Le funzioni semplici e nulle fuori da un compatto, ovviamente misurabili, costituiscono un sottoinsieme denso di $L^1(\mathbb{R}^N)$. Il fatto che siano nulle al di fuori di un compatto garantisce la loro integrabilità. Per costruirle nulle al di fuori di un compatto basta adattare il Teor. 9 p. 376 dell'Appendice del Brézis intersecando gli insiemi $E_{n,i}$ ed F_n con $[-n,n]^N$, successione di "ipercubi" che invade $\mathbb{R}^N$.

Quindi, data $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ed $\varepsilon > 0$, esiste una funzione semplice s e nulla fuori da un compatto tale che

$$\|f - s\|_1 \leq \varepsilon.$$

Ora, data una funzione semplice, questa è combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, e limitati se s è nulla fuori da un compatto. Sia ora χ_A una funzione caratteristica con A misurabile e limitato. Allora esistono F compatto e G aperto limitato tali che $F \subseteq A \subseteq G$ con $\mu(G \setminus F) \leq \varepsilon$ e, grazie al lemma di Urysohn, una funzione continua f che vale 1 su F, 0 fuori da G e

$$0 \leq f \leq 1 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Allora si ha:

$$\|f - \chi_A\|_1 \leq \int_{G \setminus F} 1 \, d\mu \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

Dunque, dalle considerazioni precedenti deduciamo che

$$C_c^0(\mathbb{R}^N) \text{ è denso in } L^1(\mathbb{R}^N),$$

cioè le funzioni continue a supporto compatto costituiscono un sottospazio denso di $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Ora vediamo la

<u>Densità di $C_c^0(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \leq p < \infty$.</u>

Questo risultato è mostrato nelle due pagine seguenti che sono state preparate dal Prof. Antonio Segatti.

DENSITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE A SUPPORTO COMPATTO IN $L^p(\mathbb{R})$

Dimostriamo il seguente

Teorema. *Lo spazio $C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dimostrazione. Per prima cosa introduciamo l'operatore di troncatura ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(r) := \begin{cases} r, & \text{se } |r| \leq n, \\ \frac{nr}{|r|}, & \text{se } |r| \geq n. \end{cases} \tag{0.1}$$

Passo (1)

Data f in $L^p(\mathbb{R}^N)$ ed $\varepsilon > 0$ mostriamo che esiste $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ ed un compatto K fuori dal quale $g \equiv 0$ tali che

$$\|f - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.2}$$

Per costruire g osserviamo che la successione di funzioni f_n definita da (χ_n indica la funzione caratteristica della palla $B_n(0)$)

$$f_n(x) := \chi_n(x) T_n f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

verifica $f_n = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus B_n(0)$, $\|f_n\|_\infty = n$ e dunque $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ per ogni n. Inoltre, grazie al Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue si ha $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $\bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $\|f - f_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Poniamo dunque $g = f_{\bar{n}}$.

Passo (2)

Fissiamo $\delta > 0$ in modo tale che

$$\delta^{1/p} (2\bar{n})^{1-1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.3}$$

La densità di $C_c(\mathbb{R}^N)$ garantisce che esiste $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|g - g_1\|_1 \leq \delta. \tag{0.4}$$

Non è limitativo supporre che $\|g_1\|_\infty \leq \|g\|_\infty = \bar{n}$. Infatti, se così non fosse, posto $g_2 := T_{\bar{n}} g_1$ si ha (vedere al termine della dimostrazione)

$$\|g_2 - g\|_1 \leq \|g_1 - g\|_1 \tag{0.5}$$

e dunque, se $\|g_1 - g\|_1 \leq \delta$, a maggior ragione

$$\|g_2 - g\|_1 \leq \delta.$$

Dimostriamo che tale g_1 verifica

$$\|f - g_1\|_p \leq \varepsilon,$$

2-I

cioè la densità voluta.

La disuguaglianza triangolare e (0.2) forniscono

$$\|f - g_1\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g_1\|_p.$$

Inoltre, la disuguaglianza di interpolazione (vedere (0.4)) garantisce

$$\|g - g_1\|_p \leq \|g - g_1\|_1^{1/p} \|g - g_1\|_\infty^{1-1/p} \leq \delta^{1/p}(2\bar{n})^{1-1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

grazie a (0.3). Quindi, combinando le due ultime disuguaglianza abbiamo finalmente che $C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione di (0.5)

Per dimostrare (0.5) scriviamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |g_1 - g| &= \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} |g_1 - g| + \int_{\{-\bar{n} \leq g_1 \leq \bar{n}\}} |g_1 - g| + \int_{\{g_1 \leq -\bar{n}\}} |g_1 - g| \\ &=: I + II + III. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Ricordando la definizione di T_n si ha subito

$$II = \int_{\{-\bar{n} \leq g_1 \leq \bar{n}\}} |g_1 - g| = \int_{\{-\bar{n} \leq g_1 \leq \bar{n}\}} |T_{\bar{n}} g_1 - g| = \int_{\{-\bar{n} \leq g_1 \leq \bar{n}\}} |g_2 - g|.$$

Inoltre, sull'insieme $\{g_1 \geq \bar{n}\}$ abbiamo che $g_1 \geq \bar{n} \geq g$. Dunque

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} |g_1 - g| = \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (g_1 - g) = \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (g_1 - T_{\bar{n}} g_1) + \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (T_{\bar{n}} g_1 - g) \\ &= \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (g_1 - \bar{n}) + \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (T_{\bar{n}} g_1 - g). \end{aligned}$$

In particolare, si ha che il primo integrale è chiaramente positivo. Inoltre, visto che $g \leq \bar{n} = T_{\bar{n}} g_1$ su $\{g_1 \geq \bar{n}\}$, abbiamo anche

$$\int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} (T_{\bar{n}} g_1 - g) = \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} |T_{\bar{n}} g_1 - g|.$$

Pertanto

$$I \geq \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} |T_{\bar{n}} g_1 - g| = \int_{\{g_1 \geq \bar{n}\}} |g_2 - g|.$$

Ragionando in modo analogo si mostra che

$$III \geq \int_{\{g_1 \leq -\bar{n}\}} |T_{\bar{n}} g_1 - g| = \int_{\{g_1 \leq -\bar{n}\}} |g_2 - g|.$$

Pertanto da (0.6) otteniamo facilmente (0.5).

□

2-II

Ci interessa ora provare che se Ω è un aperto qualunque di $\mathbb{R}^N$, il sottospazio delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in Ω è denso in tutti gli spazi $L^p(\Omega)$ con p finito.

Ecco il risultato.

<u>Teorema</u> $C_c^0(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, per $1 \leq p < \infty$.

Sia $f \in L^p(\Omega)$, la prolungo a 0 in $\mathbb{R}^N$ con $\tilde{f}$. Sia $\varepsilon > 0$.

Sia poi $g \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|\tilde{f} - g\|_p \leq \varepsilon$.

Considero una successione di compatti K_n che invadono Ω, per esempio $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n \text{ e } d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$

Sia poi $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni continue con $0 \leq \varphi_n \leq 1$ in $\mathbb{R}^N$, $\varphi_n = 1$ in K_n, $\varphi_n = 0$ fuori da K_{n+1}.

Allora, per n suff. grande, si ha

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n g|_\Omega - f\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\varphi_n g - \tilde{f}\|_p \\
&\leq \|\varphi_n(g - \tilde{f})\|_p + \|\varphi_n \tilde{f} - \tilde{f}\|_p \\
&\leq \|g - \tilde{f}\|_p + \|\tilde{f}(\varphi_n - 1)\|_p \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

con $\|\tilde{f}(\varphi_n - 1)\|_p \leq \varepsilon$ per n sufficientemente grande grazie al teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

Nelle pagine seguenti trovate un approccio analogo, che non utilizza il lemma di Urysohn.

Teorema 1

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $p \in [1, +\infty)$ $C_c^0(\Omega) = \{ f \in C(\Omega) : \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega \}$ è denso in $L^p(\Omega)$.

Cioè ~~$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$~~ $\forall f \in L^p(\Omega)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_\varepsilon \in C_c(\Omega)$ tale che $\| f - f_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.

Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Prop. 1. $S_c(\mathbb{R}^N) = \{ s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabili, semplici con $\operatorname{supp} s$ compatto $\}$

$S_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Dim.

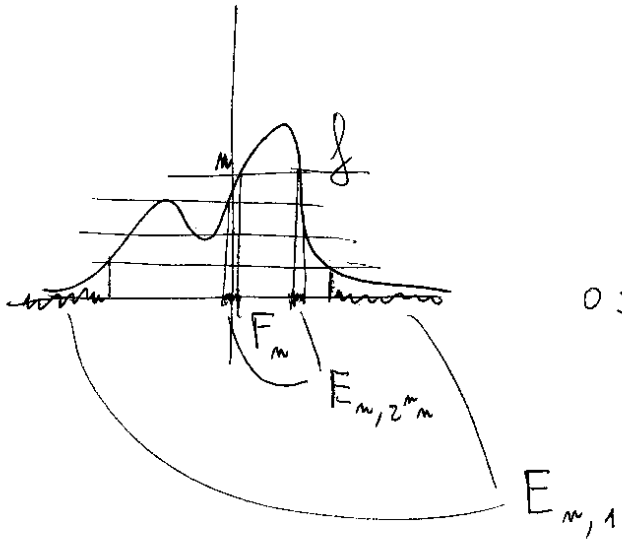
Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$.

Per $n \in \mathbb{N}$

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \right) \qquad k = 1, 2, \dots, 2^n n$$

$$F_n = f^{-1}\left([n, +\infty) \right)$$

$$A_{n,k} = E_{n,k} \cap \overline{B}_n \qquad A_n = F_n \cap \overline{B}_n$$



$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}}(x) + n\chi_{A_n}$$

$$0 \le s_n(x) \le f(x)$$

e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$$

per n grande tale che

$$f(x) < n.$$

Siccome $|f(x) - s_n(x)| \le 2|f(x)|$

e $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - s_n(x)|\, dx = 0.$$

Se f ha segno qualunque

$$f = f_+ - f_- \qquad f_+ \ge 0 \qquad f_- \ge 0$$

s_n^+ la succ. per f_+

s_n^- " " " f_-

$s_n := s_n^+ - s_n^- \in S_c(\mathbb{R}^N)$ e $s_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Prop. 2. ~~$C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso~~

Sia $f \in S_c(\mathbb{R}^N)$. ~~$\forall \varepsilon >$~~

Allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\| f - g \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon .$$

Dim.

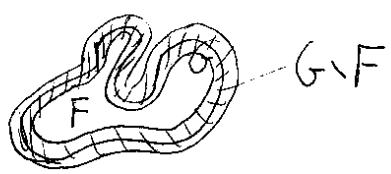
Caso particolare $f = \chi_A$ con

A limitato misurabile. Sia $\varepsilon > 0$.

Allora $\exists\, F, G$ tali che

$F \subset A \subset G$, F compatto, G aperto limitato

con $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.



~~Sia $g(x) =$~~

Sia $g(x) = \dfrac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{se } x \in G^c \end{cases}$$

g è continua

$|g(x)| \leq 1 \qquad g \in C_c(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x) - \chi_A(x)|\,dx = \int_{G\setminus F} |g(x) - \chi_A(x)|\,dx \le$$

$$\le \int_{G\setminus F} 1\,dx = \mu(G\setminus F) < \varepsilon .$$

Se $f(x) = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \chi_{A_j}(x)$

e $g_j \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tali che $\|g_j - \chi_{A_j}\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_j| K}$

$g(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j g_j(x)$ $\quad g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f - g\|_{L^1} \le \sum_{j=1}^{K} |\alpha_j| \, \|\chi_{A_j} - g_j\|_{L^1} < \sum_{j=1}^{K} \frac{\varepsilon}{K}$$

$$= \varepsilon .$$

∎

~~Conclusione~~ Prop. 3. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$

$\exists\, g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon$.

Dim.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$.

Sia $s_\varepsilon \in \mathcal{E}$ data dalla Prop. 1 tale che

$$\|f - s_\varepsilon\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sia ora $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che (Prop. 2)

$$\|g_\varepsilon - s_\varepsilon\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Quindi $\|f - g_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|f - s_\varepsilon\|_{L^1} + \|s_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon.$ ∎

Prop. 4 Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty)$ e $\varepsilon > 0$

$\exists\ g_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon .$$

Dim.

Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$T_n(f)(x) := \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

$$g_n = T_n(f)\,\chi_{B_n}$$

$|g_n(x)| \leq n$ e $\operatorname{supp} g_n \subset \overline{B_n}$

In particolare $g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Siccome $\lim_{n\to\infty} |g_n(x) - f(x)| = 0$ q.o.

e $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ si ha

$$|g_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p$$

Per convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - g_n \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$$

Sia $\varepsilon > 0$.

Quindi $\exists\, n_\varepsilon$ tale che $\| f - g_{n_\varepsilon} \|_{L^p} < \varepsilon/2$.

Siccome $g_{n_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, per la Prop. 3

$\forall \delta > 0 \quad \exists\, h_\delta \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\| g_{n_\varepsilon} - h_\delta \|_{L^1} < \delta$$

Pongo $h = T_{n_\varepsilon}(h_\delta)$

allora $\quad \|g_{n_\varepsilon} - h\|_{L^1} \leq \|g_{n_\varepsilon} - h_\delta\|_{L^1} < \delta$ $\quad$ 7

$$\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

$$\|g_{n_\varepsilon} - h\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g_{n_\varepsilon} - h|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\left(\sup |g_{n_\varepsilon} - h|^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |g_{n_\varepsilon} - h| \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\leq (2n_\varepsilon)^{1-\frac{1}{p}} \|g_{n_\varepsilon} - h\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} < (2n_\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \delta^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

se $\delta^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{(2n_\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}$.

$\blacksquare$

Dim del Teorema 1. per Ω aperto.

Sia $f \in L^p(\Omega)$ e $\tilde{f}$ il suo prolungamento a 0 su $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

$\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$

Sia $\varepsilon > 0$ e $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|\tilde{f} - g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $K_n = \overline{B}_n \cap \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$

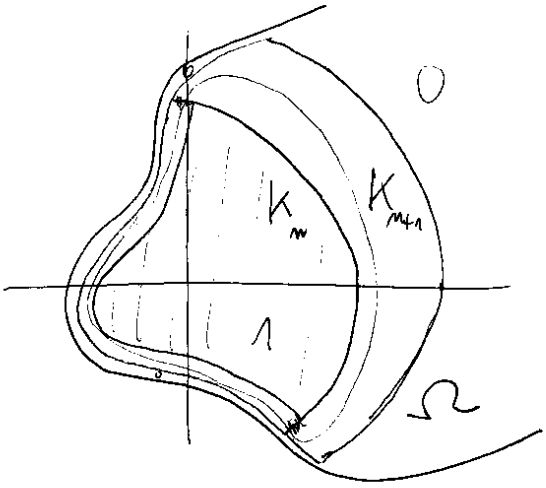
K_n compatto

$$K_n \subset\subset K_{n+1} \subset\subset \Omega$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$

Definiamo $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \varphi_n \leq 1$

$\varphi_n = 1$ in K_n $\qquad$ $\varphi_n = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus K_{n+1}$



$\varphi_n g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con

$\operatorname{supp}(\varphi_n g_\varepsilon) \subset\subset \Omega$

$g_n := \varphi_n g_\varepsilon|_\Omega$

$$\|g_n - f\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi_n g_\varepsilon - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq \|\varphi_n(g_\varepsilon - \tilde{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi_n \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq \|g_\varepsilon - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\varphi_n - 1)\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$$

se n è grande in modo che

$$\|(\varphi_n - 1)\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

in quanto $\lim_{n \to +\infty} (\varphi_n(x) - 1)\tilde{f}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

e $|(\varphi_n(x) - 1)\tilde{f}(x)| \leq 2|\tilde{f}(x)|$.

$\blacksquare$