizzando il Teorema 7.16, si ricava che f è integrabile. Utilizzando il Lemma di Fatou (tenendo presente anche la versione formulata nella Osservazione 8.7), si ha che:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_E \min\lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \le \min\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx \le$$
$$\le \max\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx \le \int_E \max\lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

e dunque l'asserto. ∎

8.9 **Osservazione.** Nei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sopra enunciati, compaiono alcune condizioni che debbono valere su tutto E: tali teoremi possono essere riformulati intendendo tali condizioni nel senso che basta supporre che esse valgano solo q.o. in E. Ad esempio la condizione (8.5) del Teorema della convergenza dominata può essere intesa q.o. in E conservando la validità del risultato. ∎

c) Un teorema di integrazione per serie

Terminiamo questa Sezione con alcune considerazioni relative ai risultati di integrazione per serie. Vale intanto il seguente:

8.10 **Lemma.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni g-integrabili su E tali che $f_k(x) \geq 0$ $(x \in E)$. Si ha allora che la funzione $x \in E \to \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è g-integrabile su E e inoltre:

$$\int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione: Se poniamo

$$s_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x),$$

si ha che la successione $N \to s_N(x)$ monotona non decrescente e dunque la serie $x \in E \to \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ha senso in $\widetilde{\mathbb{R}}$ ed è anche misurabile, come limite puntuale di funzioni misurabili ed è dunque g-integrabile grazie al Teorema 7.11. Si ha ancora che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_E f_k(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_E \left[\sum_{k=0}^{N} f_k(x)\right] dx = \lim_{N\to\infty} \int_E s_N(x)\, dx\,.$$

Con una facile appllicazione del Teorema di B. Levi, si ha infine

$$\lim_{N\to\infty} \int_E s_N(x)\, dx = \int_E \lim_{N\to\infty} s_N(x)\, dx = \int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] dx\,,$$

da cui l'asserto. ∎

Possiamo ora dimostrare il seguente importante Teorema di integrazione per serie:

8.11 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, $f_k : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni integrabili su E. Se:

$$\int_E \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|\, dx < \infty\,, \tag{8.6}$$

allora si ha che la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

converge q.o. in E a una funzione $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E. Valgono inoltre le relazioni

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)\,dx\,. \tag{8.7}$$

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| = \left|\int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] dx\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\,dx\,. \tag{8.8}$$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione:

$$g : E \to \widetilde{\mathbb{R}} \ \text{ definita da } \ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|\,.$$

Grazie alla (8.6), si ha che g è integrabile su E e dunque (grazie alla Proposizione 7.23) si ha che $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ (q.o. in E). Siccome la convergenza assoluta implica quella semplice, si ha che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge (q.o. in E) e che ($\forall N \in \mathbb{N}$):

$$\left|\sum_{k=0}^{N} f_k(x)\right| \le \sum_{k=0}^{N} |f_k(x)| \le g(x) \text{ q.o. in } E\,. \tag{8.9}$$

Siccome

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_E \left[\sum_{k=0}^{N} f_k(x)\right] dx$$

e, ricordando le maggiorazioni (8.9) dove g è integrabile su E, applicando il Teorema della convergenza dominata si ha che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{N} f_k(x)\right] dx = \int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] dx\,.$$

Anche la maggiorazione (8.8) si ricava facilmente. L'asserto è così provato. ∎

8.12 **Osservazione.** Grazie al Lemma 8.10, l'ipotesi (8.6) può essere equivalentemente sostituita dalla seguente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\,dx < \infty\,. \blacksquare \tag{8.10}$$

9 - TEOREMA DI FUBINI

a) Preliminari

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto alcuni risultati relativi ai legami fra la g-integrabilità secondo Lebesgue e altre nozioni (come la misurabilità del sottografico, etc ...). Non si hanno, però, per ora, strumenti per il calcolo concreto degli integrali, salvo nel caso di funzioni reali di una variabile reale, in quanto, come abbiamo già osservato, i risultati relativi alla Teoria dell'integrale secondo Riemann rimangono validi nel nuovo ambiente. I teoremi che saranno illustrati durante il corso e che facilitano il calcolo degli integrali sono essenzialmente tre :

(1) un teorema di riduzione (Teorema di Fubini) che verrà illustrato nel presente paragrafo: esso permette di ridurre un integrale n-dimensionale a più integrali di dimensione inferiore (in particolare riduce un integrale n-dimensionale a n integrazioni uno-dimensionali);
(2) un teorema di integrazione per cambiamento di variabili, che è una generalizzazione del teorema di integrazione per sostituzione già conosciuto dallo studente. (tale risultato sarà esposto nella successiva sezione);
(3) il teorema di Gauss-Green, che è una generalizzazione della ben nota formula di integrazione per parti (tale teorema non sarà esposto in questa sede).

Introduciamo una notazione che ci sarà utile nel seguito. Sia $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ con n, k interi positivi. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si pone:

$$E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}.$$

b) Il teorema di riduzione nel caso delle misure

Introduciamo ora il Teorema di Fubini nel caso (particolare) in cui si voglia ridurre il calcolo della misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+k}$.

9.1 **Teorema.** Se $E \in \mathcal{M}_{n+k}$, allora si ha:
(i) $E_{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_k$ (q.o.) in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
(ii) la funzione $\mathbf{x} \to m_k(E_{\mathbf{x}})$ è g-integrabile su $\mathbb{R}^n$,
(iii) si ha che:

$$m_{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x}\,. \tag{9.1}$$

Dimostrazione: Per semplicità, esporremo la dimostrazione solo nel caso in cui $n = k = 1$. Il Teorema è ovvio nel caso in cui E sia un rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati. Conseguentemente la (9.1) è valida anche nel caso in cui E sia un pluri-rettangolo $P \in \mathcal{P}_2$: in tal caso avremo che P_x è un pluri-rettangolo (o meglio un pluri-intervallo) e che:

$$(a) \qquad m_2(P) = \int_{\mathbb{R}} m_1(P_x)\, dx.$$

Consideriamo ora il caso in cui E sia un aperto di $\mathbb{R}^2$, che indicheremo con Ω. Si può allora facilmente determinare una successione di pluri-rettangoli $P^m \in \mathcal{P}_2$ tali che:

$$(b)\ \ \Omega = \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} P^m\ ;\ \ (c)\ \ P^m \subset P^{m+1}\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Si può, ad esempio, fissato $m \in \mathbb{N}$, considerare la *reticolazione* di $\mathbb{R}^2$ costituita dai rettangoli

$$Q_{ij}^m = \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right] \times \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right]\ ,\ i,j \in \mathbb{Z}$$

e definire P^m come la famiglia dei Q_{ij}^m contenuti in Ω. Grazie alle relazioni (b) e (c) e al Teorema della σ-additività si ha allora:

$$(d)\ \ m_2(\Omega) = \lim_{m\to\infty} m_2(P_m)\,.$$

$$(e)\ \ P_x^m \subset P_x^{m+1}\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}\,, \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ (f)\ \ m_1(P_x^m) \le m_1(P_x^{m+1})\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Si ha inoltre:

$$(g)\ \ \Omega_x = \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} P_x^m\,,$$

in quanto:

$$y \in \Omega_x \Leftrightarrow (x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (x,y) \in \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} P^m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : (x,y) \in P^m \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : y \in P_x^m \Leftrightarrow y \in \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} P_x^m\,.$$

Grazie alle relazioni (e) e (g) e al Teorema della σ-additività si ha allora che:

$$(h)\ \ \lim_{m\to\infty} m_1(P_x^m)\ =\ m_1(\Omega_x)\,.$$

Specificando le motivazioni dei passaggi (B.L.=Teorema di B. Levi), si ha ora:

$$m_2(\Omega) \overset{(d)}{=} \lim_{m\to\infty} m_2(P^m) \overset{(a)}{=} \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} m_1(P_x^m)\,dx =$$

$$\overset{(f)+B.L.}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} m_1(P_x^m)\,dx \overset{(h)}{=} \int_{\mathbb{R}} m_1(\Omega_x)\,dx\,.$$

La formula (9.1) è dunque dimostrata nel caso in cui E sia un aperto.

Il caso in cui E è un compatto si tratta in modo simile.

Avendo a disposizione la formula (9.1) nei casi in cui E sia un aperto oppure un compatto, si può dimostrare tale relazione in generale, superando qualche complicazione tecnica, che non affronteremo. ∎

9.2 **Osservazione.** Nella condizione (ii) del Teorema 9.1 si considera la g-integrabilità su $\mathbb{R}^n$ della funzione $\mathbf{x} \to m_k(E_\mathbf{x})$ che, per la condizione (i) è definita solo quasi ovunque. Questa difficoltà si supera definendo tale funzione in modo arbitrario (ad esempio uguale a zero) dove non è definita. Tale metodologia è coerente grazie alla proprietà di invarianza contenuta nella Proposizione 7.21. ∎

c) Il teorema di Fubini

Diamo ora l'enunciato generale del Teorema di Fubini:

9.3 **Teorema di Fubini.** Dato $E \in \mathcal{M}_{n+k}$, sia $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Si ha allora che:

(i) per quasi tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\mathbf{y} \in E_\mathbf{x} \to f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è g-integrabile su $E_\mathbf{x}$, cioè esiste l'integrale

$$\int_{E_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\ , \quad \text{(q.o.) in } \mathbf{x},$$

(ii) la funzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \to \int_{E_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$,

(iii) si ha che:

$$\int_E f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{E_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x}$$

Dimostrazione: Per semplicità supponiamo che $n = k = 1$ (ciò significa che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono variabili scalari che indicheremo con x e y) e che f sia non negativa. Sia ancora:

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in E \times \mathbb{R} : 0 < z < f(x,y)\}$$

il sottografico della funzione f. Grazie al Teorema 7.11, si ha che $\Gamma(f) \in \mathcal{M}_3$ e che:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = m_3(\Gamma(f)). \tag{9.2}$$

Tenendo presente il Teorema 9.1, si ha che $\Gamma(f)_x$ è un insieme misurabile q.o. in $x \in \mathbb{R}$ e che:

$$m_3(\Gamma(f)) = \int_{\mathbb{R}} m_2(\Gamma(f)_x)\,dx, \tag{9.3}$$

dove:

$$\Gamma(f)_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Gamma(f)\right\}.$$

Dimostriamo che:

$$\Gamma(f)_x = \Gamma(f_x)\,, \tag{9.4}$$

dove, ovviamente,

$$f_x : E_x = \{y \in E\ :\ (x,y) \in E\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$$

è la funzione definita da: $f_x(y) = f(x,y)$.

Si ha infatti che

$$\Gamma(f_x) = \{(y,z) \in E_x \times \mathbb{R}\ :\ 0 < z < f_x(y) = f(x,y)\}\,.$$

D'altra parte

$$\Gamma(f)_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y,z) \in \Gamma(f)\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \in E\,,\, 0 < z < f(x,y)\}\,,$$

da cui

$$\Gamma(f_x) = \{(y,z) \in E_x \times \mathbb{R} \,:\,,\, 0 < z < f(x,y)\} = \Gamma(f)_x\,.$$

La relazione (9.4) è dunque provata.
Si ha dunque che $\Gamma(f)_x$ è il sottografico della funzione f_x (la variabile x avendo un ruolo di parametro). Sfruttando ancora il Teorema 7.11, si ha che (q.o. in $x \in \mathbb{R}$) f_x è una funzione g-integrabile su E_x (cioè vale la relazione i)) e che:

$$m_2(\Gamma(f)_x) = m_2(\Gamma(f_x)) = \int_{E_x} f_x(y)\,dy. \tag{9.5}$$

Ricordando le relazioni (9.2), (9.3) e (9.5), si verificano facilmente le rimanenti relazioni ii) e iii). ∎

9.4 **Osservazione.** Le condizioni (i) e (ii) del Teorema di Fubini sono quelle che danno senso all'integrale iterato contenuto nella condizione (iii) dello stesso Teorema. ∎

9.5 **Osservazione.** Nell'enunciato del Teorema di Fubini, se f è integrabile, non solo vale il teorema di riduzione, ma vale ovviamente la formula relativa alla invertibilità dell'ordine delle integrazioni:

$$\int_E f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{E_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right]d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{E_\mathbf{y}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right]d\mathbf{y}\,, \tag{9.6}$$

tutte le operazioni effettuate in tale relazione essendo automaticamente lecite a partire dalla sola ipotesi che f sia integrabile. ∎

Il Teorema di Fubini non può essere invertito nel senso che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ misurabili, per le quali ha senso ed è finito l'integrale iterato contenuto nella condizione (iii) del Teorema di Fubini che però non sono integrabili. Il Teorema di Fubini non può essere dunque utilizzato, senza aggiustamenti, come criterio sufficiente per l'integrabilità. Si dimostra però che, se ha senso ed è finito il seguente integrale iterato:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{E_\mathbf{x}} |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}\,, \tag{9.7}$$

allora f è integrabile (e conseguentemente vale la formula di riduzione contenuta nella condizione (iii) del Teorema di Fubini). Per completezza diamo un enunciato esplicito di tale risultato (attribuito a L. Tonelli):

9.6 **Teorema.** Dato $E \in \mathcal{M}_{n+k}$, sia $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Si ha allora che per quasi tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\mathbf{y} \in E_\mathbf{x} \to |f(\mathbf{x},\mathbf{y})| \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è g-integrabile su $E_\mathbf{x}$.

Se inoltre la funzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \to \int_{E_\mathbf{x}} |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ (in modo tale che le operazioni descritte in (9.7) abbiano senso e diano un risultato reale), allora la funzione f è integrabile su E. ∎

10 - CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Introduciamo la nozione seguente:

10.1 **Definizione.** Dati due aperti Ω e Λ di $\mathbb{R}^n$, una applicazione $\lambda : \Omega \to \Lambda$ si dice un *diffeomorfismo* (di classe C^1) fra Ω e Λ, se: (i) λ è biunivoca, (ii) $\lambda \in C^1(\Omega)$ e (iii) $\lambda^{-1} \in C^1(\Lambda)$.

Se $\mathbf{x} \in \Omega$, indicheremo con $J_\lambda(\mathbf{x})$ la matrice jacobiana di λ nel punto $\mathbf{x}$. Il seguente fondamentale risultato è una generalizzazione del Teorema di integrazione per sostituzione per le funzioni di una sola variabile:

10.2 **Teorema.** Siano dati due aperti Ω e Λ di $\mathbb{R}^n$ e un diffeomorfismo λ fra Ω e Λ. Siano, inoltre, $E \in \mathcal{M}_n$ tale che $E \subset \Lambda$ e $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione g-integrabile su E. Si ha allora che $\lambda^{-1}(E) \in \mathcal{M}_n$, che la funzione $(f \circ \lambda)\,|\det\,(J_\lambda)|$ è g-integrabile su $\lambda^{-1}(E)$ e inoltre:

$$\int_E f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{\lambda^{-1}(E)} (f \circ \lambda)(\mathbf{x})\;|\det\,(J_\lambda(\mathbf{x}))|\,d\mathbf{x}\,.\blacksquare$$

La dimostrazione di tale Teorema è estremamente lunga e verrà tralasciata. Condurremo invece alcune considerazioni utili nella applicazione del Teorema.

10.3 **Osservazione.** Sia λ un diffeomorfismo fra Ω e Λ. Si ha $\lambda^{-1} \circ \lambda =$ identità in Ω. Siccome la matrice jacobiana di una applicazione composta si ottiene componendo le matrici jacobiani delle funzioni componenti, si ha che $J_{\lambda^{-1}}(\lambda(x)) \circ J_\lambda(x)$ coincide con la matrice identica e dunque

$$\det\,(J_{\lambda^{-1}}(\lambda(x)))\;\;\det\,(J_\lambda(x)) = 1 \quad , \quad x \in \Omega\,.$$

Ciò, evidentemente, significa che la matrice $J_\lambda(x)$ non è mai singolare o anche che $\det\,(J_\lambda(x)) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Si ha dunque che:

Se λ un diffeomorfismo fra Ω e Λ, allora $\det\,(J_\lambda(x)) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$.

Si dimostra (come conseguenza del Teorema delle funzioni implicite) che il suddetto risultato può essere parzialmente invertito, nel senso che se $\det\,(J_\lambda(x)) \neq 0$, allora λ è localmente un diffeomorfismo. Non può essere invece essere invertito globalmente, come si può constatare con il seguente contro-esempio. Sia:

$$\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \;\text{ definita da }\; \lambda(x,y) = (\exp(x)\,\cos y, \exp(x)\,\mathrm{sen}\,y)\,.$$

È facile verificare che la funzione λ è suriettiva e che $\det\,(J_\lambda(x,y)) = \exp(2\,x) \neq 0$ (dunque la applicazione λ è un diffeomorfismo locale). Non è un diffeomorfismo globale in quanto:

$$\lambda(x,y) = \lambda(x, y + 2\,\pi)\;,\;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

È utile verificare che la funzione λ sopra definita, può essere interpretata come l'esponenziale in campo complesso. $\blacksquare$

10.4 **Osservazione. Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.**
Consideriamo la applicazione che ci fa passare dalle coordinate polari ϱ , ϑ alle coordinate cartesiane x , y:

$$\lambda(\varrho, \vartheta) = (\varrho\,\cos\vartheta, \varrho\,\sin\vartheta)\;,\;0 \le \varrho < +\infty\;,\;0 \le \vartheta < 2\,\pi.$$

Tale applicazione non è ovviamente un diffeomorfismo perché l'insieme di definizione non è aperto e perché non è iniettiva. Si può inoltre osservare che $\det(J_\lambda(\varrho,\vartheta)) = \varrho$ e dunque si può annullare. Il cambiamento di variabili definito dalla funzione λ non può essere, dunque, utilizzato (direttamente) nelle applicazioni del Teorema 10.2. Se, però, poniamo

$$\Omega = \{(\varrho,\vartheta) : 0 < \varrho < +\infty \ , \ 0 < \vartheta < 2\,\pi\} \ ; \ \Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\,,\, x \geq 0\} \ , \ \Lambda = \mathbb{R}^2 - \Sigma,$$

allora la restrizione di λ all'aperto Ω è un diffeomorfismo fra Ω e Λ. Sia ora $E \in \mathcal{M}_2$, cioè E è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$. Se $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è integrabile su E, si ha (grazie al Teorema 10.2):

$$\int_{E-\Sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\lambda^{-1}(E-\Sigma)} f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\ \varrho\,d\varrho\,d\vartheta. \tag{10.1}$$

Dato che $E = (E-\Sigma) \cup (E \cap \Sigma)$ e dato che $m_2(E\cap\Sigma) = 0$, si ha (grazie anche al Teorema 7.19):

$$\int_{E-\Sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(x,y)\,dx\,dy.$$

Si ha anche che $\lambda^{-1}(E) = \lambda^{-1}(E-\Sigma) \cup \lambda^{-1}(E\cap\Sigma)$. È facile verificare che per ogni $(\varrho,\vartheta) \in \lambda^{-1}(E\cap\Sigma)$ si ha che $\varrho = 0$ oppure $\vartheta = 0$, da cui $m_2(\lambda^{-1}(E\cap\Sigma)) = 0$. Ciò implica (grazie ancora al Teorema 7.19) che:

$$\int_{\lambda^{-1}(E-\Sigma)} f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\ \varrho\,d\varrho\,d\vartheta = \int_{\lambda^{-1}(E)} f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\ \varrho\,d\varrho\,d\vartheta. \tag{10.2}$$

Tenendo presente le relazioni (10.1) — (10.2), si ha infine che, se $E \in \mathcal{M}_2$ e se $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è integrabile su E, allora vale la utile l'utile formula:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\lambda^{-1}(E)} f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\ \varrho\,d\varrho\,d\vartheta. \quad \blacksquare$$

11 - INTEGRALE DIPENDENTE DA UN PARAMETRO

Sia $E \in \mathcal{M}_n$ e A un sotto-insieme di $\mathbb{R}^m$. Sia inoltre

$$f : E \times A \to \widetilde{\mathbb{R}} \tag{11.1}$$

tale che per ogni $y \in A$, la funzione $x \in E \to f(x,y) \in \widetilde{\mathbb{R}}$ sia g-integrabile su E. Ciò vuol dire che ha senso introdurre la funzione:

$$F(y) = \int_E f(x,y)\,dx \ , \ y \in A\,. \tag{11.2}$$

Tale funzione viene, abitualmente, chiamata *integrale dipendente dal parametro* y. Studieremo ora le condizioni da imporre alla funzione f affinché la funzione F sia regolare (cioè continua o derivabile) e affinché si possano invertire le operazioni di integrale e di derivata.

Il primo risultato, relativo alla continuità di f, è il seguente:

11.1 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $f : E \times \Omega \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Se
(a) per ogni $y \in \Omega$ la funzione $x \to f(x, y)$ è g-integrabile su E,
(b) per ogni $x \in E$ la funzione $y \to f(x, y)$ è continua su Ω,
(c) esiste una funzione $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E tale che $|f(x, y)| \le g(x)$ in $E \times \Omega$,

allora la funzione F, definita in (11.2), è continua su Ω.

Dimostrazione: Sia $\overline{y}$, $y_k \in \Omega$ ($k \in \mathbb{N}$), tali che $y_k \to \overline{y}$. Grazie alla condizione (b), si ha che, per ogni $x \in E$, $\lim_{k\to\infty} f(x, y_k) = f(x, \overline{y})$. Utilizzando la condizione (c) e il Teorema della convergenza dominata, si ha ancora che:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f(x, y_k)\, dx = \int_E f(x, \overline{y})\, dx,$$

che, grazie alla arbitrarietà di y e della successione y_k, ci dà l'asserto. ∎

Studiamo ora il problema della derivabilità di F e quello dell'inversione delle operazioni di derivata e di quello di integrale. Il seguente risultato (la cui dimostrazione non è molto più complessa di quella del precedente Teorema) è chiamato Teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

11.2 **Teorema.** Sia $E \in \mathcal{M}_n$, Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $f : E \times \Omega \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Se
(a) per ogni $y \in \Omega$ la funzione $x \to f(x, y)$ è g-integrabile su E,
(b) per ogni $x \in E$ la funzione $y \to f(x, y)$ è derivabile parzialmente (con derivate parziali continue) su Ω,
(c) esiste una funzione $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ integrabile su E tale che $((x, t) \in E \times \Omega)$:

$$|f(x, y)| \le g(x)\ ,\ |\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y)| \le g(x)\,,\ k = 1, \ldots, m\,,$$

allora la funzione F, definita in (11.2), è di classe C^1 su Ω e:

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y)\, dx,\ k = 1, \ldots, m\,. \blacksquare$$

11.3 **Osservazione.** Un problema interessante è quello dello studio di funzioni del tipo:

$$F(y) = \int_{E(y)} f(x, y)\, dx\,.$$

Noi ne prenderemo in considerazione solo un caso molto particolare. Consideriamo prima di tutto la seguente situazione. Sia $f : [c, d]\times]a, b[\to \mathbb{R}$ di classe C^1. Poniamo ($t \in]a, b[\ ,\ u, w \in [c, d]$):

$$\Lambda(t, u, w) = \int_u^w f(x, t)\, dx.$$

Si ha (grazie al Teorema fondamentale del calcolo integrale e al Teorema di derivazione sotto il segno di integrale):

$$\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,t}(t,u,w) = \int_u^w \frac{\partial\,f(x,t)}{\partial t}\;dx\;,\;\;\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,u}(t,u,w) = -f(u,t)\;,\;\;\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,w}(t,u,w) = f(w,t)\,. \tag{11.3}$$

Siano ora date anche due funzioni $\alpha, \beta \in C^1(]a,b[)$ tali che: $c < \alpha(t) < \beta(t) < d\;,\;\;\forall t \in]a,b[$ e consideriamo la funzione:

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\;dx = \Lambda(t,\alpha(t),\beta(t)).$$

Utilizzando il Teorema di derivazione delle funzioni composte si ha che:

$$G'(t) = \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,t}(t,\alpha(t),\beta(t)) + \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,u}(t,\alpha(t),\beta(t))\,\alpha'(t) + \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,w}(t,\alpha(t),\beta(t))\,\beta'(t)\,,$$

da cui, grazie alle relazioni (11.3), si ottiene infine l'utile formula:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\;dx\right] = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial\,f}{\partial\,t}(x,t)\;dx + \beta'(t)\,f(\beta(t),t) - \alpha'(t)\,f(\alpha(t),t)\;,\;\;t \in]a,b[\,.\;\blacksquare$$

III - SPAZI DI BANACH E HILBERT

1 - SPAZI VETTORIALI

La nozione di spazio *vettoriale reale* dovrebbe essere già nota. Ricordiamo solo alcune nozioni di base.

Dato X spazio vettoriale reale, gli elementi $x_k \in X$, $k = 1, \ldots, N$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $\lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli in modo tale che:

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \, x_k = 0 \, .$$

Altrimenti si dicono *linearmente indipendenti*. Se vi è un massimo numero (intero) di elementi linearmente indipendenti in X, tale numero viene chiamato *dimensione* di X. Se tale numero non esiste, si dice allora che la dimensione di X è ∞.

Dato uno spazio vettoriale di dimensione N, una famiglia di N elementi elementi linearmente indipendenti di X viene chiamata una *base* di X. Il concetto di base è molto importante, dato che le combinazioni lineari finite degli elementi di una base di uno spazio vettoriale di dimensione finita, generano (univocamente) tutti gli elementi dello spazio. Nel caso particolare in cui $X = \mathbb{R}^N$, la base costituita dagli elementi $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (dove 1 è posto al k-esimo posto) è chiamata *base canonica* di $\mathbb{R}^N$.

Dato uno spazio vettoriale reale X, si indica con X^* lo spazio duale (algebrico) di X, cioè lo spazio vettoriale dei *funzionali* lineari su X ossia delle applicazioni lineari definite su X a valori reali. Si verifica facilmente che lo spazio duale (algebrico) ha dimensione pari a quella dello spazio di partenza.

Un esempio di base in $(\mathbb{R}^N)^*$ è dato dagli elementi:

$$\mathbf{e}^k(x_1, \ldots, x_N) = x_k \quad , \quad k = 1, \ldots, N \, .$$

Tale base speciale è chiamata *base canonica duale* di $(\mathbb{R}^N)^*$. Gli elementi $\mathbf{e}^k$ sono spesso indicati con $d\,x_k$, in quanto sono il differenziale della funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che associa a ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ la componente k-esima x_k.

1.1 **Esempio.** Lo spazio $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione N. ∎

1.2 **Esempio.** Se E è un insieme non vuoto, lo spazio $L(E)$ delle funzioni reali limitate definite su E può essere dotato di una struttura di spazio vettoriale definendo la addizione e la moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:

$$\forall f, g \in L(E) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \, , \; x \in E \, ,$$

$$\forall f \in L(E) \, , \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda\, g)(x) = \lambda\, f(x) \, , \; x \in E \, .$$

Poniamo $(y \in E)$:

$$f_y(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \ x = y, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vale inoltre l'identità per ogni ($f \in L(E)$):

$$f(x) = \sum_{y \in E} f(y)\, f_y(x)\,.$$

Nel caso in cui E sia un insieme finito si ha dunque che $\{f_y\ ,\ y \in E\}$ costituisce una base per E. Si ha dunque che la cardinalità e la dimensione di E coincidono.

Se E è un insieme infinito (cioè ha un numero infinito di elementi), è evidente che ogni famiglia finita estratta dalla $\{f_y\,,\, y \in E\}$ è costituita da elementi linearmente indipendenti in $L(E)$. Lo spazio vettoriale $L(E)$ ha dunque dimensione infinita. ∎

1.3 **Esempio.** Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme non vuoto, lo spazio $C^0(E)$ delle funzioni reali limitate e continue definite su E può essere dotato di una struttura di spazio vettoriale definendo la addizione e la moltiplicazione come nel precedente esempio.

In particolare, nello spazio vettoriale $C^0(]0,1[)$ possiamo considerare la famiglia di funzioni ($k \in \mathbb{N}$): $f_k(x) = x^k$. Osserviamo che se una combinazione lineare di tali funzioni (che ci dà ovviamente un polinomio) fosse nulla identicamente, si avrebbe che i coefficienti della combinazione lineare dovrebbero essere tutti nulli (per il Teorema fondamentale dell'Algebra). Anche lo spazio vettoriale $C^0([0,1])$ ha dunque dimensione infinita. ∎

2 - SPAZI DI BANACH

Introduciamo la seguente definizione:

2.1 **Definizione.** La coppia $(X, \|\ \|)$ dove X è uno spazio vettoriale (reale) e $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ è una applicazione (chiamata *norma*) verificante le condizioni seguenti:
i) $\forall x \in X\,,\ \|x\| \geq 0\,,$
ii) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$,
iii) $\forall x \in X\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|\,,$
iv) $\forall x, y \in X\,,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*subadditività*),
viene chiamato uno *spazio normato* (reale). ∎

Notiamo che in uno spazio normato la subadditività può essere espressa in maniera leggermente differente:

2.2 **Proposizione.** Se $(X, \|\ \|)$ è uno spazio normato, si ha allora

$$\forall x, y \in X \quad \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||\,.$$

Dimostrazione: Si ha infatti che

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e dunque

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \ , \ \forall x \, , \, y \in X \, .$$

Scambiando i ruoli di x e y, si ha l'asserto. ∎

La definizione di spazio normato è ovviamente una estensione della nozione di valore assoluto sulla struttura vettoriale dei numeri reali. Riflettendo su tale punto di vista, viene spontaneo generalizzare agli spazi normati alcune nozioni relative alla struttura reale, semplicemente sostituendo il valore assoluto con la norma. Vediamo alcuni esempi:

2.3 **Definizione.** Se $(X, \| \ \|)$ è uno spazio normato e $x \, , \, y \in X$, la quantità $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ viene chiamata *distanza* fra x e y. ∎

2.4 **Osservazione.** Se $(X, \| \ \|)$ è uno spazio normato, la funzione $\mathrm{d}(x, y)$ definisce una struttura di spazio metrico, che viene chiamata *struttura metrica definita dalla norma* $\| \ \|$. ∎

2.5 **Definizione.** Se $(X, \| \ \|)$ è uno spazio normato, la successione $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ si dice *convergente* a $\overline{x} \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \in \mathbb{N} \; (n > \overline{n} \Rightarrow \|x_n - \overline{x}\| < \varepsilon) \, .$$

In simboli scriveremo che $\exists \lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$ (o, più semplicemente, $x_n \to \overline{x}$ se $n \to \infty$). ∎

2.6 **Definizione.** Se $(X, \| \ \|)$ è uno spazio normato, la successione $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ si dice una *successione di Cauchy* in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \, \forall n, m \in \mathbb{N} \; (n \, , \, m > \overline{n} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon) \, . \blacksquare$$

È facile dimostrare che ogni successione convergente è anche di Cauchy. Non vale in generale il viceversa. Tale fatto ovviamente giustifica l'introduzione della seguente fondamentale:

2.7 **Definizione.** Uno spazio normato $(X, \| \ \|)$ in cui ogni successione di Cauchy è convergente si dice uno spazio di *Banach*. ∎

Diamo un primo elementare esempio di spazio di Banach (gli Esempi più complessi saranno descritti in un successivo paragrafo):

2.8 **Esempio.** Lo spazio $\mathbb{R}^N$ con la norma:

$$\|X\| = \|(x_1, \ldots, x_N)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$$

è uno spazio di Banach. In particolare $(\mathbb{R}, | \ |)$ è uno spazio di Banach. ∎

Sottolineamo nuovamente il fatto che le precedenti definizioni sono state costruite a partire da quelle elementari dedicate a $\mathbb{R}$ sostituendo il valore assoluto con la norma. Così si potrebbe continuare definendo le bolle, gli intorni, i sotto-insiemi aperti, chiusi,... di uno spazio normato. Per brevità, diamo solamente la definizione di funzione continua fra spazi normati:

2.9 **Definizione.** Se $(X, \| \ \|_1)$ e $(Y, \| \ \|_2)$ sono spazi normati, $E \subset X$, $f : E \to Y$ e $\overline{x} \in E$, si dice che f è continua in $\overline{x}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in E \; (\|x - \overline{x}\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\overline{x})\|_2 < \varepsilon) \, . \blacksquare$$

2.10 **Osservazione.** Se $(X, \| \ \|)$ è uno spazio normato, si può dimostrare facilmente che la applicazione da X a valori nello spazio di Banach $(\mathbb{R}, | \ |)$ definita da $x \in X \to \|x\| \in \mathbb{R}$ è continua. ∎

3 - SPAZI DI HILBERT

Introduciamo la seguente definizione:

3.1 **Definizione.** La coppia $(X, (\ , \ ))$ dove X è uno spazio vettoriale (reale) e $(\ , \ ) : X \times X \to \mathbb{R}$ è una applicazione (chiamata *prodotto scalare*) verificante le condizioni seguenti:
j) $\forall x \in X \ , \ (x, x) \geq 0$,
jj) $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$,
jjj) $\forall x \, , \, y \in X \ , \ (x, y) = (y, x)$, (*simmetria*),
jv) $\forall x, y, z \in X \, , \, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (*bilinearità*).
viene chiamata uno spazio *pre-hilbertiano* (reale). ∎

In ogni spazio prehilbertiano si può definire una struttura naturale di spazio normato, come risulta dal seguente:

3.2 **Teorema.** Se $(X, (\ , \ ))$ è uno spazio prehilbertiano, la applicazione:

$$\| \ \| : X \to \mathbb{R} \text{ definita da } \|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{3.1}$$

è una norma su X. Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\forall x, y \in X \quad |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \ \text{ (disuguaglianza di J. Schwartz),} \tag{3.2}$$

$$\forall x, y \in X \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \text{ (relazione del parallelogramma).} \tag{3.3}$$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \, . \tag{3.4}$$

Dimostrazione: Si verificano intanto facilmente gli assiomi i), ii), iii) della Definizione 2.1. Si ha inoltre per ogni $x \, , \, y \in X$:

$$0 \leq \|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x, y) \tag{3.5}$$

e dunque

$$2\,|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad , \quad \forall x \, , \, y \in X \, . \tag{3.6}$$

Supponiamo ora che $x_0, y_0 \in X$ con $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$. Si ha allora (grazie alla (3.6)) che $|(x_0, y_0)| \leq 1$. Osserviamo che la disuguaglianza di Schwartz è ovvia se $x = 0$ o $y = 0$. Negli altri casi si ha (dato che $x/\|x\|$ e $y/\|y\|$ sono elementi di X di norma unitaria):

$$|(x,y)| = \|x\|\,\|y\| \left|\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \le \|x\|\,\|y\|\,,$$

cioè la disuguaglianza di Schwartz. Grazie alla (3.5)) (con il segno +) e alla disuguaglianza di Schwartz si ricava che

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + y\|)^2$$

che prova l'assioma iv) della Definizione 2.1. Sommando e sottraendo le due relazioni (3.5), si ricavano subito le relazioni (3.3) e (3.4). ∎

3.3 **Osservazione.** La relazione del parallelogramma è una proprietà che generalizza il fatto che in un parallelogramma elementare la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali. Notiamo che la relazione del parallelogramma è una proprietà degli spazi pre-hilbertiani che viene espressa senza l'uso del prodotto scalare. Tale proprietà è in realtà caratteristica degli spazi pre-hilbertiani in quanto si dimostra che gli spazi normati reali, che verificano la relazione del parallelogramma, possono essere dotati della struttura di spazio pre-hilbertiano con il prodotto scalare definito dalla relazione (3.4). ∎

Diamo infine la:

3.4 **Definizione.** Uno spazio prehilbertiano $(X, (\ ,\ ))$ che sia uno spazio di Banach rispetto alla norma (3.1), si dice spazio di *Hilbert.* ∎

3.5 **Esempio.** $\mathbb{R}^N$ con il prodotto scalare:

$$(X,Y) = \sum_{k=1}^{N} x_k\, y_k$$

è uno spazio di Hilbert. ∎

3.6 **Osservazione.** Se $(X, (\ ,\ ))$ è uno spazio prehilbertiano, si può dimostrare facilmente che la applicazione prodotto scalare è continua rispetto a entrambi i suoi argomenti. Più precisamente si dimostra senza difficoltà che, fissati $\overline{x}\,,\,\overline{y} \in X$, vale la relazione:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \delta > 0\ :\ \forall x, y \in X\ \left(\|x - \overline{x}\| + \|y - \overline{y}\| < \delta \Rightarrow |(x,y) - (\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon\right),$$

dove ovviamente abbiamo posto (ad esempio) $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. ∎

4 - ESEMPI NOTEVOLI DI SPAZI DI BANACH E HILBERT

Nella presente sezione introdurremo alcuni esempi di spazi normati e pre-hilbertiani, cioè alcuni esempi dei più elementari *spazi funzionali.* Stiamo dunque entrando in un ambiente intermedio fra l'Analisi Matematica e l'Analisi Funzionale.

Prima di iniziare la descrizione di alcuni spazi, diamo un risultato di carattere generale:

4.1 **Proposizione.** Dati due spazi normati $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$, sia $T : X \to Y$ una applicazione lineare. Si ha allora che T è continua su tutto X se e solo se esiste una costante $c >$ tale che

$$\|Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X \quad , \quad \forall x \in X\,. \tag{4.1}$$

Dimostrazione: Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Sapendo cioè che vale la (4.1), dimostriamo la continuità di T. Grazie alla struttura lineare degli spazi e alla linearità di T basta dimostrare la continuità nel punto $0 \in X$. Data una successione $x_n \in X$ tale che $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ in X, si ha che $\|x_n\|_X \to 0$, da cui:

$$\|T\,x_n - T0\|_Y \leq \|T\,x_n\|_Y \leq c\|x_n\|_Y\,.$$

Si ha dunque che $\lim_{n\to\infty} T\,x_n = 0$ in Y, cioè l'asserto.

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Sapendo cioè che la funzione T è continua dimostriamo la (4.1). Sia V la bolla unitaria aperta di Y di centro 0. Siccome T è continua, si ha che $T^{-1}(V)$ è un aperto di X contenente l'elemento nullo di X. Dunque esiste $r > 0$ tale che il sottoinsieme U di X costituito dalla bolla aperta di centro 0 e raggio r sia contenuto in $T^{-1}(V)$. Avremo allora che $\|Tx\|_Y \leq 1$ per ogni $x \in U$. Si avrà infine (se $x \neq 0$), osservando che l'elemento $u = r\frac{x}{\|x\|_X} \in U$:

$$\|T\,x\|_Y = \|T\big(\frac{\|x\|_X}{r}u\big)\|_Y =\leq \frac{\|x\|_X}{r}\,,$$

cioè l'asserto con $c = 1/r$. ∎

Si dimostrano intanto facilmente i seguenti risultati:

4.2 **Lo spazio $L(E)$.** Dato E insieme non vuoto, lo spazio $L(E)$ delle funzioni reali limitate definite su E con la struttura vettoriale descritta nell'Esempio 1.2 e con la norma

$$\|f\|_0 = \sup\{|f(x)|\,,\, x \in E\}\,, \tag{4.2}$$

è uno spazio normato. ∎

4.3 **Lo spazio $C^0(E)$.** Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme non vuoto, lo spazio $C^0(E)$ dato dal sotto-spazio vettoriale di $L(E)$ costituito dalle funzioni reali continue e limitate su E con la norma definita in (4.2), è uno spazio normato. ∎

4.4 **Osservazione.** Osserviamo che lo spazio $C^0([-1,1])$, con la norma (4.2), non è uno spazio normato derivato da uno spazio pre-hilbertiano, dato che, se poniamo $f \equiv 1$ e $g \equiv x$, si ottiene facimente che:

$$\|f+g\|_0^2 = \|f-g\|_0^2 = 4 \quad , \quad \|f\|_0^2 = \|g\|_0^2 = 1\,,$$

e dunque non è soddisfatta la condizione del parallelogramma. ∎

4.5 **Teorema.** Lo spazio $L(E)$ sopra definito è uno spazio di Banach.

Dimostrazione: Verifichiamo la completezza di $L(E)$. Se f_n è una successione di Cauchy in $L(E)$, si ha che fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n, m > \overline{n}$, allora

$$\|f_n - f_m\|_0 = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|\,,\, x \in E\} < \varepsilon$$

e dunque

$$\forall x \in E \ \text{ si ha che: } \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,. \tag{4.3}$$

Osserviamo che tale relazione vale uniformemente rispetto a $x \in E$ (cioè l'intero $\overline{n}$, tale che $n, m > \overline{n}$, è indipendente da $x \in E$).

La relazione (4.3) significa, fissato $x \in E$, che la successione reale $n \to f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, Essendo $\mathbb{R}$ uno spazio di Banach, si ha che per ogni $x \in E$ esiste $f(x) \in \mathbb{R}$ in modo tale che $f_n(x) \to f(x)$.

Passando al limite per $n \to \infty$ nella (4.3), si ricava che

$$\forall x \in E \quad \text{si ha che: } |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \,, \tag{4.4}$$

da cui

$$\forall x \in E \quad \text{si ha che: } |f(x)| \leq |f_m(x)| + \varepsilon \,,$$

che, essendo ciascuna f_m limitata, ci dice che $f \in L(E)$. Essendo la (4.4) valida uniformemente rispetto $x \in E$, si ricava che $(m > \overline{n})$

$$\sup\{|f(x) - f_m(x)| \,,\, x \in E\} < \varepsilon \,,$$

che significa che $f_n \to f$ in $L(E)$, cioè l'asserto. ∎

4.6 **Osservazione.** È facile verificare che la convergenza in $L(E)$ equivale alla convergenza uniforme. ∎

4.7 **Teorema.** Lo spazio $C^0(E)$ definito in 4.3 è uno spazio di Banach.

Dimostrazione: Se f_n è una successione di Cauchy in $C^0(E)$, f_n è di Cauchy in $L(E)$. Grazie alla completezza di $L(E)$, esiste $f \in L(E)$ in modo tale che $f_n \to f$ in $L(E)$. Siccome la convergenza in $L(E)$ equivale alla convergenza uniforme (come abbiamo rilevato nella Osservazione 4.6) e siccome la convergenza uniforme conserva la continuità, si ricava che $f \in C^0(E)$ e che $f_n \to f$ in $C^0(E)$. Vale dunque l'asserto. ∎

4.8 **Esempio.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, se nello spazio vettoriale $C^0([a, b])$ si introduce la norma:

$$\|f\|_* = \int_a^b |f(x)| \, dx \,, \tag{4.5}$$

si ottiene uno spazio normato, ma non uno spazio di Banach. Se infatti consideriamo la successione di funzioni $f_n \in C^0([-1, 1])$ definita da:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; t \in [-1, 0[, \\ nt, & \text{se } \; t \in [0, 1/n[, \\ 1, & \text{se } \; t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

si verifica facilmente che f_n è una successione di Cauchy con la metrica integrale definita cioè dalla norma (4.5), in quanto si ha:

$$\|f_n - f_m\|_* = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)| \, dt = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \,.$$

Supponiamo, per assurdo, che esista $f \in C^0([-1, 1])$ in modo tale che $f_n \to f$ con la metrica integrale. Si avrebbe che:

$$\int_{-1}^{1}|f(t)-f_n(t)|\,dt \geq \int_{-1}^{0}|f(t)-f_n(t)|\,dt+\int_{1/n}^{1}|f(t)-f_n(t)|\,dt = \int_{-1}^{0}|f(t)|\,dt+\int_{1/n}^{1}|f(t)-1|\,dt\,,$$

e dunque, fissato $\varepsilon > 0$ e per n sufficientemente grande:

$$\int_{-1}^{1}|f(t)-f_n(t)|\,dt \geq \int_{-1}^{0}|f(t)|\,dt + \int_{\varepsilon}^{1}|f(t)-1|\,dt\,,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ha che:

$$\int_{-1}^{0}|f(t)|\,dt + \int_{\varepsilon}^{1}|f(t)-1|\,dt = 0\,,$$

dunque (ricordando che la funzione f è continua):

$$f(t) = 0\ ,\ t \in [-1,0[\quad , \quad f(t) = 1\ ,\ t \in]\varepsilon, 1[$$

da cui, data l'arbitrarietà di ε, la funzione f sarebbe uguale a 1 nell'intervallo $]0,1]$. Abbiamo così trovato un assurdo perchè in tal caso la funzione f non può essere continua.

Osservare infine che vale la maggiorazione

$$\|f\|_* \leq (b-a)\|f\|_0\ ,\ \forall f \in C^0([a,b])\,.$$

tale maggiorazione ci dice, grazie alla Proposizione 4.1, che è continua la applicazione identica fra lo spazio normato $C^0([a,b])$ con la norma $\|\ \|_0$ e lo stesso spazio $C^0([a,b])$ con la norma $\|\ \|_*$.

I due spazi sono però profondamente differenti, in quanto il primo è uno spazio di Banach e il secondo non lo è. ∎

4.9 **Esempio.** Lo spazio $C^0([-1,1])$ con il prodotto scalare:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt$$

è uno spazio prehilbertiano, ma non uno spazio di Hilbert. Infatti si ha che la norma definita dal prodotto scalare è data da:

$$\|f\| = \left[\int_{-1}^{1}|f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}\,.$$

Adattando le considerazioni contenute nell'Osservazione 4.8, si verifica che esistono successioni di Cauchy non convergenti. ∎

4.10 **Esempio.** Dati $a,b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, lo spazio $C^1([a,b])$ con la norma (4.2) (dove abbiamo posto $E = [a,b]$) è uno spazio normato, ma non uno spazio di Banach. Consideriamo ad esempio la successione di funzioni $f_n \in C^1([-1,1])$ definite da:

$$f_n(t) = \begin{cases} |t|, & \text{se } |t| \geq 1/n, \\ \frac{1}{2}n\left(t^2 + \frac{1}{n^2}\right), & \text{se } |t| < 1/n; \end{cases}$$

si verifica che le funzioni f_n costituiscono una successione di Cauchy in $C^1([-1,1])$ (con la norma (4.2)) e che convergono uniformemente alla funzione $f(t) = |t|$, che non è derivabile nel punto 0. Ciò porta subito al fatto che f_n è una successione di Cauchy non convergente in $C^1([-1,1])$, rispetto alla norma (4.2). ∎

L'esempio 4.10 indica, fra l'altro, che la convergenza uniforme non conserva la continuità della derivata. Anzi sappiamo che per conservare la continuità della derivata abbiamo bisogno di una struttura più raffinata. Vediamo il seguente

4.11 **Teorema.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, lo spazio $C^1((a,b))$ con la norma:

$$\|f\|_1 = \sup\{|f(s)|\,,\, s \in (a,b)\} + \sup\{|f'(s)|\,,\, s \in (a,b)\}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione: Se f_n è una successione di Cauchy in $C^1((a,b))$ con la norma $\|\ \|_1$, si ricava che f_n e f_n' sono di Cauchy in $C^0((a,b))$ con la norma (4.2). Utilizzando il Teorema 4.7, si trovano $f, g \in C^0((a,b))$ tali che $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ con la norma (4.2). Utilizzando il Teorema 2.17 del cap. I di conservazione della derivata, si ha che $f \in C^1((a,b))$ e che $f' = g$. A tale punto è facile verificare che $f_n \to f$ con la norma $\|\ \|_1$, da cui l'asserto. ∎

Nel seguito il seguente risultato ci sarà utile:

4.12 **Lemma.** Sia $(X, \|\ \|)$ uno spazio normato e $x_n \in X$ una successione di Cauchy in X. Si ha allora che successione reale $n \to \|x_n\|$ è convergente in $\mathbb{R}$. Conseguentemente si ha che la successione x_n è limitata in X.

Dimostrazione: Sia $x_n \in X$ di Cauchy in X. Dato $\varepsilon > 0$, se $n, m \in \mathbb{N}$ sono sufficientemente grandi si ha che $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ e (ricordando la Proposizione 2.2) dunque $|\|x_n\| - \|x_m\|| < \varepsilon$. Si ha dunque che la successione $n \to \|x_n\|$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, cioè è convergente in $\mathbb{R}$. Segue l'asserto. ∎

4.13 **Teorema.** Lo spazio vettoriale ℓ^2 costituito dalle successsioni reali $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ soddisfacenti la condizione:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2(k) < \infty\,,$$

con il prodotto scalare

$$(\lambda, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(k)\,\eta(k) \tag{4.6}$$

e la norma

$$\|\lambda\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2(k)}\,, \tag{4.7}$$

è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione: Osserviamo che, se $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \ell^2$, allora $t\,\lambda \in \ell^2$. Se $\lambda, \eta \in \ell^2$, allora

$$|\lambda(k) + \eta(k)|^2 \leq 2(\lambda(k)^2 + \eta(k)^2)$$

e dunque $\lambda + \eta \in \ell^2$. Lo spazio ℓ^2 è dunque uno spazio vettoriale.

Dimostriamo ora che se $\lambda, \eta \in \ell^2$, allora la serie che compare al secondo membro della (4.6) è convergente e dunque ha senso il prodotto scalare (λ, η). Osserviamo infatti che

$$|\lambda(k)\,\eta(k)| \leq \frac{1}{2}\big(\lambda^2(k) + \eta^2(k)\big)$$

e dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda(k)\,\eta(k)| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \eta^2(k)\right) .$$

Dato che su $\mathbb{R}$ la convergenza assoluta implica la convergenza semplice la serie che compare al secondo membro della (4.6) è convergente.

Si verificano facilmente gli assiomi j)-jv) della Definizione 3.1 di spazio pre-hilbertiano.

Dimostriamo infine che ℓ^2 è completo. Sia λ_n una successione di Cauchy in ℓ^2. Si ha intanto che (per ogni n, m, $k \in \mathbb{N}$):

$$|\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|^2 = \|\lambda_n - \lambda_m\|^2_{\ell^2} ,$$

da cui (fissato $k \in \mathbb{N}$) si ha che la successione $n \to \lambda_n(k)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Dunque esiste un valore reale $\lambda(k)$ tale che $\exists \lim_{n\to\infty} \lambda_n(k) = \lambda(k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Verifichiamo ora che la successione $k \to \lambda(k)$ è un elemento di ℓ^2. Grazie al Lemma 4.12, si ha che esiste $L > 0$ in modo tale che $\|\lambda_n\|_{\ell^2} \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $N \in \mathbb{N}$, segue che:

$$\sum_{k=0}^{N} |\lambda(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |\lambda_n(k)|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_n(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\|^2_{\ell^2} \leq L^2 ,$$

da cui $\lambda \in \ell^2$.

Verifichiamo infine che $\lambda_n \to \lambda$ in ℓ^2. Si ha intanto che (per ogni $n, k \in \mathbb{N}$):

$$|\lambda_n(k) - \lambda(k)|^2 = \lim_{m\to\infty} |\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|^2 .$$

Fissato $N \in \mathbb{N}$, segue allora che:

$$\sum_{k=0}^{N} |\lambda_n(k) - \lambda(k)|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|^2 \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|^2 = \lim_{m\to\infty} \|\lambda_n - \lambda_m\|^2_{\ell^2} ,$$

da cui

$$\|\lambda_n - \lambda\|^2_{\ell^2} \leq \lim_{m\to\infty} \|\lambda_n - \lambda_m\|^2_{\ell^2}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n - \lambda\| = 0 .$$

Segue l'asserto. ∎

4.14 **Osservazione.** Dato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la successione

$$\mathbf{e}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \mathbf{e}_n(k) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } k = n, \\ 0\,, & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

È evidente che $\mathbf{e}_n \in \ell^2$ e che ogni famiglia finita estratta dalla $\{\mathbf{e}_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ è costituita da elementi linearmente indipendenti in ℓ^2. Lo spazio vettoriale ℓ^2 ha dunque dimensione infinita. ∎

Nel seguito ci saranno utili i seguenti:

4.15 **Lemma.** Dato $(X, \|\ \|)$ spazio normato e x_n successione di Cauchy in X, se una successione x_{n_k} estratta dalla x_n è convergente verso $\overline{x} \in X$, si ha allora che tutta la successione x_n converge verso $\overline{x}$ in X.

Dimostrazione: Per ogni $n\,,\, k \in \mathbb{N}$, si ha che $\|x_n - \overline{x}\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - \overline{x}\|$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $n\,,\, k$ sufficientemente grandi si ha che $\|x_n - \overline{x}\| \leq \varepsilon$. Segue l'asserto. ∎

4.16 **Lemma.** Dato $(X, \|\ \|)$ spazio normato e x_n successione di Cauchy in X, esiste una successione x_{n_k} estratta dalla x_n tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 1\,.$$

Dimostrazione: Grazie al fatto che x_n è successione di Cauchy in X, dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $n, m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grandi si ha che $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Fissando allora $\varepsilon = 1/2$, si può determinare $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che $\|x_n - x_{n_0}\| < 1/2$ per ogni $n > n_0$. Analogamente, fissando $\varepsilon = 1/2^2$, si può determinare $n_1 \in \mathbb{N}$ (con $n_1 > n_0$) in modo tale che $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2^2$ per ogni $n > n_1$. Procediamo ora per induzione su k. Supponiamo di aver determinato $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, con $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ in modo tale che $(h = 0, 1, \ldots, k)$ $\|x_n - x_{n_h}\| < 1/2^{h+1}$ per ogni $n > n_h$. fissando $\varepsilon = 1/2^{k+2}$, si può determinare $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ (con $n_{k+1} > n_k$) in modo tale che $\|x_n - x_{n_{k+1}}\| < 1/2^{k+2}$ per ogni $n > n_{k+1}$. Si avrà che

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^{k+2}} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

da cui l'asserto. ∎

4.17 **Nota.** Nel seguito prenderemo in considerazioni spazi di funzioni $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dove $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue. Molto spesso, quando si lavora in tali spazi, si identificano fra di loro le funzioni che sono uguali quasi ovunque in E. Ciò evidentemente equivale a un passaggio al quoziente (in genere sottinteso) rispetto alla relazione di equivalenza di uguaglianza quasi ovunque. Gli elementi di tali spazi sono, a rigore, *classi di funzioni.* ∎

Tenendo presente quanto detto nella precedente Osservazione, introduciamo l'importante

4.18 **Definizione.** Sia $p \in \mathbb{R}$ con $p \in [1, +\infty[$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Definiamo spazio $L^p(E)$ come la famiglia delle (classi di) funzioni $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ misurabili su E e di potenza p-esima integrabile su E. ∎

4.19 **Teorema.** Dati $p \in [1, +\infty[$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile secondo Lebesgue, $L^p(E)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p(x)\, dx \right)^{1/p} . \tag{4.8}$$

In particolare $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_E f(x)\, g(x)\, dx\,. \tag{4.9}$$

Dimostrazione: Non dimostreremo in tutta la sua generalità il precedente Teorema, ma ci accontenteremo del controllo nel caso in cui $p = 1$. Dovremo verificare che $L^1(E)$, cioè la famiglia delle (classi di) funzioni integrabili su E, con la norma

$$\|f\| = \int_E |f(x)|\, dx\,,$$

è uno spazio di Banach.

Osserviamo che, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^1(E)$, allora $\lambda f \in L^1(E)$. Siccome la somma di due funzioni integrabili è ancora integrabile, si ha che, se $f\,,\, g \in L^1(E)$, allora $f + g \in L^1(E)$. Lo spazio $L^1(E)$ è dunque uno spazio vettoriale.

Si verificano facilmente gli assiomi i)-iv) della Definizione 2.1 di spazio normato.

Dimostriamo infine che $L^1(E)$ è completo. A tale scopo sia $f_k \in L^1(E)$ una successione di Cauchy che (grazie ai Lemmi 4.15 e 4.15) non è limitativo supporre che verifichi la condizione aggiuntiva

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \leq 1\,, \tag{4.10}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \leq 1\,.$$

Siamo dunque in condizione di applicare il Teorema di integrazione per serie del cap. II. Segue allora che la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

converge q.o. in E a una funzione integrabile su E (dunque appartenente a $L^1(E)$). Poniamo

$$f : E \to \widetilde{\mathbb{R}} \ \text{ definita da: } \ f(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))\,.$$

Si ha ovviamente che $f \in L^1(E)$. Si ha inoltre che

$$f_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \quad , \quad x \in E\,.$$

Dimostriamo ora che $f_n \to f$ in $L^1(E)$. Si ha

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_1 &= \int_E \left| f_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x)) - f_0(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(f_{k+1}(x)-f_k(x)) \right| dx \\ &= \int_E \left| \sum_{k=n}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x)) \right| dx \le \int_E \sum_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(x)-f_k(x)| dx \,.\end{aligned}$$

Applicando ancora il Teorema di integrazione per serie, potremo invertire le operazioni di serie e di integrale, ottenendo la seguente stima

$$\|f-f_n\|_1 \le \sum_{k=n}^{\infty} \int_E |f_{k+1}(x)-f_k(x)|\, dx = \sum_{k=n}^{\infty} \|f_{k+1}-f_k\|_1 \,.$$

Ricordando l'ipotesi (4.10), si ricava che $\|f-f_n\| \to 0$, da cui $f_n \to f$ in $L^1(E)$, cioè l'asserto. ∎

4.20 **Osservazione.** Con il precedente Teorema abbiamo visto che avendo a disposizione una teoria della misura e dell'integrale più evoluta, si sono potuti introdurre gli spazi delle funzioni di p-esima potenza integrabile. Tali ambienti sono particolarmente utili nello studio di numerosi problemi.

Avendo a disposizione anche una buona Teoria della derivazione (essenzialmente la Teoria delle distribuzioni dovuta a Laurent Schwartz), (superando mille complicazioni) si possono costruire gli spazi delle funzioni aventi tutte le derivate (distribuzionali) fino a un certo ordine k che sono di p-esima potenza integrabile. Tali spazi (di norma indicati con $W^{k,p}$) sono chiamati *spazi di Sobolev* e sono per gli Analisti di enorme importanza. ∎

5 - IL TEOREMA DELLE PROIEZIONI

5.1 **Definizione.** Dato X spazio normato, $K \subset X$ si dice *convesso* se

$$\forall x, y \in K \ , \ \forall t \in [0,1] \ \text{ si ha che: } \ tx + (1-t)y \in K \,. ∎$$

5.2 **Osservazione.** La precedente Definizione esprime il fatto che un sotto-insieme K di uno spazio di Hilbert è convesso se e solo se, per ogni $x, y \in K$, il segmento congiungente x e y è contenuto in K. ∎

Vale l'importante risultato

5.3 **Teorema delle proiezioni sui convessi.** Dati X spazio di Hilbert e K sotto-insieme convesso, chiuso e non vuoto di X, si ha che per ogni $x \in X$ esiste uno e uno solo $\overline{x} \in K$ tale che

$$\|x-\overline{x}\|_X = \min\{\|x-y\|_X, y \in K\} = \mathrm{d}(x,K) = \inf\{\|x-y\|_X, y \in K\} \,. \tag{5.1}$$

Dimostrazione: Poniamo $d = \mathrm{d}(x,K)$.

Unicità: Dato $x \in X$, supponiamo ora che $x_1, x_2 \in K$ siano tali che $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = d$. Bisogna dimostrare che $x_1 = x_2$.

Siccome K è convesso si ha che $(x_1 + x_2)/2 \in K$ e dunque

$$\|x - (x_1 + x_2)/2\| \geq d \,. \tag{5.2}$$

Osserviamo che

$$\|x - (x_1 + x_2)/2\| = \|2x - x_1 - x_2\|/2 = \|(x - x_1) + (x - x_2)\|/2 \,.$$

Dunque

$$\|(x - x_1) + (x - x_2)\|^2 \geq 4\, d^2 \,. \tag{5.3}$$

Utilizzando la relazione del parallelogramma, si ha che

$$\|(x - x_1) + (x - x_2)\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2(\|x - x_1\|^2 + \|x - x_2\|^2) = 4\, d^2 \,.$$

Ricordando la (5.3), si ha infine che

$$4\, d^2 + \|x_1 - x_2\|^2 \leq 4\, d^2 \,,$$

da cui $\|x_1 - x_2\| = 0$, cioè $x_1 = x_2$. L'unicità è provata.

Esistenza: Sia $x_n \in K$ una successione minimizzante la (5.1), cioè, ad esempio tale che

$$d \leq \|x_n - x\| \leq d + 1/n \,. \tag{5.4}$$

Incominciamo dimostrando che la successione $n \to x_n$ è di Cauchy in X.
Dati $n.m \in \mathbb{N}$, siccome K è convesso, si ha che $(x_n + x_m)/2 \in K$ e dunque

$$\|x - (x_n + x_m)/2\| = \|(x - x_n) + (x - x_m)\|/2 \geq d \quad , \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \,. \tag{5.5}$$

Ricordando la (5.4) e utilizzando ancora la relazione del parallelogramma si ha che

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) \leq 2([(d + 1/n)^2 + (d + 1/m)^2] \,.$$

Ricordando la (5.5), si ha

$$4\, d^2 + \|x_n - x_m\|^2 \leq 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) \leq 2([(d + 1/n)^2 + (d + 1/m)^2] \,.$$

Dunque

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2([(d + 1/n)^2 + (d + 1/m)^2] - 4\, d^2 \,.$$

Segue allora che

$$\exists \lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\|^2 = 0$$

e dunque la successione $n \to x_n$ è di Cauchy in X.

Siccome X è uno spazio di Hilbert e K è chiuso, esiste $\overline{x} \in K$ in modo tale che $x_n \to \overline{x}$. Dunque (ricordando la (5.4)):

$$\|x - \overline{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d\,.$$

Anche l'esistenza è provata. ∎

5.4 **Definizione.** La applicazione $x \in X \to \overline{x} \in K$ del Teorema delle proiezioni sui convessi viene chiamata *proiezione* su K e viene indicata con $\pi_K x$. ∎

Lo studio delle proiezioni sui convessi è particolarmente semplice nel caso speciale in cui il convesso sia un sottospazio vettoriale. Vale allora il

5.5 **Teorema.** Sia X uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale chiuso di X. Si ha allora che

$$(x - \pi_M x, y) = 0 \quad , \quad \forall x \in X \ , \ y \in M\,.$$

Dimostrazione: Grazie al fatto che $\pi_M x$ è il punto di minima distanza di x da M, si ha che

$$\|x - \pi_M x\| \leq \|x - \pi_M x + t\,y\| \quad , \quad \forall t > 0 \ , \ y \in M\,,$$

da cui

$$\|x - \pi_M x\|^2 \leq \|x - \pi_M x + t\,y\|^2 = (x - \pi_M x + t\,y, x - \pi_M x + t\,y) \quad , \quad \forall t > 0 \ , \ y \in M$$

e dunque, svolgendo i facili conti,

$$0 \leq 2\,t(x - \pi_M x, y) + t^2\|y\|^2 \quad , \quad \forall t > 0 \ , \ y \in M\,.$$

se ora dividiamo per t e facciamo il limite per $t \to 0$, si ha

$$(x - \pi_M x, y) \geq 0 \quad , \quad \forall y \in M\,.$$

Se, nella precedente relazione, sostituiamo $y \in M$ con $-y \in M$, si ricava l'asserto. ∎

5.6 **Osservazione.** Il Teorema 5.5 estende agli spazi di Hilbert, il risultato, ben noto nel caso elementare, che $x - \pi_M x$ è ortogonale a M. ∎

Un'altra nozione elementare può essere estesa agli spazi Hilbert

5.7 **Definizione.** Sia X uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale di X. Si dice allora che $x \in X$ è *ortogonale* a M se

$$(x, y) = 0 \quad , \quad \forall y \in M\,. ∎$$

Il seguente risultato è di facile controllo

5.8 **Teorema.** Sia X uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale di X. Si ha allora che il sottoinsieme di X

$$M^\perp = \{x \in X \, : \, (x, y) = 0\,, \, y \in M\}$$

è sottospazio vettoriale chiuso di X. ∎

5.9 **Definizione.** Se X è uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale di X, il sottoinsieme $M^\perp$ viene chiamato *sottospazio ortogonale* di M. ∎

5.10 **Osservazione.** Sia X uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale di X. Se $x \in M$ e $x \in M^\perp$, si ha che $x = 0$, in quanto (essendo x ortogonale a M) si deve avere che $(x, x) = 0$, cioè $x = 0$. ∎

5.11 **Teorema di decomposizione ortogonale.** Sia X uno spazio di Hilbert e $M \subset X$ un sottospazio vettoriale chiuso di X. Se $x \in X$ allora esistono $y \in M$ e $z \in M^\perp$ in modo tale che $x = y + z$. Si ha inoltre che tale rappresentazione è unica.

Dimostrazione: Dato $x \in X$ si ha che $x = \pi_M x + (x - \pi_M x)$. Siccome $\pi_M x \in M$ e (grazie al Teorema 5.5) $x - \pi_M \in M^\perp$, abbiamo provato che x ammette la rappresentazione richiesta.

Verifichiamo anche l'unicità della rappresentazione. Dato $x \in X$, se si ha che

$$x = y + z = y' + z' \quad \text{con} \quad y\,,\, y' \in M \;,\; z\,,\, z' \in M^\perp\,,$$

si ottiene che $y - y' = z - z'$. Siccome $y - y' \in M$ e $z - z' \in M^\perp$, utilizzando l'Osservazione 5.10, si ha che $y = y'$ e che $z = z'$ e dunque l'asserto. ∎

6 - LO SPAZIO DUALE

6.1 **Definizione.** Dati X e Y spazi normati, una applicazione lineare $L : X \to Y$ viene detta *limitata* se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|Lx\|_Y \le c\,\|x\|_X \quad , \quad \forall x \in X\,. \blacksquare$$

Nella Proposizione 4.1 abbiamo provato che $L : X \to Y$ è continua se e solo se è limitata.

6.2 **Definizione.** Dati X e Y spazi normati, la famiglia delle applicazioni lineari e continue $L : X \to Y$ è uno spazio vettoriale che viene indicato con $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dato $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ si dimostra che la seguente espressione

$$|||L||| = \sup\{\|L(x)\|_Y / \|x\|_X\,,\, x \in X - \{0\}\}$$

definisce su $\mathcal{L}(X, Y)$ una norma che rende $\mathcal{L}(X, Y)$ uno spazio di Banach (anche nel caso in cui X o Y non siano completi).

Osserviamo che vale la disuguaglianza:

$$\|L(x)\|_Y \le |||L|||\,\|x\|_X \quad , \quad x \in X \;,\; L \in \mathcal{L}(X, Y)\,. \blacksquare$$

6.3 **Definizione.** Dato X spazio normato reale, una applicazione lineare e continua $x' : X \to \mathbb{R}$ viene chiamata *funzionale* lineare e continuo su X.

Come per la precedente Definizione, la famiglia dei funzionali lineari e continui su X è uno spazio vettoriale che viene chiamato *spazio duale* di X e viene indicato con X'.

Dato $x' \in X'$, si ha allora che

$$\|x'\|_* = \sup\{|x'(x)|/\|x\|_X \, , \, x \in X - \{0\}\}$$

definisce su X' una norma che rende X' uno spazio di Banach (anche nel caso in cui X non sia completo). Vale anche la disuguaglianza:

$$|x'(x)| \leq \|x'\|_* \, \|x\|_X \quad , \quad x \in X \ , \ x' \in X' \, . \blacksquare$$

La caratterizzazione del duale di uno spazio è molto importante. Il risultato più semplice, in questo ordine di idee, è il seguente che caratterizza gli elementi dello spazio duale di uno spazio di Hilbert:

6.4 **Teorema di Riesz.** Dato X spazio di Hilbert e $x' \in X'$, esiste unico $y \in X$ in modo tale che

$$x'(x) = (y, x) \quad , \quad \forall x \in X \, . \tag{6.1}$$

Si ha inoltre che $\|x'\|_* = \|y\|$.

Dimostrazione: *a) Esistenza*: Sia N il nucleo di x', cioè

$$N = \{x \in X \, : \, x'(x) = 0\} \, .$$

Se $N = X$, segue che $x' \equiv 0$, da cui $y = 0$ verifica la (6.1). Consideriamo ora il caso in cui N è incluso strettamente in X. Grazie al Teorema di decomposizione ortogonale 5.11, esiste $z \in N^\perp$ con $z \neq 0$. Scegliamo ora

$$y = \frac{x'(z)}{\|z\|^2} z$$

e verifichiamo che effettivamente soddisfa la (6.1). Si ha infatti (per ogni $x \in X$):

$$(y, x) - x'(x) = \frac{x'(z)}{\|z\|^2}(z, x) - x'(x) = \frac{1}{\|z\|^2}[x'(z)(z, x) - (z, z)\, x'(x)] = \frac{1}{\|z\|^2}(x'(z)\, x - x'(x)\, z, z)$$

ossia

$$(y, x) - x'(x) = \frac{1}{\|z\|^2}(x'(z)\, x - x'(x)\, z, z) \, . \tag{6.2}$$

Osserviamo anche che

$$x'(x'(z)\, x - x'(x)\, z) = x'(z)\, x'(x) - x'(x)\, x'(z) = 0 \, ,$$

cioè $x'(z)\, x - x'(x)\, z \in N$. Siccome $z \in N^\perp$, ricordando la relazione (6.2), si ricava che $(y, x) - x'(x) = 0$, cioè la relazione (6.1) è soddisfatta.

b) Unicità: Supponiamo che esistano $y_1, y_2 \in X$ in modo tale che:

$$x'(x) = (y_1, x) = (y_2, x) \quad , \quad \forall x \in X \, .$$

Si ha allora

$$(y_1 - y_2, x) = 0 \quad , \quad \forall x \in X \, .$$

Scegliendo $x = y_1 - y_2$, si ottiene che $\|y_1 - y_2\| = 0$, da cui $y_1 = y_2$.

c) Uguaglianza delle norme: Il caso in cui $x' \equiv 0$ è banale.

Se $x' \not\equiv 0$, segue che $y \neq 0$. Si ha allora che $\|y\|^2 = (y, y) = x'(y) \leq \|x'\|_* \|y\|$ e dunque, dividendo per $\|y\|$, si ha che $\|y\| \leq \|x'\|_*$.

D'altra parte si ha

$$\|x'\|_* = \sup \left\{ \frac{|x'(x)|}{\|x\|} \, , \, x \in X - \{0\} \right\} = \sup \left\{ \frac{|(y, x)|}{\|x\|} \, , \, x \in X - \{0\} \right\}$$

e, per la disuguaglianza di Schwartz,

$$\|x'\|_* \leq \sup \left\{ \frac{\|y\| \, \|x\|}{\|x\|} \, , \, x \in X - \{0\} \right\} = \|y\| \, ,$$

cioè $\|x'\|_* \leq \|y\|$ e dunque l'asserto. ∎

6.5 **Osservazione.** il Teorema di Riesz 6.4 afferma che ad ogni funzionale lineare e continuo su X (cioè ad ogni $x' \in X'$) si può associare in modo univoco un elemento $y = \lambda(x') \in X$ in modo tale che $x'(x) = (y, x)$ per ogni $x \in X$. Ciò vuol dire che $x'(x)$ può essere espresso mediante un prodotto scalare. La applicazione $\lambda : X' \to X$ è dunque iniettiva. Si verifica anche che λ è lineare.

Viceversa è facile controllare che, fissato $y \in X$, la applicazione $x \in X \to (y, x)$ definisce un funzionale lineare e continuo su X. Ciò significa che λ è suriettiva. Siccome, grazie al Teorema di Riesz, $\|x'\|_* = \|\lambda(x')\|$, si ricava che λ è un *isomorfismo isometrico* fra X' e X.

Ogni spazio di Hilbert può dunque essere *identificato* al suo duale. Tale fatto è di fondamentale importanza nel campo dell'Analisi Funzionale e delle sue applicazioni. ∎

Concludiamo questa sezione con due fondanentali teoremi dell'Analisi Funzionale. Le dimostrazioni di questi risultati sono abbbastanza complesse.

6.6 **Teorema di Hahn-Banach.** Sia $(X, \| \, \|)$ uno spazio normato, V un sottospazio vettoriale di X non necessariamente chiuso, $\lambda : V \to \mathbb{R}$ una applicazione lineare tale che

$$\sup\{|\lambda(x)| \, , \, x \in V \, , \, \|x\| \leq 1\} = K < +\infty \, .$$

Esiste allora $x' \in X'$ in modo tale che

$$x'(x) = \lambda(x) \, , \, \forall x \in V \, ,$$

$$\|x'\|_* = K \, . \blacksquare$$

Il Teorema di Hahn-Banach afferma in pratica che un funzionale lineare e continuo su un sottospazio di X può essere prolungato su tutto lo spazio X conservando il valore della norma.

6.7 **Teorema di Banach-Steinhaus.** Siano $(X, \| \, \|_X)$ e $(Y, \| \, \|_Y)$ spazi di Banach, A un insieme non necessariamente numerabile e $T_\alpha : X \to Y$ con $\alpha \in A$ è una famiglia di operatori lineari e continui. Se per ogni $x \in X$ esiste $L(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\|T_\alpha(x)\|_Y \leq L(x) \ , \ \forall \alpha \in A \, , \tag{6.3}$$

si ha allora che esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|||T_\alpha||| = \sup\{|T_\alpha(x)| \, , \, \|x\|_X \leq 1 \, , \, \alpha \in A\} \leq K \, . \blacksquare \tag{6.4}$$

Il Teorema di Banach-Steinhaus è anche chiamato Teorema della uniforme limitatezza in quanto, a partire da una ipotesi di limitatezza puntuale espressa dalla (6.3), si dimostra una stima uniforme rispetto a $\alpha \in A$. ■

IV - SERIE DI FOURIER

1 - Serie di Fourier astratte

La seguente definizione è fondamentale:

1.1 **Definizione.** Un sottoinsieme Γ di uno spazio di Hilbert X si dice un *sistema ortonormale* di X se per ogni $\varphi\,,\,\psi \in \Gamma$ si ha che

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \varphi = \psi, \\ 0\,, & \text{se } \varphi \neq \psi; \end{cases} \tag{1.1}$$

si dice che Γ è un *sistema ortonormale completo* di X se inoltre si ha che

$$\forall x \in X, \text{ se } \forall \varphi \in \Gamma \text{ si ha che } (x, \varphi) = 0\,, \quad \text{allora} \;\; x = 0\,.\blacksquare \tag{1.2}$$

1.2 **Esempio.** La famiglia dei vettori di $\mathbb{R}^n$ data da:

$$(1, \ldots, 0)\,, \ldots,\; (0, \ldots, 1)$$

è un sistema ortonormale completo di $\mathbb{C}^n$. ∎

1.3 **Esempio.** La famiglia $\{\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$, definita da

$$\varphi_i(k) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = k, \\ 0\,, & \text{se } i \neq k, \end{cases}$$

è ovviamente un sistema ortonormale completo il ℓ^2. ∎

Per semplicità, nel seguito prenderemo in considerazione solo il caso di sistemi ortonormali numerabili. La presente teoria è infatti abbastanza banale nel caso dei sistemi ortonormali finiti. Con qualche complicazione ulteriore (che non affronteremo) può essere studiato anche il caso dei sistemi ortonormali non numerabili.

Siccome nel seguito prenderemo solo il caso di sistemi ortonormali numerabili, nel seguito un sistema ortonormale di uno spazio di Hilbert X potrà dunque essere definito come una successione di elementi $\varphi_i \in X$ tale che

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = j, \\ 0\,, & \text{se } i \neq j; \end{cases} \tag{1.3}$$

si dirà inoltre che tale sistema è completo se inoltre si ha che

$$\forall x \in X, \text{ se } \forall i \in \mathbb{N} \text{ si ha che } (x, \varphi_i) = 0\,, \quad \text{allora} \;\; x = 0\,.\blacksquare \tag{1.4}$$

1.4 **Definizione.** Sia X uno spazio di Hilbert. Dati $x \in X$ e $\{\varphi_i\,,\, i \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale di X, le quantità $\widehat{x}(i) = (x, \varphi_i)$ vengono chiamate coefficienti di Fourier (astratti) di x. ∎

1.5 **Osservazione.** Sia X uno spazio di Hilbert. e $\{\varphi_i\,,\,i\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo di X. Se $x\in X$ ha tutti i coefficienti di Fourier nulli, si ricava (banalmente) che $x=0$.

Un modo alternativo di vedere tale fatto può essere espresso nel seguente modo: se due elementi X hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora coincidono. ∎

Nel seguito avremo bisogno della nozione di serie in uno spazio di Banach:

1.6 **Definizione.** Sia X uno spazio di Banach e $x_n\,,\,n=0,\ldots,$ una successione a valori in X. Viene chiamata successione delle *somme parziali* la nuova successione $s_n=\sum_{k=0}^n x_k$. Se esiste $s\in X$ in modo tale che $\exists\lim_{n\to\infty}s_n=s$ con la metrica definita dalla norma dello spazio X, allora si dice che la *serie* delle x_n è *convergente* in X e che la sua *somma* è data da $\sum_{k=0}^\infty x_k=s$ (o anche che la serie converge a s in X). Altrimenti si dice che la *serie* delle x_n è *non convergente* in X. ∎

Un risultato molto interessante è il seguente:

1.7 **Teorema di Fischer e Riesz.** Sia X uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_i\,,\,i\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo di X. Si ha allora che la applicazione $\Lambda: X\to\ell^2$ che associa a $f\in X$ la successione definita da:

$$\Lambda_f(i)=(f,\varphi_i)=\widehat{f}(i)\quad,\quad i\in\mathbb{N}\,,$$

è un isomorfismo isometrico, cioè è lineare, biunivoca e conserva il prodotto scalare (e dunque la norma). Si ha inoltre che:

$$\sum_{i=1}^\infty \widehat{f}(i)\,\varphi_i=f\quad\text{in}\quad X\,.\blacksquare$$

Per dimostrare il Teorema di Fischer e Riesz abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

1.8 **Lemma.** Sia X uno spazio di Hilbert, e φ_i $(i\in\mathbb{N})$ un sistema ortonormale di X. Se a_j $(i=0,1,\ldots,m)$ sono numeri reali assegnati ed $n_j\in\mathbb{N}$ (con $n_0<n_1<\ldots<n_k<\ldots<n_m$), si ha allora:

$$\left\|\sum_{j=1}^m a_j\,\varphi_{n_j}\right\|_X^2=\sum_{j=1}^m|a_j|^2\,.$$

Dimostrazione: Si ha che (dato che la somma è finita):

$$\left\|\sum_{j=1}^m a_j\,\varphi_{n_j}\right\|_X^2=\left(\sum_{i=1}^m a_i\,\varphi_{n_i}\,,\,\sum_{j=1}^m a_j\,\varphi_{n_j}\right)_X=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i\,a_j\,(\varphi_{n_i},\varphi_{n_j})_X=\sum_{i=1}^m|a_i|^2\,.\blacksquare$$

1.9 **Lemma.** Sia X uno spazio di Hilbert, φ_i $(i\in\mathbb{N})$ un sistema ortonormale di X e $\mu\in\ell^2$. Si ha allora che la seguente serie converge in X

$$\sum_{i=1}^\infty\mu(i)\,\varphi_i\in X\,.\tag{1.5}$$

Si ha inoltre che:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \,,\, \varphi_j \right)_X = \mu(j) \quad , \; j \in \mathbb{N} \,, \tag{1.6}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(i)|^2 = \|\mu\|^2_{\ell^2} \,. \tag{1.7}$$

Dimostrazione: Per dimostrare che la serie (1.5) ha senso in X, basta verificare che esiste il limite delle somme parziali

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(i)\, \varphi_i \in X \,.$$

Per verificare che esiste tale limite, possiamo utilizzare la condizione di Cauchy che, nel presente contesto, assume la forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists n_* \in \mathbb{N} \,:\, \forall i, j \in \mathbb{N} \left(n_* < i < j \implies \left\| \sum_{k=i+1}^{j} \mu(i)\, \varphi_i \right\| < \varepsilon \right) \,. \tag{1.8}$$

Siccome $\mu \in \ell^2$, allora la serie $\sum_{i=0}^{\infty} |\mu(i)|^2$ è convergente. Se riapplichiamo il criterio di Cauchy a quest'ultima somma, si ricava che

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists n_* \in \mathbb{N} \,:\, \forall i, j \in \mathbb{N} \left(n_0 < i < j \implies \sum_{k=i+1}^{j} |\mu(i)|^2 < \varepsilon^2 \right) \,. \tag{1.9}$$

Osserviamo che (grazie al Lemma 1.8) si ha

$$\left\| \sum_{k=i+1}^{j} \mu(i)\, \varphi_i \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{j} |\mu(i)|^2 \,.$$

Ricordando le relazioni (1.8) e (1.9) si dimostra la prima parte del Lemma.

Osserviamo che (grazie alla continuità del prodotto scalare)

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \,,\, \varphi_j \right)_X = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(i)\, \varphi_i \,,\, \varphi_j \right)_X = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \mu(i)\, \varphi_i \,,\, \varphi_j \right)_X = \mu(j) \quad , \; j \in \mathbb{N} \,.$$

La relazione (1.6) è dunque verificata.

Si ha infine che (sempre grazie alla continuità del prodotto scalare)

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \,,\, \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j)\, \varphi_j \right)_X = \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(i)\mu(j)\, (\varphi_i \,,\, \varphi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(i)|^2$$

Anche la relazione (1.7) è dimostrata. ∎

1.10 **Osservazione.** Con i dati del precedente Lemma, osserviamo che se $x \in X$ è la somma della serie $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i$, allora (grazie alla relazione (1.6)) si ha che

$$\widehat{x}(j) = \mu(j) \quad , \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

1.11 **Osservazione.** Sia X uno spazio di Hilbert, φ_i ($i \in \mathbb{N}$) un sistema ortonormale di X. Se poniamo

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i\,,\, \mu \in \ell^2 \right\}\,,$$

si verifica facilmente che V è un sottospazio di X. Dimostriamo che V è un sottospazio chiuso di X. Supponiamo infatti che $y \in X$ e che $\mu_k \in \ell^2$ (con $k \in \mathbb{N}$) sia una successione di elementi di ℓ^2 in modo tale che

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k(i)\, \varphi_i = y \quad , \quad \text{in } X\,.$$

Siccome X è uno spazio completo si ricava che la successione approssimante y è di Cauchy. Dunque (con una scrittura un po' formale)

$$\lim_{k,h\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k(i)\varphi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_h(i)\, \varphi_i \right\| = \lim_{k,h\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_k(i) - \mu_h(i))\varphi_i \right\| = 0 \quad , \quad \text{in } X\,.$$

Grazie alla la relazione (1.7), si ricava che

$$\lim_{k,h\to\infty} \|\mu_k - \mu_h\|_{\ell^2} = 0$$

e dunque (essendo μ_k di Cauchy in ℓ^2), esiste $\mu \in \ell^2$ in modo tale che $\mu_k \to \mu$. Si verifica infine facilmente che

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k(i)\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\varphi_i = y \quad , \quad \text{in } X\,.$$

Abbiamo così provato che V è un sottospazio chiuso di X. ∎

1.12 **Teorema della migliore approssimazione.** Sia X uno spazio di Hilbert e φ_i ($i \in \mathbb{N}$) un sistema ortonormale di X e $f \in X$. Si ha allora che la successione $\widehat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $i \in \mathbb{N} \to \widehat{f}(i)$ appartiene a ℓ^2.
Si ha inoltre (utilizzando anche il Lemma 1.9) che per ogni $\mu \in \ell^2$ si ha:

$$0 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\, \varphi_i \right\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \right\|_X^2 . \tag{1.10}$$

Dimostrazione: Ricordando che il sistema φ_i ($i \in \mathbb{N}$) è ortonormale su X, si ha (per ogni $\mu \in \ell^2$)

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \mu(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 = \left(f - \sum_{i=1}^{m} \mu(i)\,\varphi_i, f - \sum_{j=1}^{m} \mu(j)\,\varphi_j \right) =$$

$$= \|f\|_X^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu(i)\mu(j)(\varphi_i,\varphi_j) - 2\sum_{i=1}^{m} \mu(i)(f,\varphi_i) = \|f\|_X^2 + \sum_{i=1}^{m} |\mu(i)|^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \mu(i)\widehat{f}(i)$$

e dunque (sempre per ogni $\mu \in \ell^2$)

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \mu(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{m} |\widehat{f}(i)|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left[|\widehat{f}(i)|^2 + |\mu(i)|^2 - 2\mu(i)\widehat{f}(i) \right]$$

da cui

$$0 \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{m} \mu(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{m} |\widehat{f}(i)|^2 + \sum_{i=1}^{m} |\mu(i) - \widehat{f}(i)|^2\,. \tag{1.11}$$

Scegliendo $\mu(i) = \widehat{f}(i)$ si ricava che

$$\sum_{i=1}^{m} |\widehat{f}(i)|^2 \leq \|f\|_X^2$$

e dunque la successione $i \in \mathbb{N} \to \widehat{f}(i)$ appartiene a ℓ^2. Se nella relazione (1.11) si pone ancora $\mu(i) = \widehat{f}(i)$ $(i \in \mathbb{N})$ e si passa al limite per $m \to \infty$, si ha che

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2\,.$$

Se nella relazione (1.11) si lascia invece indeterminata $\mu \in \ell^2$ e si passa al limite per $m \to \infty$, si ha che

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(i) - \widehat{f}(i)|^2$$

e dunque (trascurando l'ultimo termine)

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\,\varphi_i \right\|_X^2 \geq \|f\|_X^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2 = \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\,\varphi_i \right\|_X^2\,.$$

Si ottiene così il risultato richiesto. ∎

1.13 **Osservazione.** Il precedente risultato è chiamato Teorema della migliore approssimazione in quanto fra le serie del tipo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\varphi_i$, quella che approssima meglio $f \in X$ si ottiene ponendo $a_i = \widehat{f}(i)$. Se interpretiamo tale risultato in termini di proiezioni ortogonali si ricava che $\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\,\varphi_i$ è la proiezione ortogonale di f sul sottospazio chiuso V (definito nella Osservazione 1.11) di X. ∎

Un'altra importante conseguenza del Teorema della migliore approssimazione è:

1.14 **Disuguaglianza di Bessel.** Sia X uno spazio di Hilbert e φ_i $(i \in \mathbb{N})$ un sistema ortonormale di X. Per ogni $f \in X$ si ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2 \le \|f\|_X^2 \,. \blacksquare$$

1.15 **Teorema.** Sia X uno spazio di Hilbert e φ_i $(i \in \mathbb{N})$ un sistema ortonormale di X. Le seguenti condizioni sono allora equivalenti:

i) φ_i $(i \in \mathbb{N})$ è un sistema ortonormale completo di X.

ii) Per ogni $f \in X$ si ha che

$$\|f\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}(i)|^2 = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 \quad , \quad \text{(Uguaglianza di Bessel)}\,. \tag{1.12}$$

iii) Per ogni $f \in X$ si ha che

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\, \varphi_i \,. \tag{1.13}$$

iv) Per ogni $f, g \in X$ si ha che

$$(f,g)_X = \sum_{i=1}^{\infty} (f,\varphi_i)_X\, (g,\varphi_i)_X = (\widehat{f},\widehat{g})_{\ell^2} \quad , \quad \text{(Relazione di Parseval)}\,. \tag{1.14}$$

Dimostrazione: Grazie al Teorema della migliore approssimazione si ha che ii) $\Leftrightarrow$ iii).

Proviamo che iii) $\Rightarrow$ i). Se $(f,\varphi_i) = \widehat{f}(i) = 0$ $(i \in \mathbb{N})$, grazie alla (1.12) si ricava che $f = 0$. Dunque φ_i $(i \in \mathbb{N})$ è un sistema ortonormale completo di X.

Proviamo che i) $\Rightarrow$ iii). Dato $f \in X$, poniamo (ciò ha senso grazie alla disuguaglianza di Bessel e al Lemma 1.9)

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\, \varphi_k \,. \tag{1.15}$$

Utilizzando ancora il Lemma 1.9, si ha che $\widehat{f}(i) = \widehat{g}(i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Utilizzando l'Osservazione 1.5, segue che $g = f$. Grazie alla (1.15), la iii) è dimostrata.

A tale punto abbiamo provato che le condizioni i), ii), iii) sono equivalenti fra loro.

Proviamo che iii) $\Rightarrow$ iv). Dati $f, g \in X$, si ha (grazie alla continuità del prodotto scalare):

$$(f,g)_X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\, \varphi_i, \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(k)\, \varphi_k \right)_X = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\, \widehat{g}(k)\ (\varphi_i, \varphi_k)_X = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i)\, \widehat{g}(i)\,.$$

La relazione iv) è provata.

Se poniamo $f = g \in X$ nella (1.14), si ottiene subito che iv) $\Rightarrow$ ii).

L'asserto è provato. $\blacksquare$

Dimostrazione del Teorema di Fischer e Riesz: La applicazione $f \to \Lambda_f$ è ovviamente lineare. Grazie alla uguaglianza di Bessel si ha che $\Lambda_f \in \ell^2$ per ogni $f \in I$. Dimostriamo ora la suriettività di Λ. Data $\mu \in \ell^2$, utilizzando il Lemma 1.9, si può porre:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, \varphi_i \in X\,.$$

Grazie alla relazione (1.6), si ha che $\widehat{f}(i) = \mu(i)$ $(i \in I)$. La suriettività è dunque provata.

Proviamo la iniettività. Dati $f, g \in X$, se $\Lambda_f = \Lambda_g$, si ottiene che $\widehat{f}(i) = \widehat{g}(i)$. Utilizzando l'Osservazione 1.5, segue che $g = f$. La iniettività è dunque provata.

Infine, utilizzando ad esempio l'Uguaglianza di Bessel, si ha che Λ è un'isometria e dunque conserva norma e prodotto scalare. ∎

2 - Ortonormalizzazione

2.1 **Definizione.** Sia X uno spazio di Hilbert e S un sottoinsieme di X. La famiglia delle combinazioni lineari (finite) degli elementi di S, cioè degli elementi aventi rappresentazione (dove K è il corpo degli scalari di X)

$$\sum_{k=1}^{m} a_k\, x_k \quad , \quad a_k \in K\ ,\ x_k \in S\,,$$

definisce il sottospazio di X *generato* da S, che verrà indicato con il simbolo $\mathrm{span}(S)$. ∎

Estendiamo alle famiglie numerabili la nozione di lineare indipendenza:

2.2 **Definizione.** Dato X spazio di Hilbert, un sotto-insieme numerabile S di X, si dice *linearmente indipendendente*, se ogni sotto-insieme finito di S costituisce una famiglia di elementi linearmente indipendenti di X. ∎

2.3 **Teorema della ortonormalizzazione di Schmidt.** Sia X uno spazio di Hilbert e $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ una famiglia numerabile di elementi di X linearmente indipendenti. Si ha allora che esiste un sistema ortonormale $w_1, \ldots, w_k, \ldots$ di X in modo tale che, posto

$$X_n = \{x_k\,,\ k = 1, \ldots, n\} \quad , \quad W_n = \{w_k\,,\ k = 1, \ldots, n\}\,,$$

si abbia che

$$\mathrm{span}(X_n) = \mathrm{span}(W_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\mathrm{span}(\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}) = \mathrm{span}(\{w_1, \ldots, w_k, \ldots\})\,.$$

Dimostrazione: Definiamo per induzione su n la seguente successione

$$y_1 = x_1\,, \tag{2.1}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} y_j\,. \tag{2.2}$$

Osserviamo che la famiglia $y_1, \ldots, y_k, \ldots$ è ortogonale (cioè elementi diversi sono ortogonali). Si ha infatti intanto che

$$(y_2, y_1) = (x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{\|y_1\|^2} y_1, y_1) = (x_2, y_1) - \frac{(x_2, y_1)}{\|y_1\|^2}(y_1, y_1) = 0\,.$$

Ragionando per induzione su n, si ha (se $k \leq n$)

$$(y_{n+1}, y_k) = (x_{n+1}, y_k) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2}(y_j, y_k) = (x_{n+1}, y_k) - \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|y_k\|^2}(y_k, y_k) = 0\,.$$

Poniamo

$$Y_n = \{y_k\,,\ k = 1, \ldots, n\}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Grazie alle relazioni (2.1) e (2.2), si ha che ogni x_n è combinazione lineare di $y_1, \ldots, y_n$ e dunque

$$\operatorname{span}(X_n) \subset \operatorname{span}(Y_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.3}$$

Ragionando per induzione su n si ricava anche che ogni y_n è combinazione lineare di $x_1, \ldots, x_n$ e dunque (grazie alla (2.3))

$$\operatorname{span}(Y_n) = \operatorname{span}(X_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Con un facile ragionamento segue immediatamente anche che

$$\operatorname{span}(\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}) = \operatorname{span}(\{y_1, \ldots, y_k, \ldots\})\,.$$

Sempre ragionando per induzione su n, si verifica infine che $y_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha infatti che $y_1 = x_1 \neq 0$ grazie alla lineare indipendenza della famiglia $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Se poi, per assurdo, $y_{n+1} = 0$, grazie alla (2.2), si otterrebbe che

$$0 = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} y_j\,.$$

Siccome abbiamo già provato che y_j può essere rappresentato come combinazione lineare di $x_1, \ldots, x_j$, si ottiene un assurdo dovuto alla lineare indipendenza della famiglia $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Il sistema ortonormale richiesto si può allora costruire ponendo $w_k = y_k/\|y_k\|$. ∎

A tale punto possiamo introdurre un'altra condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema ortonormale sia completo.

2.4 **Proposizione.** Sia X uno spazio di Hilbert e φ_i ($i \in \mathbb{N}$) un sistema ortonormale di X. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) φ_i ($i \in \mathbb{N}$) è un sistema ortonormale completo di X.

ii) $\overline{\operatorname{span}\{\varphi_i\,,\ i \in \mathbb{N}\}} = X$.

Dimostrazione: Verifichiamo che i) ⇒ ii). Se vale la i), grazie al Teorema 1.15, segue che ogni $f \in X$ è così rappresentabile:

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i)\varphi_i$$

e dunque segue la ii) in quanto ogni elemento di X è approssimabile mediante una combinazione lineare finita delle φ_i.

Verifichiamo che ii) $\Rightarrow$ i). Dato $f \in X$, tale che $(f, \varphi_i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, dobbiamo dimostrare che $f = 0$. Si ha intanto che

$$\left(f\,, \sum_{i=1}^{n} a_i\,\varphi_i \right) = 0$$

comunque si siano scelti gli scalari a_i. Siccome, per ipotesi, le combinazioni lineari degli elementi φ_i sono dense in X, segue che $(f, x) = 0$ per ogni $x \in X$ (utilizzando la continuità del prodotto scalare). Segue allora che $(f, f) = \|f\|^2 = 0$, cioè $f = 0$. ∎

Introduciamo una nozione che ha una certa rilevanza:

2.5 **Definizione.** Uno spazio normato X si dice *separabile* se esiste $U \subset X$ numerabile e denso in X. ∎

Si verifica facilmente che tutti gli spazi normati di *dimensione finita* sono separabili. Vale la

2.6 **Proposizione.** Se X è uno spazio normato di dimensione infinita, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) X è separabile;

ii) esiste $V \subset X$ numerabile in modo tale che $\overline{\mathrm{span}(V)} = X$;

iii) esiste $W \subset X$ numerabile e costituito di elementi linearmente indipendenti in modo tale che $\overline{\mathrm{span}(W)} = X$.

Dimostrazione: *i) $\Rightarrow$ ii).*

Si ha infatti che, se esiste $U \subset X$ numerabile e denso in X, allora $U \subset \mathrm{span}(U) \subset X$ e dunque

$$X = \overline{U} \subset \overline{\mathrm{span}(U)} \subset X$$

da cui $\overline{\mathrm{span}(U)} = X$. cioè l'asserto.

ii) $\Rightarrow$ i).

Per dimostrare tale asserzione introduciamo il seguente sottoinsieme di $\mathrm{span}(V)$:

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=i}^{m} q_i\, v_i\,, \text{dove } m \in \mathbb{N}\,, q_i \in \mathbb{Q}\,, v_i \in V \right\}.$$

$\mathcal{H}$ è ovviamente la famiglia delle combinazioni lineari a coefficienti razionali degli elementi di V. Non è inoltre limitativo supporre che $v \neq 0$ per ogni $v \in V$. È facile verificare che $\mathcal{H}$ è numerabile. Verifichiamo inoltre che

$$\mathrm{span}(V) \subset \overline{\mathcal{H}}\,. \tag{2.4}$$

Infatti, se $w \in \mathrm{span}(V)$ allora ammette la rappresentazione

$$w = \sum_{i=i}^{m} a_i \, v_i \quad , \quad \text{dove } a_i \in \mathbb{R} \, , \, v_i \in V \, .$$

Si ponga

$$z_n = \sum_{i=i}^{m} q_i \, v_i \quad , \quad \text{con } q_i \in \mathbb{Q} \; , \; |q_i - a_i| < \frac{1}{nm\|v_i\|} \, .$$

Si ha che

$$\|w - z_n\| = \left\| \sum_{i=i}^{m} (a_i - q_i) \, v_i \right\| \leq \sum_{i=i}^{m} |a_1 - q_i| \|v_i\| \leq 1/n \, ,$$

e dunque $z_n \in \mathcal{H} \to w$ in X. La relazione (2.4) è dimostrata. Se utilizziamo la (2.4), si ottiene anche che

$$X = \overline{\text{span}(V)} \subset \overline{\mathcal{H}} \subset X \, ,$$

da cui $\overline{\mathcal{H}} = X$, cioè l'asserto.

iii) ⇒ ii). Tale parte della dimostrazione è banale.

ii) ⇒ iii).

Supponiamo che

$$\overline{\text{span}(\{x_1, \ldots, x_n \ldots\})} = X \, .$$

Non è ovviamente limitativo supporre che $x_i \neq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Poniamo ora $n_1 = 1$. Ragionando per induzione, sia n_{k+1} il più piccolo numero naturale tale che

$$x_{n_{k+1}} \notin \text{span}(\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}) \, .$$

La successione x_{n_k}, per costruzione, è costituita da elementi linearmente indipendenti e, si ha che $U = \{x_{n_k} \, , \, k \in \mathbb{N}\}$ verifica la condizione richiesta. ∎

Siamo ora in grado di provare il:

2.7 **Teorema.** Se X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita allora esiste un sistema ortonormale completo $\{\varphi_k \, , \, k \in \mathbb{N}\}$ se e solo se X è separabile.

Dimostrazione: Dimostriamo che la condizione è necessaria. Se $\{\varphi_k \, , \, k \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo, grazie alla Proposizione 2.4, si ha che

$$\overline{\text{span}\{\varphi_k \, , \, k \in \mathbb{N}\}} = X \, .$$

Se ora utilizziamo la Proposizione 2.6, si ottiene che X è separabile.

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Se X è separabile, utilizzando ancora la Proposizione 2.6, si ha che esiste un $U \subset X$ numerabile e di elementi linearmente indipendenti in X in modo tale che

$$\overline{\text{span}(U)} = X \, .$$

Grazie al Teorema di ortonormalizzazione si può supporre che U sia un sistema ortonormale. Ricordando la Proposizione 2.4, si dimostra che U è un sistema ortonormale completo. ∎

2.8 **Esempi di Spazi Separabili.** Ovviamente lo spazio ℓ^2 è separabile.

Se E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}$ tale che $1 \le p < +\infty$, si dimostra che gli spazi $L^p(E)$ sono tutti separabili eccetto che per $p = 1$. Si dimostra inoltre che se E è limitato, allora anche $L^1(E)$ è uno spazio separabile.

Sia ora K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Si ponga

$$C^0(K) = \{f : K \to \mathbb{R}\,,\ f \text{ continua}\} \quad , \quad \text{con la norma } \ \|f\| = \max\{|f(t)|\,,\, t \in K\}\,.$$

Si ha allora che lo spazio $C^0(K)$ è uno spazio di Banach separabile. ∎

2.9 **Osservazione.** Grazie alle considerazioni appena svolte e al Teorema 2.7, si ricava che se E è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, allora $L^2(E)$ ammette un sistema ortonormale completo. ∎

3 - Serie Trigonometriche

a) Gli spazi $L^p(\mathbb{T})$

Nel seguito indicheremo con $L^p(\mathbb{T})$ ($p \in [1, +\infty[$) lo spazio delle (classi di) funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, periodiche di periodo 2π tali che la funzione $t \to |f(t)|^p$ sia integrabile su $[-\pi, \pi[$ rispetto alla ordinaria misura di Lebesgue. Se poniamo

$$\|f\|_p = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} \quad ,$$

si ottiene uno spazio di Banach complesso. Nel caso particolare in cui $p = 2$, si ha che lo spazio $L^2(\mathbb{T})$ è uno spazio di Hilbert complesso con il prodotto scalare

$$(f, g)_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Grazie alla invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, $L^p(\mathbb{T})$ può essere equivalentemente definito come la famiglia delle (classi di) funzioni definite su un assegnato intervallo di lunghezza 2π a valori in $\mathbb{C}$ (prolungate per periodicità di periodo 2π su tutto $\mathbb{R}$) e che ancora siano di p-esima potenza integrabile su tale intervallo rispetto alla ordinaria misura di Lebesgue. Ciò corrisponde al fatto che, per tali funzioni, ogni intervallo di lunghezza 2π può essere considerato una copia (equivalente) dell'intervallo $[-\pi, \pi[$.

In modo analogo indicheremo con $C^0(\mathbb{T})$ lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue e periodiche di periodo 2π. Se poniamo

$$\|f\|_0 = \max\{|f(t)|\,,\, t \in [-\pi, \pi[\}\,,$$

si ottiene uno spazio di Banach complesso.

Grazie ancora alla invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, se $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p \in \mathbb{R}$) e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha che $f_\vartheta \in L^p(\mathbb{T})$, avendo posto $f_\vartheta(t) = f(t-\vartheta)$.

Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ si ha inoltre che:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t-\vartheta)\,dt = \int_0^{2\pi} f_\vartheta(t)dt \ , \ \forall f \in L^p(\mathbb{T})\,, \forall \vartheta \in \mathbb{R}\,.$$

Non essendoci pericolo di ambiguità, nel seguito la notazione $\int f(t)\,dt$ indicherà l'integrale di una assegnata $f \in L^1(\mathbb{T})$ esteso a un arbitrario intervallo di lunghezza 2π.

Le idee sopra esposte ci permettono di rappresentare $\mathbb{T}$ come un insieme su cui la famiglia delle funzioni qui introdotte sono definite. Si può, ad esempio, scegliere come *modello* di $\mathbb{T}$ l'intervallo $[-\pi, \pi[$ (o un qualunque intervallo di $\mathbb{R}$ di lunghezza 2π) oppure la circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$. Ancora $\mathbb{T}$ può essere pensato come la retta reale in cui abbiamo identificato punti che differiscono per multipli di 2π. Si sceglierà concretamente il modello da usare nei singoli casi, in base alla migliore comprensibiltà dell'argomento da trattare.

Vale il seguente risultato:

3.1 **Proposizione.** Si ha che $C^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, tutte le immersioni essendo lineari e continue. Si ha inoltre che

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_0 \quad , \quad \forall f \in C^0(\mathbb{T})\,. \tag{3.1}$$

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \quad , \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T})\,. \tag{3.2}$$

Dimostrazione: Se $f \in C^0(\mathbb{T})$ si ha che

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_0^2\,dt \leq \|f\|_0^2 < +\infty$$

e dunque l'immersione $C^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ e la relazione (3.1) sono dimostrate.

Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ si ha che (dato che la funzione identicamente uguale a 1 appartiene a $L^2(\mathbb{T})$)

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt = 2\pi(|f|, 1)_2\,.$$

Siccome $L^2(\mathbb{T})$ è uno spazio di Hilbert, utilizzando ora la disuguaglianza di Schwartz si ricava che

$$2\pi(|f|, 1)_2 \leq 2\pi\|f\|_2\,\|1\|_2 = 2\pi\|f\|_2 < +\infty$$

e dunque si ha che $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ e che vale la relazione (3.2).

È facile verificare che tutte le immersioni sono lineari. Le relazioni (3.1) e (3.2) ci dicono inoltre che tali immersioni sono continue (basta utilizzare la Proposizione 4.1 del cap. III) ∎

Nel seguito utilizzeremo anche il seguente risultato (di cui saltiamo la dimostrazione)

3.2 **Teorema.** Lo spazio $C^0(\mathbb{T})$ è denso in $L^2(\mathbb{T})$. ∎

b) Polinomi e Serie Trigomometriche

La dimostrazione del seguente risultato è facile:

3.3 **Proposizione.** La famiglia di funzioni e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$ è un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. ∎

Più avanti dimostreremo che la famiglia delle e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$ è un sistema ortonormale *completo* nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. Per semplicità nel seguito si porrà $e^{ikt} = \mathbf{e}_k(t)$.

3.4 **Definizione.** Viene chiamato *polinomio trigonometrico* una espressione della forma:

$$p = \sum_{j=-n}^{n} a_j \mathbf{e}_j \quad , \quad a_j \in \mathbb{C} . \blacksquare$$

3.5 **Definizione.** Viene chiamata *serie trigonometrica* una espressione della forma:

$$S \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathbf{e}_j \quad , \quad a_j \in \mathbb{C} . \blacksquare \tag{3.3}$$

3.6 **Definizione.** Data $f \in L^2(\mathbb{T})$ i seguenti numeri:

$$\widehat{f}(j) = (f, \mathbf{e}_j)_2 = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \mathbf{e}_{-j}(t) dt \quad , \; j \in \mathbb{Z} , \tag{3.4}$$

vengono chiamati *coefficienti di Fourier* di f. Inoltre la serie trigonometrica:

$$S[f] \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) \mathbf{e}_j , \tag{3.5}$$

viene chiamata *serie di Fourier* di f. Una serie trigonometrica viene chiamata *serie di Fourier* se è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$. ∎

3.7 **Osservazione.** Osserviamo che se $f \in L^2(\mathbb{T})$, gli integrali in (3.4) hanno senso in quanto $|f(t)\mathbf{e}_{-j}(t)| = |f(t)|$ è una funzione integrabile su $\mathbb{T}$ (grazie alla Proposizione 3.1). ∎

Il simbolo $\sim$ utilizzato nelle relazioni (3.3) e (3.5) non significa in alcun modo che la serie di funzioni converga (in qualche senso) e tanto meno che converga alla funzione f nel caso della relazione (3.5). Dunque non è opportuno (in generale) sostituire il simbolo $\sim$ con $=$.

Per studiare meglio il problema della convergenza, introduciamo ora una precisa terminologia:

3.8 **Definizione.** Data la successione $a_j \in \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{Z}$), si dice che la serie trigonometrica:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathbf{e}_j$$

converge (puntualmente, uniformente, quasi dappertutto,...) per $n \to \infty$ alla funzione $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ se le sue somme parziali:

$$S_n = \sum_{j=-n}^{n} a_j \mathbf{e}_j$$

convergono (puntualmente, uniformente, quasi dappertutto,...) alla funzione f. ∎

3.9 **Definizione.** Data $f \in L^2(\mathbb{T})$ e un polinomio trigonometrico

$$p = \sum_{j=-n}^{n} a_j \mathbf{e}_j \quad , \quad a_j \in \mathbb{C}\,, \tag{3.6}$$

si consideri il nuovo polinomio trigonometrico

$$p \star f = \sum_{j=-n}^{n} a_j\, \widehat{f}(j)\, \mathbf{e}_j\,.$$

Il polinomio trigonometrico $p \star f$ viene chiamato *prodotto di convoluzione* di p e f. ∎

3.10 **Teorema.** Data $f \in L^2(\mathbb{T})$ e un polinomio trigometrico p si ha che

$$(p \star f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(s)\, p(t-s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int f(t-s)\, p(s)\, ds\,.$$

Dimostrazione: Supponiamo che p abbia la rappresentazione (3.6). Si ha che

$$(p \star f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt} \frac{1}{2\pi} \int f(s)\, e^{-ijs}\, ds = \sum_{j=-n}^{n} a_j\, \frac{1}{2\pi} \int f(s)\, e^{ij(t-s)}\, ds\,,$$

e dunque

$$(p \star f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(s)\, p(t-s)\, ds\,.$$

Mediante la sostituzione $\tau = t - s$ si completa facilmente la dimostrazione dell'asserto. ∎

c) Serie di coseni e seni

Utilizzeremo ora le note formule di Eulero:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad , \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,. \tag{3.7}$$

Una serie trigonomertrica (in *forma esponenziale*) $S \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijt}$ può essere (almeno formalmente) riscritta nel seguente modo (come serie di coseni e seni):

$$S \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijt} \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, (\cos jt + i \operatorname{sen} jt) \sim$$

$$\sim a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [(a_j + a_{-j})\, \cos jt + i(a_j - a_{-j}) \operatorname{sen} jt]$$

e dunque si ha (tale rappresentazione giustifica meglio la terminologia delle serie trigonometriche):

$$S \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos jt + B_j \operatorname{sen} jt)\,, \tag{3.8}$$

dove:

$$A_j = a_j + a_{-j} \quad , \ B_j = i(a_j - a_{-j})\,. \tag{3.9}$$

Viceversa, se abbiamo una serie trigonometrica (come serie di coseni e seni) avente la rappresentazione (3.8), si può recuperare la sua forma esponenziale ponendo:

$$a_j = \frac{A_j - iB_j}{2}\ ,\ a_{-j} = \frac{A_j + iB_j}{2} \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,.$$

In particolare, se $f \in L^2(\mathbb{T})$, la sua serie di Fourier può essere (almeno formalmente) riscritta nel seguente modo:

$$S[f] \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cos jt + B_j \operatorname{sen} jt)\,,$$

dove:

$$A_j = \widehat{f}(j) + \widehat{f}(-j) \quad , \ B_j = i(\widehat{f}(j) - \widehat{f}(-j))\,.$$

Si può anche facilmente dimostrare che:

$$A_j = \frac{1}{\pi}\int f(t)\cos jt\,dt \quad , \quad B_j = \frac{1}{\pi}\int f(t)\operatorname{sen} jt\,dt\,;$$

se f è a valori reali, si ricava dunque che i coefficienti A_j e B_j sono reali. Se f è pari (cioè se $f(t) = f(-t)$, $t \in [0,\pi]$), allora si ha che $B_j = 0$ ($\forall j \in \mathbb{N}_0$): tali serie sono ovviamente chiamate serie di coseni. Se invece f è dispari (cioè se $f(t) = -f(-t)$, $t \in [0,\pi]$), allora si ha che $A_j = 0$ ($\forall j \in \mathbb{N}_0$): tali serie sono ovviamente chiamate serie di seni.

Si dimostra facilmente che la famiglia delle funzioni

$$1 \quad , \quad \cos kt \quad , \quad \operatorname{sen} kt \quad (k \in \mathbb{N})$$

costituisce un sistema ortonormale di $L^2(\mathbb{T})$.

d) Il nucleo di Dirichlet

Prenderemo ora in considerazione alcune successioni di polinomi trigonometrici che si presentano naturalmente nello studio delle serie di Fourier.

Viene chiamato nucleo di Dirichlet la seguente successione di polinomi trigonometrici:

$$D_n = \sum_{j=-n}^{n} \mathbf{e}_j\,.$$

Ricordando la Definizione 3.9, si ha che dato $f \in L^2(\mathbb{T})$

$$D_n * f = \left(\sum_{j=-n}^{n} \mathbf{e}_j\right) * f = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)\mathbf{e}_j\,; \tag{3.10}$$

cioè $D_n * f$ coincide con la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f nel senso della Definizione 3.8.

e) Il nucleo di Fejér

Il nucleo di Dirichlet purtroppo non ha buone proprietà formali. Più facile da trattare è il cosiddetto *nucleo di Fejér* dato dalla seguente successione di funzioni:

$$K_n = \frac{D_0 + \cdots + D_n}{n+1}\,.$$

Si ha allora che K_n è la media aritmetica di $D_0, \ldots, D_n$. Data $f \in L^2(\mathbb{T})$, si ha che $\sigma_n(f) = K_n * f$ è la media aritmetica delle corrispondenti somme parziali della serie di Fourier definite in (3.10), cioè si ha che

$$\sigma_n(f) = \frac{D_0 * f + \ldots + D_n * f}{n+1}\,.$$

Si dimostrano le seguenti ulteriori rappresentazioni di $K_n(t)$:

3.11 **Proposizione.** Si ha che:

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}\ ,\ t \in \mathbb{T}\,, \tag{3.11}$$

$$K_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\frac{\operatorname{sen}^2\big((n+1)t/2\big)}{\operatorname{sen}^2(t/2)}\,, & \text{se } t \in [-\pi,\pi] - \{0\}, \\ n+1\,, & \text{se } t = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Dimostrazione: Si ha infatti che:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{0} e^{ikt} + \ldots + \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\right] \tag{3.13}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} K_n(t) =& \frac{(n+1)e^{i0t} + ((n+1)-1)(e^{it}+e^{-it}) + \ldots + ((n+1)-n)(e^{int}+e^{-int})}{n+1} = \\ =& e^{i0t} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(e^{ikt}+e^{-ikt})\,, \end{aligned} \tag{3.14}$$

da cui segue la rappresentazione (3.11) di $K_n(t)$.

Osserviamo che:

$$\operatorname{sen}^2(t/2) = \frac{1}{2}(1-\cos t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{2 - e^{it} - e^{-it}}{4}\,. \tag{3.15}$$

Analogamente si ha che:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}t\right) = \frac{2 - e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}}{4}\,. \tag{3.16}$$

Calcoliamo i coefficienti a_j del seguente polinomio trigonometrico:

$$P_n(t) = \sum_{j=-n-1}^{n+1} a_j e^{ijt} = 4(n+1)K_n(t)\operatorname{sen}^2(t/2)\,. \tag{3.17}$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= (n+1)(2-e^{it}-e^{-it})\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = \\ &= 2\sum_{j=-n}^{n}(n+1-|j|)e^{ijt} - \sum_{j=-n}^{n}(n+1-|j|)e^{i(j+1)t} - \sum_{j=-n}^{n}(n+1-|j|)e^{i(j-1)t} = \\ &= 2\sum_{j=-n}^{n}(n+1-|j|)e^{ijt} - \sum_{j=-n+1}^{n+1}(n+1-|j-1|)e^{ijt} - \sum_{j=-n-1}^{n-1}(n+1-|j+1|)e^{ijt} = \\ &= A_n(t) + B_n(t)\,, \end{aligned}$$

dove:

$$A_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left[2(n+1-|j|) - (n+1-|j-1|) - (n+1-|j+1|)\right]e^{ijt}\,,$$

$$\begin{aligned} B_n(t) = &\left[(n+1-|-n-1|)e^{-int} - (n+1-|n+1-1|)e^{i(n+1)t}\right] + \\ &+\left[-(n+1-|-n-1+1|)e^{-i(n+1)t} + (n+1-|n+1|)e^{int}\right]. \end{aligned}$$

Osserviamo intanto che:

$$A_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left[-2|j| + |j-1| + |j+1|\right]e^{ijt}$$

e dunque:

$$A_n(t) = 2\,.$$

Eseguendo le opportune semplificazioni si ha inoltre:

$$B_n(t) = -e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}\,.$$

Abbiamo così dimostrato la relazione:

$$4(n+1)K_n(t)\operatorname{sen}^2(t/2) = 2 - e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}\,.$$

Ricordando la relazione (3.16), si ottiene subito la rappresentazione di K_n data dalla (3.12). ∎

Utilizzando il precedente risultato si ottiene il:

3.12 **Teorema.** Il nucleo di Fejér K_n verifica le proprietà seguenti:

$$K_n \in C^\infty(\mathbb{T}) \quad , \quad K_n(t) \geq 0 \ , \ t \in \mathbb{T} \, , \tag{3.18}$$

$$K_n(t) = K_n(-t) \ , \ t \in [-\pi, \pi] \, , \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \, dt = 1 \, , \tag{3.20}$$

$$\forall \vartheta \in]0, \pi[\ \text{ si ha che:} \quad \lim_{n \to \infty} \sup\{K_n(t) \, , \, t \in]-\pi, -\vartheta[\cup]\vartheta, \pi[\} = 0 \, , \tag{3.21}$$

Dimostrazione: Le relazioni (3.18)-(3.20) sono ovvia conseguenza delle (3.11) e (3.12).

Fissiamo un numero $\vartheta \in]0, \pi[$: si ha allora che $\operatorname{sen} \vartheta/2 \leq \operatorname{sen} t/2$ ($t \in [\vartheta, \pi[$). D'altra parte si ha (ancora utilizzando la (3.12)):

$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\vartheta/2)} = c_\vartheta \frac{1}{n+1} \quad , \quad |t| \in [\vartheta, \pi[\, , \tag{3.22}$$

dove $c_\vartheta = \operatorname{sen}^{-2}(\vartheta/2)$. Anche la (3.21) è provata. ∎

3.13 **Osservazione.** La relazione (3.21) significa che la successione K_n converge uniformemente a 0 su $]-\pi, -\vartheta[\cup]\vartheta, \pi[$, comunque si sia scelto a priori il valore $\vartheta \in]0, \pi[$. ∎

3.14 **Teorema.** Se $f \in C^0(\mathbb{T})$ allora $K_n \star f \to f$ in $C^0(\mathbb{T})$ (cioè uniformemente).

Dimostrazione: Ricordando le proprietà di K_n si ha:

$$(K_n * f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int K_n(\tau) f(t-\tau) d\tau - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int K_n(\tau) \big(f(t-\tau) - f(t) \big) d\tau \, .$$

Dato che $K(t) = K(-t)$ e mediante la sostituzione $\tau = -s$, si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} K_n(\tau) f(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(s) f(t+s) ds$$

e dunque:

$$(K_n * f)(t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(\tau) \left[\frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} - f(t) \right] d\tau$$

da cui (per ogni $\vartheta \in]0, \pi[$):

$$|(K_n * f)(t) - f(t)| \leq I_n(\vartheta) + J_n(\vartheta) \, , \tag{3.23}$$

dove:

$$I_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\vartheta} K_n(\tau) \left| \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} - f(t) \right| d\tau \, ,$$

$$J_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} K_n(\tau) \left| \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} - f(t) \right| d\tau \, .$$

Grazie alla uniforme continuità di f, dato $\varepsilon > 0$, si può determinare $\vartheta \in]0, \pi[$ (indipendente da t) tale che:

$$|\tau| \leq \vartheta \Longrightarrow \left| \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} - f(t) \right| < \varepsilon \tag{3.24}$$

e corrispondentemente (grazie alla (3.21)) si può determinare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ (dipendente solo da ϑ) tale che, per ogni $n \geq \overline{n}$, si abbia:

$$|K_n(\tau)| < \varepsilon \quad , \quad \tau \in [\vartheta, \pi] \, . \tag{3.25}$$

Si ha allora che (grazie alle (3.20) e (3.24)), per ogni $n \geq \overline{n}$:

$$0 \leq I_n(\vartheta) \leq \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_0^{\vartheta} K_n(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(\tau) \, d\tau = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int K_n(\tau) \, d\tau = \varepsilon$$

e (grazie alla (3.25)):

$$\begin{aligned} 0 \leq J_n(\vartheta) &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} |f(t+\tau) - f(t)| \, d\tau + \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} |f(t-\tau) - f(t)| \, d\tau \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(t+\tau) - f(t)| \, d\tau + \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(t-\tau) - f(t)| \, d\tau \, ; \end{aligned}$$

mediante la sostituzione $s = t + \tau$ e $s = t - \tau$ (rispettivamente), si ha:

$$0 \leq J_n(\vartheta) \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t} |f(s) - f(t)| \, ds + \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{t}^{t+\pi} |f(s) - f(t)| \, ds = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int |f(s) - f(t)| \, ds$$

e dunque (ricordando la Proposizione 3.1)

$$0 \leq J_n(\vartheta) \leq \varepsilon \left[\frac{1}{2\pi} \int |f(s)| d\tau + |f(t)| \right] \leq \varepsilon \left(\|f\|_2 + \|f\|_0 \right) \, .$$

Ricordando la relazione (3.23), si ha che (definitivamente rispetto a $n \in \mathbb{N}$):

$$|(K_n * f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon \left(1 + \|f\|_1 + \|f\|_0\right) \leq \varepsilon \left(1 + \|f\|_2 + \|f\|_0\right) \, ,$$

da cui l'asserto. ∎

Conseguenza immediata del precedente Teorema e del fatto che $K_n * f$ è un polinomio trigonometrico, è il seguente:

3.15 **Corollario.** La famiglia dei polinomi trigonometrici è densa in $C^0(\mathbb{T})$ rispetto alla metrica dello spazio normato $C^0(\mathbb{T})$. ∎

Possiamo ora provare il

3.16 **Teorema.** La famiglia di funzioni e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$ è un sistema ortonormale completo nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$.

Dimostrazione: Utilizzando la Proposizione 2.4, basta dimostrare che

$$L^2(\mathbb{T}) = \overline{\operatorname{span}(\{\mathbf{e}_k\,,\ k \in \mathbb{Z}\})}$$

la chiusura essendo intesa nel senso dello spazio normato $L^2(\mathbb{T})$. Basta dunque dimostrare che data $f \in L^2(\mathbb{T})$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico p in modo tale che $\|f - p\|_2 < \varepsilon$.

Grazie al Teorema di densità 3.2, esiste $g \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$.

Ricordando il Teorema 3.14, esiste un polinomio trigonometrico p in modo tale che $\|g - p\|_0 < \varepsilon/2$. Siccome (grazie alla Proposizione 3.1) si ha che $\|h\|_2 \leq \|h\|_0$ $(\forall h \in C^0(\mathbb{T}))$. otteniamo

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_0 < \varepsilon\,.\blacksquare$$

3.17 **Osservazione.** In modo completamente analogo si dimostra che la famiglia delle funzioni

$$1 \quad , \quad \cos kt \quad , \quad \operatorname{sen} kt \quad (k \in \mathbb{N})$$

costituisce un sistema ortonormale completo di $L^2(\mathbb{T})$. ∎

3.18 **Osservazione.** Grazie al fondamentale Teorema 3.16, si possono applicare tutti i risultati della Teoria di Fischer e Riesz trattati nel primo paragrafo del presente capitolo. In particolare si ha che ogni elemento $f \in L^2(\mathbb{T})$ può essere espresso come la somma della sua serie di Fourier, cioè

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\, \mathbf{e}_k\,,$$

la convergenza essendo intesa nel senso dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. ∎