TEOR. di DERIVAZIONE SOTTO SEGNO d'INTEGRALE

Sia assegnata una $f: A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $I = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$ intervallo. Supponiamo che

1) $f(\cdot, t)$ sia integrabile su A $\forall t \in (a,b)$
2) $f(x, \cdot)$ sia derivabile in (a,b) per m-q.o $x \in A$
3) esiste g integrabile su A t.c.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x) \qquad \text{per m-q.o. } x \in A, \ \forall t \in (a,b)$$

Allora, definita la funzione $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \int_A f(x,t)\, dx \qquad \forall t \in (a,b)$$

risulta:
1) φ derivabile in (a,b)
2) $\varphi'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \quad \forall t \in (a,b)$

Dim: Sia $t_0 \in (a,b)$ ed $h \neq 0$ tc $t_0 + h \in (a,b)$.

Consideriamo

$$\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} = \int_A \frac{f(x,t_0+h) - f(x,t_0)}{h}\, dx \qquad \forall h \neq 0 \text{ tc } t_0+h \in (a,b)$$

Posto $\psi_h(x) = \frac{1}{h}\left[f(x,t_0+h) - f(x,t_0) \right]$ per m-q.o. $x \in A$, $\forall h \neq 0$ tc..,

abbiamo (i) $\psi_h(x) \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ puntualmente per m-q.o $x \in A$

e inoltre

Th Lagrange

$$\text{(ii)}\quad |\psi_h(x)| = \frac{1}{|h|}\,|f(x,t_0+h)-f(x,t_0)| \overset{\text{Th Lagrange}}{=}$$

ip 3)

$$= \frac{1}{|h|}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+\vartheta(x)h)\right||h| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+\vartheta(x)h)\right| \overset{\text{ip 3)}}{\leq}$$

$$\leq g(x) \quad \text{per } m\text{-q.o } x\in\Omega \text{ e } \forall h\neq 0,\ \text{tc } t_0+h\in(a,b)$$

dove $\vartheta(x)\in(0,1)$ per m-q.o $x\in(a,b)$

Preso quindi $\delta := \min(t_0-a,\ b-t_0)$, allora dalla (ii) segue

$$\text{(ii)}\quad |\psi_h(x)| \leq g(x) \quad \text{per } m\text{-q.o } x\in\Omega \text{ e } \forall h\in(t_0-\delta,t_0+\delta)-\{0\}$$

Da (i), (ii) segue che sono verificate le ipotesi del teorema di convergenza dominata di Lebesgue relativamente alla famiglia $\{\psi_h\}$

Quindi, essendo

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} = \int_A \psi_h(x)\,dx$$

concludo che $\exists \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_A \psi_h(x)\,dx$ e quindi

che φ è derivabile in t_0 ($\Rightarrow$ tesi 1)) e poi che

$$\varphi'(t_0) = \lim_{h\to 0}\int_A \psi_h(x)\,dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \qquad (\forall t_0\in(a,b)) \quad (\Rightarrow \text{tesi 2}))$$

QED