Note di teoria della misura

a cura di Samuele Maschio

1 Cosa vuol dire misurabile secondo Lebesgue

1.1 Insiemi non misurabili

Prima di tutto iniziamo con il ricordare il seguente

Assioma 1.1 (**della scelta**)**.** Sia $\mathcal{X}$ un insieme di insiemi tale che per ogni $X \in \mathcal{X}$, $X \neq \emptyset$. Allora esiste una funzione $\Phi\colon \mathcal{X} \to \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ tale che

$$\Phi(X) \in X \text{ per ogni } X \in \mathcal{X}.$$

Abbiamo il seguente

Teorema 1.2. *Esiste un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *non misurabile secondo Lebesgue. Cioè*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Proof. Consideriamo l'insieme $[0,1]$ e la relazione $\sim$ su di esso definita da

$$\text{per ogni } x, y \in [0,1] \;\; x \sim y \text{ se e solo se } x - y \in \mathbb{Q}.$$

La relazione $\sim$ è d'equivalenza su $[0,1]$, infatti

1. per ogni $x \in [0,1]$, $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, dunque $x \sim x$;
2. per ogni $x, y \in [0,1]$, $x \sim y$ implica $x - y \in \mathbb{Q}$, implica $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Q}$, implica $y \sim x$;
3. per ogni $x, y, z \in [0,1]$, se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x - y \in \mathbb{Q}$ e $y - z \in \mathbb{Q}$, da cui si ottiene che $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$ e quindi che $x \sim z$.

Si consideri l'insieme $[0,1]/\sim$ delle classi di equivalenze di $[0,1]$ rispetto a $\sim$. Posso applicare a questo insieme di insiemi non vuoti a due a due disgiunti l'assioma della scelta, ottenendo una funzione

$$\Phi\colon [0,1]/\sim \to [0,1]$$

tale che $\Phi(X) \in X$ per ogni $X \in [0,1]/\sim$.

Sia $N := \{\Phi(X) | X \in [0,1]/\sim\}$. Abbiamo che

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (N+q) \subseteq [-1,2]$$

e che, per ogni $q, q' \in \mathbb{Q}$, se $(N+q) \cap (N+q') \neq \emptyset$, allora $q = q'$. Supponiamo infatti che $x \in (N+q) \cap (N+q')$; allora esistono $n, n' \in N$ tali che

$$x = n + q = n' + q'$$

da cui $n = n' + (q' - q)$ e quindi $n \sim n'$, da cui segue $n = n'$ (in N c'è un solo rappresentante per ogni classe di equivalenza).

Supponiamo ora che N sia misurabile. Allora

$$\lambda([0,1]) \leq \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (N+q)) \leq \lambda([-1,2])$$

da cui, dato che $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ è numerabile e gli $(N+q)$ sono a due a due disgiunti, si ha che

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(N+q) \leq 3.$$

Ora, grazie all'invarianza per traslazioni di λ, si ha che

$$1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(N) \leq 3.$$

Supponiamo ora che $\lambda(N) = 0$, allora $1 \leq 0$, dunque $\lambda(N) > 0$, ma in tal caso si ottiene che $+\infty \leq 3$. Quindi abbiamo raggiunto una contraddizione. Dunque N non è misurabile.

□

Osservazione 1.3. La dimostrazione precedente può essere semplicemente modificata per riuscire a dimostrare che ogni insieme misurabile di misura positiva di $\mathbb{R}$ contiene un sottoinsieme non misurabile.

Osservazione 1.4. Modificando la dimostrazione e considerando $\mathbb{R}^n$, l'n-cubo $[0,1]^n$ e una relazione di equivalenza simile a quella definita nella dimostrazione, ma ottenuta considerando $\mathbb{Q}^n$ al posto di $\mathbb{Q}$, otteniamo che $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 1.5. La stessa dimostrazione del teorema precedente dimostra che non esiste una misura su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ che sia invariante per traslazioni e positiva e finita su $[0,1]$.

Prima di procedere vogliamo introdurre altre due costruzioni di insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Prima di farlo introduciamo il seguente

Assioma 1.6 (Lemma di Zorn). Sia $(P, \sqsubseteq)$ un ordine parziale. Se per ogni $X \subseteq P$ per cui $(X, \sqsubseteq)$ è un ordine totale esiste $p \in P$ tale che per ogni $x \in X$, $x \sqsubseteq p$, allora esiste $\bar{p} \in P$ tale che, per ogni $p \in P$, $\bar{p} \not\sqsubset p$.

Teorema 1.7. *Ogni spazio vettoriale ha una base.*

Proof. (sketch) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si consideri l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}, \subseteq)$ dove $\mathcal{P} := \{X \subseteq V \mid X \text{ è indipendente}\}$ e la relazione è l'inclusione. Se $\mathcal{C}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}$ totalmente ordinato, allora si verifica immediatamente che $\bar{C} := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ è un elemento di $\mathcal{P}$ e che per ogni $C \in \mathcal{C}$, $C \subseteq \bar{C}$. Per il lemma di Zorn esiste dunque un elento massimale in $\mathcal{P}$ che chiamiamo B. B è una base, perchè se $span(B) \neq V$, allora esisterebbe $0 \neq b \in V \setminus span(B)$ e potrei dunque considerare l'insieme $B \cup \{b\}$ che sarebbe in $\mathcal{P}$ e di cui B è un sottoinsieme proprio, ottenendo una contraddizione. $\square$

Lemma 1.8 (di Lebesgue). *Sia $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tale che $\lambda(X) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $|x| < \delta$, allora $(X + x) \cap X \neq \emptyset$.*

Proof. Possiamo supporre senza ledere la generalità che X sia limitato (infatti, se non lo è, $X \cap [-n, n]$ ha misura strettamente positiva per qualche $n \in \mathbb{N}$). Grazie alla regolarità della misura di Lebesgue, possiamo trovare un chiuso C e un aperto A tali che

$$C \subseteq X \subseteq A \text{ e } \lambda(A) < \frac{4}{3}\lambda(C).$$

In particolare dato che A è unione numerabile di intervalli disgiunti, esiste almeno uno di questi intervalli, chiamiamolo I, tale che

$$\lambda(I) < \frac{4}{3}\lambda(I \cap C).$$

Si ponga $\delta := \frac{1}{2}\lambda(I)$ e sia $x \in \mathbb{R}$, tale che $|x| < \delta$. Allora

$$\frac{3}{2}\lambda(I) = \frac{3}{4}\lambda(I) + \frac{3}{4}\lambda(I) < \lambda(I \cap C) + \lambda((I \cap C) + x).$$

Se ora $I \cap C$ e $(I \cap C) + x$ fossero disgiunti avremmo che la catena di disuguaglianze precedenti continuerebbe con

$$= \lambda((I \cap C) \cup ((I \cap C) + x)) \leq \lambda(I \cup (I + x)) \leq \frac{3}{2}\lambda(I),$$

facendoci pervenire ad un assurdo. Dunque

$$\emptyset \neq (I \cap C) \cap ((I \cap C) + x) \subseteq X \cap (X + x).$$

$\square$

Costruzione 1.9. Si consideri una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e si fissi $\bar{b} \in \mathcal{B}$. Si definisca $N := span(\mathcal{B} \setminus \{\bar{b}\})$. Supponiamo che N sia misurabile, allora la sua misura dev'essere strettamente positiva, infatti

$$\mathbb{R} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (N + q\bar{b}),$$

da cui segue, dato che gli $N + q\bar{b}$ sono a due a due disgiunti, che

$$\lambda(\mathbb{R}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(N)$$

e quindi che $\lambda(N) > 0$. Applicando il lemma di Lebesgue a N ottengo che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \delta$, si ha che $(N + x) \cap N \neq \emptyset$. Tuttavia esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $|q\bar{b}| < \delta$. Tuttavia per tale q si ha che

$$(N + q\bar{b}) \cap N = \emptyset$$

e quindi si ottiene un assurdo. Dunque N non è misurabile secondo Lebesgue.

Prima di proseguire con la successiva costruzione dobbiamo introdurre qualche nozione di teoria dei grafi.

Definizione 1.10. Un *grafo* è una coppia (V, S) dove $V \neq \emptyset$ e S è un sottoinsieme di $\{X \subseteq V | \#X = 2\}$. V è detto *insieme dei vertici*, mentre S è detto *insieme degli spigoli*.

Definizione 1.11. Un *ciclo* in un grafo (V, S) è una n-upla $(v_1, .., v_n)$ di elementi di V tale che per ogni $j \in \{1, ..., n-1\}$, $\{v_j, v_{j+1}\} \in S$ e $\{v_n, v_1\} \in S$. Un *cammino* da un vertice x a un altro y di lunghezza n è una n-upla

$(x_1, ..., x_n)$ di elementi di V tale che per ogni $j = 1, ...n-1$,$\{x_j, x_{j+1}\} \in S$, $x_1 = x$ e $x_n = y$. La *distanza* tra due elementi di V è definita come la lunghezza del minimo cammino dal primo al secondo, e, se non esiste un tale cammino, è posta uguale a$+\infty$. Due elementi di V sono *connessi* se la loro distanza è finita. Le *componenti connesse* di un grafo sono le classi di equivalenza di V rispetto alla relazione di connessione.

Definizione 1.12. Un grafo (V, S) è detto *bipartito* se esistono V_1, V_2 (dette *componenti*) tali che $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e per ogni $e \in S$, $\#(e \cap V_1) = \#(e \cap V_2) = 1$.

Teorema 1.13. *Un grafo è bipartito se e solo se ogni suo ciclo è pari.*

Proof. (sketch) In un grafo bipartito ogni ciclo è pari dato che ogni volta che si percorre uno spigolo in S si passa da una componente all'altra. Viceversa per ogni componente connessa X, usando l'assioma della scelta, posso selezionare un vertice v_X e posso considerare

$$V_1 := \bigcup_{X \in \mathcal{K}} \{v \in V |\ d(v, v_X) \text{ è pari}\}$$

e

$$V_2 := \bigcup_{X \in \mathcal{K}} \{v \in V |\ d(v, v_X) \text{ è dispari}\},$$

dove $\mathcal{K}$ è l'insieme delle componenti connesse del grafo. □

Costruzione 1.14 (di Thomas). Consideriamo il grafo $(\mathbb{R}, S)$ dove per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$

$$\{x, x'\} \in S \text{ se e solo se esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } |x - x'| = 3^k.$$

Tale grafo è bipartito, infatti se $(x_1, ..., x_n)$ è un ciclo, allora

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) + (x_1 - x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} ((-1)^{k'_j} 3^{k_j}) + (-1)^{k'_n} 3^{k_n}$$

per alcuni interi $k_1, ..., k_n, k'_1, .., k'_n$. Consideriamo ora

$$\bar{k} := \min_{j \in \{1, ..., n\}} k_j.$$

Abbiamo che

$$\sum_{j=1}^{n-1}((-1)^{k'_j}3^{k_j-\bar{k}})+(-1)^{k'_n}3^{k_n-\bar{k}}=3^{-\bar{k}}(\sum_{j=1}^{n-1}((-1)^{k'_j}3^{k_j})+(-1)^{k'_n}3^{k_n})=0$$

Ma la somma di destra coinvolge tutti numeri interi dispari e quindi n non può che essere pari. Quindi il ciclo $(x_1, ..., x_n)$ è pari e il grafo è bipartito.

Sia ora (V_1, V_2) una partizione di $\mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni della definizione di grafo bipartito. Abbiamo che per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$V_1 + 3^k = V_2,$$

per la definizione stessa di S. Supponiamo ora che V_1 (e quindi anche V_2) sia misurabile secondo Lebesgue. Allora, a causa dell'invarianza per traslazioni, $\lambda(V_1) = \lambda(V_2)$ e dato che $\mathbb{R} = V_1 \cup V_2$, si ha che $\lambda(V_1) > 0$. In particolare, grazie al lemma di Lebesgue, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x < \delta$,

$$(V_1 + x) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Tuttavia esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $3^k < \delta$, e per tale k si ha che

$$(V_1 + 3^k) \cap V_1 = V_2 \cap V_1 = \emptyset,$$

e quindi abbiamo un assurdo. Dunque V_1 e V_2 non sono misurabili secondo Lebesgue.

1.2 Insiemi misurabili non boreliani

Proposizione 1.15. $\#\mathcal{B}(\mathbb{R}) < \#\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Proof. (sketch) È possibile dimostrare usando l'induzione transfinita che la cardinalità dei boreliani di $\mathbb{R}$ è la cardinalità del continuo. D'altra parte dato che $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, abbiamo che

$$\#\mathcal{L}(\mathbb{R}) \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Tuttavia l'insieme di Cantor C che è di cardinalità continua ha misura 0 e quindi tutti i suoi sottoinsiemi sono misurabili secondo Lebesgue. Otteniamo dunque che

$$\#\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \#\mathcal{P}(C) \leq \#\mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Abbiamo quindi che $\#\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e dato che quest'ultima é strettamente superiore alla cardinalità del continuo, usando il teorema di Cantor, possiamo concludere. □

Da questo risultato segue immediatamente il seguente

Corollario 1.16. *Esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue, ma non boreliani (cioé $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R})$).*

Vogliamo ora, per $n > 0$, costruire un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue che non sia boreliano.

Costruzione 1.17. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si consideri la funzione

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

data da $F(x_1, ..., x_n) := (x_1, ..., x_n, 0)$. Questa funzione è continua e quindi misurabile rispetto alle σ-algebre dei boreliani. In particolare posso considerare un insieme $N \subseteq \mathbb{R}^n$ non misurabile secondo Lebesgue e quindi definire

$$N' := F(N) := \left\{(x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, ..., x_n) \in N\right\}.$$

L'insieme N' é misurabile secondo Lebesgue, infatti è sottoinsieme dell'iperpiano $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\right\}$ che ha misura di Lebesgue nulla. Tuttavia N' non é boreliano; infatti se lo fosse la sua controimmagine tramite F lo sarebbe, ma la sua controimmagine é N che non é misurabile e quindi nemmeno boreliano.

Nel caso $n = 1$ la costruzione deve essere fatta con altri strumenti.

Costruzione 1.18. Si consideri la scala di Cantor $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ e si consideri la nuova funzione $\tilde{\phi}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{\phi}(x) := \phi(x) + x.$$

Questa funzione é continua, strettamente crescente e la sua immagine é l'intervallo $[0, 2]$. Ora é evidente che l'immagine del complementare rispetto a $[0, 1]$ dell'insieme di Cantor ha misura 1, infatti ognuno degli intervalli disgiunti che lo compone viene mandato in un intervallo della stessa lunghezza. Dunque se C é l'insieme di Cantor, $\lambda(\tilde{\phi}(C)) = 1$. In particolare dato che questo insieme ha misura positiva, grazie all'osservazione 1.3., esiste un suo sottoinsieme N non misurabile. Si consideri ora $N' := \tilde{\phi}^{-1}(N)$. Questo insieme, essendo un sottoinsieme dell'insieme di Cantor, é misurabile secondo Lebesgue e di misura nulla. Tuttavia non puó essere boreliano. Infatti se lo fosse $N = \tilde{\phi}(N') = (\tilde{\phi}^{-1})^{-1}(N')$ sarebbe boreliano; ma N non é misurabile, e quindi non é nemmeno boreliano.

1.3 Estensioni della misura di Lebesgue

Definizione 1.19. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $(\Omega, \mathcal{M}', \mu')$ due spazi di misura. Il secondo si dice un'*estensione* del primo se

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}' \text{ e } \mu'|_{\mathcal{M}} = \mu.$$

Definizione 1.20. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle estensioni $(\mathbb{R}, \mathcal{L}', \lambda')$ di $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ che siano invarianti per traslazioni e sia $\preceq$ la relazione su di esso determinata da

$$\mathbf{S} \preceq \mathbf{S}' \text{ se e solo se } \mathbf{S'} \text{ è un'estensione di } \mathbf{S}.$$

Abbiamo il seguente

Teorema 1.21 (di Kharazishvili). *Esiste una successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che*

1. *$X_i \cap X_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$;*
2. *$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathbb{R}$;*
3. *se $(\mathbb{R}, \mathcal{L}', \lambda') \in \mathcal{E}$ e esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n \notin \mathcal{L}'$, allora esiste $(\mathbb{R}, \mathcal{L}'', \lambda'') \in \mathcal{E}$ tale che $X_n \in \mathcal{L}''$ e*
$$(\mathbb{R}, \mathcal{L}', \lambda') \preceq (\mathbb{R}, \mathcal{L}'', \lambda'');$$
4. *per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $(\mathbb{R}, \mathcal{L}', \lambda') \in \mathcal{E}$ e $X_n \in \mathcal{L}'$, allora $\lambda'(X_n) = 0$.*

Da questo teorema segue immediatamente il seguente

Corollario 1.22. *$(\mathcal{E}, \preceq)$ non ha un elemento massimale.*

Proof. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{L}*, \lambda*)$ fosse un elemento massimale in $\mathcal{E}$ rispetto a $\preceq$, allora $\mathcal{L}^*$ dovrebbe contenere gli X_n del teorema precedente per ogni $n \in \mathbb{N}$, altrimenti si potrebbe sfruttare il punto 3. del teorema precedente per darne un'estensione propria contenente uno degli X_n che non sono in $\mathcal{L}^*$. Tuttavia per il punto 4., dato che $\lambda^*(X_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, sfruttando i punti 1. e 2. abbiamo che

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda^*(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(X_n) = 0,$$

il che è assurdo. $\square$

Prima di procedere ricordiamo la seguente ipotesi

Ipotesi 1.23 (**del continuo**). Non esiste un sottoinsieme infinito X di $\mathbb{R}$ tale che

$$\#\mathbb{N} < \#X < \#\mathbb{R}.$$

Concludiamo con un teorema sulle estensioni totali, non necessariamente invarianti per traslazioni. Ma prima passiamo alla seguente

Definizione 1.24. Sia X un insieme infinito. Una misura *non banale* μ su X è una misura non identicamente nulla su $(X, \mathcal{P}(X))$ tale che $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in X$.

Teorema 1.25 (**di Ulam**). *Se esiste una misura non banale su* $\mathbb{R}$*, allora non vale l'ipotesi del continuo.*

2 Misure relative

Ho scritto questa sezione sulle misure relative seguendo principalmente gli appunti manoscritti della prof. C.Bondioli che teneva il corso di Teoria della Misura per il corso di Laurea in Matematica fino all'anno accademico 2008/2009 e integrandole con alcuni contributi dall'appendice a cura del prof. C.Sbordone all'edizione italiana del libro "Analisi Funzionale. Teoria e Applicazioni" di Brezis e da alcune note in rete a cura del dott. Y. Zhang

2.1 Misure relative

Definizione 2.1. Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Una *misura relativa* su $(\Omega, \mathcal{M})$ è una funzione

$$\phi\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

tale che

1. $\phi(\emptyset) = 0$;
2. per ogni successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti, $\phi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(E_n)$.

Osservazione 2.2. Si noti che ogni misura finita è anche una misura relativa.

Osservazione 2.3. Dato che una misura relativa può assumere anche valori negativi, le proprietà di monotonia e subadditività non sono soddisfatte da essa.

Osservazione 2.4. Dato che l'unione di una successione di insiemi non dipende da l'ordine in cui questi vengono presentati, l'assioma 2. implicitamente impone che il risultato della serie dell'assioma stesso non dipende dall'ordine, e questo equivale a richiedere che per ogni successione di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti, la serie delle loro misure relative converga assolutamente.

Proposizione 2.5. *Se μ e η sono due misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora la funzione $\phi := \mu - \eta$ definita in $\mathcal{M}$ è una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$.*

Proof. Il risultato segue dal fatto che se due serie a termini positive $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergono, allora la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - b_n)$ converge assolutamente. Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - b_n| \leq |a_n| + |b_n| = a_n + b_n$. Infatti, osservato ciò si ottiene subito che per ogni successione di insiemi di $\mathcal{M}$ disgiunti $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\phi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) - \eta(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(E_n) - \eta(E_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(E_n),$$

mentre è ovvio che $\phi(\emptyset) = \mu(\emptyset) - \eta(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

□

Esempio 2.6. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Consideriamo la funzione

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\phi(E) := \int_E f d\mu.$$

La funzione ϕ definisce una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$, dato che l'integrale è nullo sugli insiemi di misura nulla (e in particolare su $\emptyset$) e che l'integrale è σ-additivo.

Passiamo alla seguente

Definizione 2.7. Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Un insieme P in $\mathcal{M}$ è *positivo* se per ogni $A \subseteq P$ in $\mathcal{M}$, $\phi(A) \geq 0$. Un insieme N in $\mathcal{M}$ è *negativo* se per ogni $A \subseteq N$ in $\mathcal{M}$, $\phi(A) \leq 0$.

Otteniamo il seguente

Lemma 2.8. *Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se $A \in \mathcal{M}$ è tale che $\phi(A) > 0$, allora esiste $P \subseteq A$ in $\mathcal{M}$ tale che P è positivo e $\phi(P) > 0$.*

Proof. Se A è positivo allora ho concluso. Altrimenti esiste almeno un sottoinsieme di A di misura strettamente negativa. In particolare è ben definito il numero naturale

$$n_1 := \min \left\{ n \in \mathbb{N} | \text{ esiste } A' \in \mathcal{M}, A' \subseteq A \text{ tale che } \phi(A') < -\frac{1}{n} \right\}$$

e si può fissare $A_1 \subseteq A$ in $\mathcal{M}$ con $\phi(A_1) < -\frac{1}{n_1}$.

Se $A \setminus A_1$ è positivo allora ho concluso, infatti $\phi(A \setminus A_1) = \phi(A) - \phi(A_1) > \phi(A) > 0$. Altrimenti è ben definito il seguente numero naturale

$$n_2 := \min \left\{ n \in \mathbb{N} | \text{ esiste } A' \in \mathcal{M}, A' \subseteq A \setminus A_1 \text{ tale che } \phi(A') < -\frac{1}{n} \right\}$$

e si può fissare $A_2 \subseteq A$ in $\mathcal{M}$ tale che $\phi(A_2) < -\frac{1}{n_2}$.

Se $A \setminus (A_1 \cup A_2)$ è positivo ho concluso. Questo procedimento viene iterato ricorsivamente, e se non si arresta mai, perchè si ottiene che $A \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ non è positivo per ogni $n \in \mathbb{N}$ positivo, allora ottengo una successione $\{A_k\}_{k \geq 1}$ di sottoinsiemi di A a due a due disgiunti in $\mathcal{M}$, tali che $\phi(A_k) < -\frac{1}{n_k}$, dove per ogni $k \geq 1$

$$n_{k+1} := \min \left\{ n \in \mathbb{N} | \text{ esiste } A' \in \mathcal{M}, A' \subseteq A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j \text{ tale che } \phi(A') < -\frac{1}{n} \right\}$$

Ora definiamo $P := A \setminus (\bigcup_{n \geq 1} A_n)$. Voglio dimostrare che P è un insieme positivo. Innanzitutto abbiamo che

$$\phi(A) = \phi(P) + \sum_{n \geq 1} \phi(A_n).$$

In particolare la serie $\sum_{k \geq 1} \phi(A_k)$ converge assolutamente e quindi la serie $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{n_k}$ converge e quindi $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} = 0$.

Fisso ora $\epsilon > 0$ e suppongo che esista $E \subseteq P$ in $\mathcal{M}$ tale che $\phi(E) < -\epsilon$. Per quanto appena detto, esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$, $\bar{k} > 1$, tale che $\frac{1}{n_{\bar{k}}-1} < \epsilon$. Abbiamo che $\phi(E) < -\epsilon < -\frac{1}{n_{\bar{k}}-1}$. Ma

$$E \subseteq P \subseteq A \setminus (\bigcup_{j=1}^{\bar{k}-1} A_j)$$

e $n_{\bar{k}} - 1 < n_{\bar{k}}$, e dunque ho una contraddizione con la definizione di $n_{\bar{k}}$.

Dunque P non può avere sottoinsiemi in $\mathcal{M}$ di misura strettamente negativa. Infatti se esistesse un tale insieme E, allora esisterebbe $\epsilon > 0$ tale che $\phi(E) < -\epsilon$. Ho quindi dimostrato che P ̀positivo. Per concludere si osservi che

$$\phi(P) = \phi(A) - \sum_{k \geq 1} \phi(A_k) \geq \phi(A) > 0.$$

□

Abbiamo inoltre il seguente

Lemma 2.9. *Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Sia $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathcal{M}$ positivi. Allora $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ è positivo.*

Proof. Consideriamo la successione $\left\{\tilde{P}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\tilde{P}_0 := P_0$$

$$\tilde{P}_{k+1} = P_{k+1} \setminus (\bigcup_{j=0}^{k} P_j) \ (k \in \mathbb{N})$$

Questa nuova successione è costituita da insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti e positivi e

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k.$$

Sia P tale unione e sia $E \in \mathcal{M}$ un sottoinsieme di P. Allora

$$\phi(E) = \phi(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\tilde{P}_k \cap E)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi(\tilde{P}_k \cap E) \geq 0,$$

dato che ogni $\tilde{P}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ è positivo. Dunque P è positivo. □

Grazie ai precedenti lemmi, possiamo finalmente dimostrare il primo fondamentale teorema della teoria delle misure relative.

Teorema 2.10 (di decomposizione di Hahn)**.** *Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora esistono $A, B \in \mathcal{M}$ tali che*

1. $A \cap B = \emptyset$;
2. $A \cup B = \Omega$;
3. *A è positivo.*
4. *B è negativo.*

Proof. Sia $p := \sup\{\phi(P) |\ P \in \mathcal{M} \text{ positivo}\}$. L'estremo superiore p è ben definito perchè almeno $\emptyset$ è positivo. Consideriamo quindi una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi positivi di $\mathcal{M}$ tale che $\lim_{n\to\infty} \phi(A_n) = p$. Sia $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Allora per il lemma precedente A è positivo e quindi $\phi(A) \leq p$. Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\phi(A) = \phi(A_n) + \phi(A \setminus A_n) \geq \phi(A_n)$ perché A è positivo e quindi $\phi(A \setminus A_n) \geq 0$. Dunque

$$\phi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \phi(A_n) = p.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\phi(A) = p$. Consideriamo ora $B := \Omega \setminus A$. B non contiene insiemi positivi di misura positiva. Infatti se così fosse, esisterebbe un insieme P positivo disgiunto da A di misura positiva e quindi in particolare $A \cup P$ sarebbe positivo e $\phi(A \cup P) > \phi(A) = p$, il che è in contraddizione con la definizione di p. In particolare dato che B non ha sottoinsiemi positivi di misura positiva, si ottiene, grazie al primo lemma, che non può avere sottoinsiemi di misura positiva, dunque B è negativo. □

Definizione 2.11. Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se la coppia di insiemi (A, B) soddisfa le condizioni del teorema precedente, allora (A, B) è una *decomposizione di Hahn* di ϕ.

Osservazione 2.12. L'articolo *una* riferito a decomposizione di Hahn nella precedente definizione non è casuale, infatti in generale il teorema di decomposizione di Hahn non garantisce l'unicità di una tale coppia. Consideriamo per esempio la misura relativa $\delta_0 - \delta_1$ ottenuta dalla differenza tra la misura di Dirac centrata in 0 e quella centrata in 1 definita su $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Due decomposizioni di Hahn per essa sono date da $(\{0\}, \mathbb{R}\setminus\{0\})$ e da $(\mathbb{R}\setminus\{1\}, \{1\})$.

Esempio 2.13. Ritornando all'esempio 2.6, abbiamo che una decomposizione di Hahn è data da (A, B) dove

$$A := \{x \in \Omega |\ f(x) \geq 0\};$$

$$B := \{x \in \Omega |\ f(x) < 0\}.$$

Fortunatamente abbiamo il seguente

Lemma 2.14. *Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$ e siano (A, B) e (A', B') due decomposizioni di Hahn di ϕ, allora per ogni $E \in \mathcal{M}$ si ha che*

$$\phi(A \cap E) = \phi(A' \cap E) \quad e \quad \phi(B \cap E) = \phi(B' \cap E).$$

Proof. La seconda uguaglianza segue dalla prima, infatti, per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\phi(B \cap E) = \phi(E) - \phi(A \cap E) \text{ e } \phi(B' \cap E) = \phi(E) - \phi(A' \cap E).$$

Dimostriamo quindi la prima uguaglianza. Innanzitutto abbiamo che

$$\phi((A \setminus A') \cap E) \geq 0,$$

dato che $(A \setminus A') \cap E \subseteq A$. Ma $(A \setminus A') \cap E \subseteq B'$ e quindi abbiamo anche che

$$\phi((A \setminus A') \cap E) \leq 0.$$

Dunque $\phi((A \setminus A') \cap E) = 0$, da cui si ottiene che per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\phi(A \cap E) = \phi((A \cap A') \cap E) + \phi((A \setminus A') \cap E) = \phi((A \cap A') \cap E)$$

e invertendo i ruoli di A e A', si ottiene pure che

$$\phi(A' \cap E) = \phi((A \cap A') \cap E),$$

da cui segue che $\phi(A \cap E) = \phi(A' \cap E)$. $\square$

Grazie al precedente lemma possiamo, senza ambiguità, passare alla seguente

Definizione 2.15. Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Si definiscono tre funzioni $\phi^+, \phi^-, |\phi|: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, dette rispettivamente *variazione superiore*, *variazione inferiore* e *variazione totale* di ϕ, tramite

$$\phi^+(E) := \phi(A \cap E);$$

$$\phi^-(E) := -\phi(B \cap E);$$

$$|\phi|(E) := \phi^+(E) + \phi^-(E),$$

(per $E \in \mathcal{M}$), dove (A, B) è una decomposizione di Hahn per ϕ.

Osservazione 2.16. La definizione precedente è ben posta perché il lemma precedente assicura che le definizioni di ϕ^+ e ϕ^- non dipendono dalla particolare decomposizione di Hahn scelta.

Proposizione 2.17. *Sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora ϕ^+,ϕ^- e $|\phi|$ sono misure finite. Inoltre per ogni $E \in \mathcal{M}$,*

$$\phi(E) = \phi^+(E) - \phi^-(E) \ \textit{e} \ |\phi(E)| \leq |\phi|(E).$$

Proof. Sia (A, B) una decomposizione di Hahn per ϕ. Innanzitutto per ogni $E \in \mathcal{M}$, $\phi^+(E) = \phi(A \cap E) \geq 0$, perché $A \cap E \subseteq A$ e $\phi^-(E) = -\phi(B \cap E) \geq 0$, perchè $B \cap E \subseteq B$.

Inoltre $\phi^+(\emptyset) = \phi(A \cap \emptyset) = \phi(\emptyset) = 0$ e $\phi^-(\emptyset) = -\phi(B \cap \emptyset) = -\phi(\emptyset) = 0$. Infine per ogni $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti si ha che

$$\phi^+(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \phi(A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \phi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(A \cap E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^+(E_n)$$

e che

$$\phi^-(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = -\phi(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = -\phi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap E_n)) =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\phi(B \cap E_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^-(E_n).$$

Dunque ϕ^+ e ϕ^- sono misure, e sono finite perché

$$\phi^+(\Omega) = \phi(A) \text{ e } \phi^-(\Omega) = -\phi(B).$$

Per concludere abbiamo che per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\phi(E) = \phi(A \cap E) + \phi(B \cap E) = \phi^+(A) - \phi^-(B)$$

e

$$|\phi(E)| = |\phi^+(E) - \phi^-(E)| \leq |\phi^+(E)| + |-\phi^-(E)| = \phi^+(E) + \phi^-(E) = |\phi|(E).$$

□

Esempio 2.18. Ritornando all'esempio 2.6, abbiamo che per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\phi^+(E) := \int_E f^+ d\mu;$$

$$\phi^-(E) := \int_E f^- d\mu;$$

$$|\phi|(E) := \int_E |f| d\mu,$$

dove $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$.

Infatti considerando la decomposizione di Hahn considerata precedentemente, ottengo che

$$\phi^+(E) = \phi(A \cap E) = \int_{A \cap E} f d\mu = \int_{A \cap E} f^+ d\mu = \int_E f^+ d\mu;$$

$$\phi^-(E) = -\phi(B \cap E) = \int_{B \cap E} (-f) d\mu = \int_{B \cap E} f^- d\mu = \int_E f^- d\mu;$$

inoltre dato che $|f| = f^+ + f^-$, si ha che

$$|\phi|(E) = \phi^+(E) + \phi^-(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu =$$

$$= \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

2.2 Misure assolutamente continue e singolari

Definizione 2.19. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia ϕ una misura o una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. ϕ è *μ-assolutamente continua* se per ogni $E \in \mathcal{M}$, se $\mu(E) = 0$, allora $\phi(E) = 0$.

Esempio 2.20. Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, allora la misura ϕ definita da $\phi(E) := \int_E f d\mu$ è μ-assolutamente continua, infatti se $\mu(E) = 0$, allora $\int_E f d\mu = 0$.

Esempio 2.21. Considerando lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, la misura δ_0 non è λ-assolutamente continua. Infatti $\lambda(\{0\}) = 0$, ma $\delta_0(\{0\}) = 1$. Allo stesso tempo λ non è δ_0-assolutamente continua. Infatti $\delta_0([1, 2]) = 0$, ma $\lambda([1, 2]) = 1$.

Esempio 2.22. Sia λ^* la misura definita su $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ tramite $\lambda^*(E) := \lambda(E \cap [0, 1])$. Allora λ^* è λ-assolutamente continua, infatti se $\lambda(E) = 0$, allora $\lambda^*(E) = \lambda(E \cap [0, 1]) \leq \lambda(E) = 0$. Viceversa λ non è λ^*-assolutamente continua. Infatti $\lambda^*([2, 3]) = 0$, ma $\lambda([2, 3]) = 1$.

Abbiamo la seguente proposizione, che in un certo senso giustifica il termine *assolutamente continuo* in termini di ϵ/δ-continuità.

Proposizione 2.23. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se ϕ è μ-assolutamente continua, allora per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$, se $\mu(E) < \delta$ allora $|\phi|(E) < \epsilon$.*

Proof. La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che la tesi non sia vera. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $E_n \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$, ma $|\phi|(E_n) \geq \epsilon$. Consideriamo ora l'insieme E definito da

$$E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k.$$

L'insieme E appartiene ad $\mathcal{M}$ ed è il limite di una successione decrescente di insiemi $\left\{\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}$. In particolare abbiamo che $\mu(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ per la subadditività di μ e quest'ultimo termine converge a 0 dato che la serie degli $\frac{1}{2^k}$ converge. Dunque in particolare

$$0 \leq \mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k) = 0$$

e quindi $\mu(E) = 0$. Tuttavia per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|\phi|(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k) \geq |\phi|(E_n) \geq \epsilon$$

per la monotonia di $|\phi|$ e quindi in particolare

$$|\phi|(E) = \lim_{n\to\infty} |\phi|(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k) \geq \epsilon$$

da cui abbiamo una contraddizione con l'ipotesi di μ-assoluta continuità di ϕ, dato che $\mu(E) = 0$, ma $|\phi|(E) \geq \epsilon > 0$.

□

Abbiamo quindi il seguente

Corollario 2.24. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Allora per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$, se $\mu(E) < \delta$, allora*

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon.$$

Proof. Basta considerare la misura relativa ϕ definita nell'esempio 2.6. Usando la proposizione precedente abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$ se $\mu(E) < \delta$, allora

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu = |\phi|(E) < \epsilon$$

□

Inoltre abbiamo che

Proposizione 2.25. *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e ϕ è una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *ϕ è μ-assolutamente continua;*
2. *ϕ^+ e ϕ^- sono μ-assolutamente continue;*
3. *$|\phi|$ è μ-assolutamente continua.*

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.) Sia (A, B) una decomposizione di Hahn per ϕ. Abbiamo che se $E \in \mathcal{M}$ è tale che $\mu(E) = 0$, allora $\mu(A \cap E) = 0$ e $\mu(B \cap E) = 0$, da cui $\phi^+(E) = \phi(A \cap E) = 0$ e $\phi^-(E) = -\phi(B \cap E) = 0$.

2. $\Rightarrow$ 3.) Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $\phi^+(E) = \phi^-(E) = 0$, da cui $|\phi|(E) = \phi^+(E) + \phi^-(E) = 0 + 0 = 0$.

3. $\Rightarrow$ 1.) Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $|\phi(E)| \leq |\phi|(E) = 0$, da cui $\phi(E) = 0$.

□

Passiamo ora alla seguente

Definizione 2.26. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia ϕ una misura relativa o una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$. ϕ è detta *μ-singolare* se esistono $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$, $\mu(A) = 0$ e $|\phi|(B) = 0$ ($\phi(B) = 0$ in caso di misura).

Osservazione 2.27. Ovviamente nel caso di misure finite le due definizioni (quella per misura relativa e quella per misura) coincidono. Infatti in tal caso $|\phi| = \phi$.

Osservazione 2.28. Se μ e ϕ sono due misure su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora ϕ è μ-singolare se e solo se μ è ϕ-singolare. Infatti una partizione (A, B) di Ω rende ϕ una misura μ-singolare se e solo se (B, A) rende μ una misura ϕ-singolare.

Osservazione 2.29. Se una misura o una misura relativa ϕ su $(\Omega, \mathcal{M})$ è μ-singolare e μ-assoutamente continua (dove μ è una certa fissata misura su $(\Omega, \mathcal{M})$), allora ϕ è la misura nulla. Infatti se A e B sono come nella definizione di μ-singolarità, allora per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\phi(E) = \phi(A \cap E) + \phi(B \cap E) = 0,$$

infatti $\mu(A) = 0$ implica che $\mu(A \cap E) = 0$ e quindi per μ-assoluta continuità che $\phi(A \cap E) = 0$; d'altra parte inoltre $|\phi(B \cap E)| \leq |\phi|(B \cap E) \leq |\phi|(B) = 0$.

Esempio 2.30. Le misure δ_0 e λ sono mutualmente singolari in $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, infatti basta considerare la partizione data da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\{0\}$. Infatti $\delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$ e $\lambda(\{0\}) = 0$.

Concludiamo con la seguente

Proposizione 2.31. *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e ϕ è una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *ϕ è μ-singolare;*
2. *ϕ^+ e ϕ^- sono μ-singolari;*
3. *$|\phi|$ è μ-singolare.*

Proof.

1. $\Rightarrow$ 2.) Se (A, B) è una partizione di Ω di insiemi di $\mathcal{M}$ con $\mu(A) = 0$ e $|\phi|(B) = 0$, allora $\phi^+(A) \leq |\phi|(A) = 0$ e $\phi^-(A) \leq |\phi|(A) = 0$, da cui ϕ^+ e ϕ^- sono μ-singolari.
2. $\Rightarrow$ 3.) Siano (A, B) e (A', B') partizioni di Ω di insiemi di $\mathcal{M}$ tali che $\mu(A) = \mu(A') = 0$ e $\phi^+(B) = \phi^-(B') = 0$, allora la partizione di Ω data da $(A \cup A', B \cap B')$ è tale che $\mu(A \cup A') = 0$ e $|\phi|(B \cap B') = \phi^+(B \cap B') + \phi^-(B \cap B') \leq \phi^+(B) + \phi^-(B') = 0$ da cui $|\phi|$ è μ-singolare.
3. $\Rightarrow$ 1.) La definizione della μ-singolarità di ϕ o $|\phi|$ sono la stessa.

□

2.3 La derivata di Radon-Nikodym

Teorema 2.32. *Se μ e ϕ sono due misure finite su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M})$, allora, definito il seguente insieme*

$$\mathcal{F} := \left\{ g \colon \Omega \to \mathbb{R} |\ g \geq 0 \ \textit{ integrabile e per ogni } E \in \mathcal{M} \ \int_E g d\mu \leq \phi(E) \right\},$$

esiste una (unica a meno di uguaglianza μ-q.o.) funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu.$$

Proof. Sia $I := \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$. Tale estremo superiore è ben definito dato che la funzione costantemente nulla 0 appartiene a $\mathcal{F}$. Innanzitutto $I \in \mathbb{R}$, dato che, per ogni $g \in \mathcal{F}$ si ha che

$$\int_\Omega g d\mu \leq \phi(\Omega).$$

Definiamo quindi una successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ di funzioni in $\mathcal{F}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha che

$$I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n d\mu \leq I$$

Questo è possibile per la definizione di estremo superiore. Consideriamo ora la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ delle funzioni definite da $f_n := \max\{g_1, ..., g_n\}$. Dimostriamo che ognuna delle f_n, $n \geq 1$, appartiene a $\mathcal{F}$. Innanzitutto ogni f_n è chiaramente non negativa e integrabile. Inoltre se fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e consideriamo gli insiemi E_k, $k = 1, ..., n$ definiti da

$$E_1 := \{x \in \Omega | g_1(x) \geq g_j(x) \text{ per ogni } j = 1, ..., n\}$$

$$E_{k+1} := \{x \in \Omega | g_{k+1}(x) \geq g_j(x) \text{ per ogni } j = 1, ..., n\} \backslash (\bigcup_{j=1}^{k} E_j) \ (k = 1, ..., n-1),$$

essi sono tutti misurabili e formano una partizione di Ω. Inoltre abbiamo che per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E\cap E_k} f_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E\cap E_k} g_k d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \phi(E \cap E_k) = \phi(E),$$

grazie al fatto che le g_k appartengono a $\mathcal{F}$.

Dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha che $f_n \in \mathcal{F}$ e inoltre che

$$I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega f_n \leq I$$

dato che $f_n \geq g_n$. Inoltre la successione delle f_n è non decrescente per definizione, dunque, utilizzando il teorema di Beppo-Levi e la precedente disuguaglianza, possiamo affermare che esiste una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $f_n \to f$, per $n \to +\infty$, μ-q.o. e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Dimostriamo che $f \in \mathcal{F}$. Sappiamo già che f è integrabile e che inoltre può essere supposta non negativa dato che è limite μ-q.o. di funzioni non

negative. Ora su ogni insieme $E \in \mathcal{M}$ posso applicare il teorema di Beppo-Levi alla successione delle f_n e ad f e dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\int_E f d\mu \leq \phi(E),$$

abbiamo che $\int_E f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq \phi(E)$.

Infine dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu,$$

e allo stesso tempo $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = I$ abbiamo che

$$\int_\Omega f d\mu = I.$$

Basta quindi dimostrare ora che f è l'unica funzione di $\mathcal{F}$ (a meno di uguaglianza μ-q.o.) che soddisfa quest'ultima uguaglianza. Supponiamo quindi che ne esista un'altra, chiamiamola g. Definiti gli insiemi $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{M}$ che formano una partizione di Ω come segue:

$$E_1 := \{x \in \Omega |\ f(x) = g(x)\};$$

$$E_2 := \{x \in \Omega |\ f(x) > g(x)\};$$

$$E_3 := \{x \in \Omega |\ f(x) < g(x)\},$$

facciamo vedere che $\mu(E_2) = \mu(E_3) = 0$ (da cui segue che $f = g$ μ-q.o.). Supponiamo quindi per assurdo che $\mu(E_2) > 0$. Definiamo quindi $h := \max\{f, g\}$. Si verifica facilmente che $h \in \mathcal{F}$, infatti h è integrabile e non negativa e inoltre per ogni E,

$$\int_E h d\mu = \int_{(E_1 \cup E_2)\cap E} f d\mu + \int_{E_3 \cap E} g d\mu \leq \phi((E_1 \cup E_2)\cap E) + \phi(E_3 \cap E) = \phi(E).$$

Inoltre si ha che

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{E_1} g d\mu + \int_{E_2} f d\mu + \int_{E_3} g d\mu >$$

$$> \int_{E_1} g d\mu + \int_{E_2} g d\mu + \int_{E_3} g d\mu = \int_\Omega g d\mu = I,$$

il che costituisce un assurdo dato che $I = \sup_{f' \in \mathcal{F}} \int_\Omega f' d\mu$ e $h \in \mathcal{F}$.

Un ragionamento del tutto analogo si può fare se supponiamo che $\mu(E_3) > 0$. Dunque $\mu(E_2) = \mu(E_3) = 0$ e $f = g$ μ-q.o.

□

Definizione 2.33. Siano μ e ϕ misure finite sullo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M})$. Si definisce la *derivata di Radon-Nikodym* di ϕ rispetto a μ, $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, come l'unica classe di funzioni integrabili in $\mathcal{F}$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \mu} d\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu.$$

Prima di proseguire consideriamo la seguente

Proposizione 2.34. *Siano μ e ϕ due misure finite su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora per ogni $f' \in \mathcal{F}$*

$$f' \leq \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \; \mu - q.o.$$

Proof. Sia f una rappresentante della classe di $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$. Sia $f' \in \mathcal{F}$ e siano

$$A_> := \left\{ x \in \Omega | f'(x) > f(x) \right\};$$

$$A_\leq := \Omega \setminus A_>.$$

Si prenda $h := \max(f, f')$. h è una funzione integrabile non negativa e come al solito si dimostra facilmente che $h \in \mathcal{F}$. D'altra parte abbiamo che

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{A_>} f' d\mu + \int_{A_\leq} f d\mu.$$

Ora se $\mu(A_>)$ fosse strettamente positiva, allora l'integrale precedente sarebbe strettamente superiore a I, portando dunque a una contraddizione. Quindi $\mu(A_>) = 0$ e $f' \leq f$ μ-q.o. □

Inoltre abbiamo anche la seguente

Proposizione 2.35. *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito, allora esiste una partizione di Ω, $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, di insiemi di $\mathcal{M}$ di misura finita a due a due disgiunti.*

Proof. Data $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n \in \mathcal{M}$, $\mu(\Omega_n) \in \mathbb{R}$ e $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, basta considerare la successione di insiemi $\left\{\tilde{\Omega}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\tilde{\Omega}_0 := \Omega_0;$$

$$\tilde{\Omega}_{n+1} := \Omega_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k \ (n \in \mathbb{N}).$$

□

Passiamo ora a un caso più generale:

Proposizione 2.36. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e siano $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left\{\tilde{\Omega}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ due partizioni numerabili di Ω di insiemi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$ tali che $\mu(\Omega_n)$ e $\mu(\tilde{\Omega}_n)$ sono finiti per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora le funzioni*

$$f := \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n}$$

e

$$f' := \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\tilde{\Omega}_n} \frac{\partial \tilde{\phi}_n}{\partial \tilde{\mu}_n}$$

sono ben definite e sono uguali μ-q.o. (dove $\mu_n := \mu|_{\mathcal{M}_n}$ e $\phi_n := \phi|_{\mathcal{M}_n}$ sono misure finite su $(\Omega_n, \mathcal{M}_n)$ dove $\mathcal{M}_n := \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega_n)$ e $\tilde{\mu}_n := \mu|_{\tilde{\mathcal{M}}_n}$ e $\tilde{\phi}_n := \phi|_{\tilde{\mathcal{M}}_n}$ sono misure finite su $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{\mathcal{M}}_n)$ dove $\tilde{\mathcal{M}}_n := \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\tilde{\Omega}_n)$).

Proof. Le due funzioni sono ben definite, grazie al teorema di Beppo Levi (le successioni delle ridotte sono crescenti e le funzioni delle serie hanno supporti a due a due disgiunti). Per controllare la loro uguaglianza μ-q.o. é sufficiente guardare cosa accade a f e f' negli insiemi della forma $\Omega_i \cap \tilde{\Omega}_j$. Grazie alla prima di questa serie di proposizioni, si ha che su Ω_i si ha $f' \leq f$ μ_i-q.o.(equiv. μ-q.o.), mentre su $\tilde{\Omega}_j$ si ha $f \leq f'$ $\tilde{\mu}_j$-q.o. (equiv. μ-q.o.) da cui su $\Omega_i \cap \tilde{\Omega}_j$ si ha che $f = f'$ μ-q.o. Quindi $f = f'$ μ-q.o., dato che la partizione $\left\{\Omega_i \cap \tilde{\Omega}_j\right\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ è numerabile e ogni unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla. □

Possiamo quindi passare alla seguente

Definizione 2.37. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e sia ϕ una misura finita su $(\Omega, \mathcal{M})$. Si definisce la *derivata di Radon-Nikodym* di ϕ su μ, $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, tramite

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n},$$

dove $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una partizione di Ω di insiemi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$ di misura finita e μ_n e ϕ_n sono come nella proposizione precedente.

Definizione 2.38. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora la *derivata di Radon-Nikodym* di ϕ su μ è data da $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ definita da

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} := \frac{\partial \phi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \phi^-}{\partial \mu}.$$

Passiamo al seguente

Teorema 2.39. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e sia ϕ una misura relativa μ-singolare su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = 0$ (μ-q.o.).*

Proof.

1. Se μ e ϕ sono misure finite e ϕ è μ singolare, allora possiamo fissare (A, B) partizione di Ω di elementi di $\mathcal{M}$ tali che $\mu(A) = 0$ e $\phi(B) = 0$. In particolare, per ogni $f \in \mathcal{F}$, per ogni $E \subseteq B$ si ha

$$0 \leq \int_E f d\mu \leq \phi(E) = 0,$$

dunque $f = 0$ μ-q.o. in B e, dato che $\mu(A) = 0$, $f = 0$ μ-q.o. in Ω. Dunque $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = 0$ μ-q.o.

2. Se μ è una misura σ-finita e ϕ è una misura finita μ-singolare, si consideri una partizione di Ω fatta di insiemi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$ di misura finita $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n è μ_n-singolare, infatti se (A, B) è una partizione con $\mu(A) = 0$ e $\phi(B) = 0$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(A \cap \Omega_n, B \cap \Omega_n)$ è tale che $\mu_n(A \cap \Omega_n) = 0$ e $\phi_n(B \cap \Omega_n) = 0$. Dunque utilizzando il punto 1. su ognuna delle ϕ_n rispetto a μ_n con $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

3. Se ϕ è una misura relativa e μ è una misura σ-finita, allora se ϕ è μ-singolare, allora sappiamo che ϕ^+ e ϕ^- sono μ-singolari. Dunque per il punto 2.
$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \frac{\partial \phi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \phi^-}{\partial \mu} = 0 - 0 = 0$$

□

Osservazione 2.40. In realtà si può dimostrare anche l'implicazione inversa, ovvero che una misura relativa, definita su uno spazio misurabile su cui è definita una misura σ-finita μ, con derivata di Radon-Nikodym uguale a 0 (μ-q.o.) è μ-singolare.

Passiamo ora al più importante teorema sulle misure relative.

Teorema 2.41 (Radon-Nikodym)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e sia ϕ una misura relativa μ-assolutamente continua definita su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora per ogni $E \in \mathcal{M}$*
$$\phi(E) = \int_E \frac{\partial \phi}{\partial \mu} d\mu.$$

Proof. 1. Siano μ e ϕ misure finite. Supponiamo che la tesi del teorema sia falsa. Allora esiste un insieme E_0 tale che $\int_{E_0} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} d\mu < \phi(E_0)$. Ne segue che $\mu(E_0) > 0$ per l'assoluta continuità di ϕ (infatti, se fosse $\mu(E_0) = 0$ si avrebbe $\phi(E_0) = 0$). Dato che μ è finita, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che
$$\int_{E_0} (\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon) d\mu < \phi(E_0).$$

Definiamo ora una misura relativa $\tilde{\phi}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tramite
$$\tilde{\phi}(E) := \phi(E) - \int_E (\frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \epsilon) d\mu,$$
per ogni $E \in \mathcal{M}$.

Sia ora (A, B) una decomposizione di Hahn per $\tilde{\phi}$. Dato che $\tilde{\phi}(E_0) > 0$, abbiamo che
$$\tilde{\phi}(A) \geq \tilde{\phi}(A \cap E_0) \geq \tilde{\phi}(A \cap E_0) + \tilde{\phi}(B \cap E_0) = \tilde{\phi}(E_0) > 0$$

e dunque anche $\mu(A) > 0$. Definiamo ora una funzione f tramite $f := \frac{\partial\phi}{\partial\mu} + \epsilon\chi_A$. La funzione f è chiaramente integrabile e inoltre è non negativa. Per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E f d\mu = \int_{E\cap A} (\frac{\partial\phi}{\partial\mu} + \epsilon) d\mu + \int_{E\cap B} \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu \leq \phi(E\cap A) + \phi(E\cap B) = \phi(E),$$

da cui abbiamo che $f \in \mathcal{F}$. In particolare

$$\int_\Omega f d\mu = \int_A (\frac{\partial\phi}{\partial\mu} + \epsilon) d\mu + \int_B \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu > \int_A \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu + \int_B \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu = I$$

e quindi ottengo una contraddizione.

2. Se μ é σ-finita e ϕ è una misura finita allora, fissata una partizione numerabile $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$ di misura finita, ogni ϕ_n è μ_n-assolutamente continua, dato che ϕ_n e μ_n sono restrizioni di ϕ e μ. Dunque per ogni $E \in \mathcal{M}$ si ha che

$$\int_E \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial\phi_n}{\partial\mu_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E\cap\Omega_n} \frac{\partial\phi_n}{\partial\mu_n} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(E\cap\Omega_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(E\cap\Omega_n) = \phi(E)$$

3. Se ϕ è relativa e μ è σ-finita, allora per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\int_E \frac{\partial\phi}{\partial\mu} d\mu = \int_E \frac{\partial\phi^+}{\partial\mu} d\mu - \int_E \frac{\partial\phi^-}{\partial\mu} d\mu = \phi^+(E) - \phi^-(E) = \phi(E),$$

grazie al punto 2. applicato a ϕ^+ e ϕ^-.

□

Dimostriamo ora il seguente fondamentale teorema .

Teorema 2.42 (di Lebesgue)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia ϕ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora esistono un'unica misura μ-assolutamente continua ϕ_a e un'unica misura μ-singolare ϕ_s su $(\Omega, \mathcal{M})$ tali che*

$$\phi(E) = \phi_a(E) + \phi_s(E)$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$.

Proof. Consideriamo il caso in cui ϕ sia una misura finita. Si consideri

$$K := \sup\{\phi(N) | N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0\}.$$

Se $K = 0$, allora ϕ è μ-assolutamente continua. Se $K > 0$, allora esiste una successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi di $\mathcal{M}$ per i quali $\lim_{n\to+\infty} \phi(E_n) = K$. Consideriamo ora l'insieme $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Chiaramente $\mu(E) = 0$ (è unione numerabile di insiemi di misura nulla) e quindi $\phi(E) \leq K$. Tuttavia allo stesso tempo $\phi(E_n) \leq \phi(E)$ per ogni n per la monotonia della misura ϕ, e quindi $K \leq \phi(E)$. Dunque $\phi(E) = K$. Sia ϕ_s la misura definita da $\phi_s(A) := \phi(A \cap E)$ per ogni $A \in \mathcal{M}$ e sia ϕ_a la misura definita da $\phi_a(A) := \phi(A \setminus E)$. È chiaro che entrambe ϕ_s e ϕ_a sono misure finite e inoltre per ogni $A \in \mathcal{M}$

$$\phi(A) = \phi_a(A) + \phi_s(A).$$

Inoltre ϕ_s è μ-singolare dato che $\mu(E) = 0$ e $\phi_s(\Omega \setminus E) = 0$, mentre ϕ_a è μ-assolutamente continua, dato che per ogni N con $\mu(N) = 0$, si ha che $\phi_a(N) = \phi(N \setminus E)$, e quest'ultima non può essere strettamente positiva, altrimenti $\phi(E \cup N)$ sarebbe strettamente maggiore di $\phi(E) = K$ e $\mu(E \cup N) = 0$, contro la definizione di K.

Se ϕ è una misura relativa, sappiamo che essa è rappresentabile come differenza di due misure finite $\phi_1 - \phi_2$ e quindi basta considerare le misure $\phi_{1a} - \phi_{2a}$ e $\phi_{1s} - \phi_{2s}$ ottenute tramite la costruzione appena illustrata nei casi di ϕ_1 e ϕ_2, dopo aver notato che la differenza di misure μ-assolutamente continue è μ-assolutamente continua, e la differenza di misure μ-singolari è μ-singolare (esercizio).

Per quanto riguarda l'unicità, se ϕ si potesse esprimere come $\phi_a + \phi_s$ e $\phi'_a + \phi'_s$, allora $\phi_a - \phi'_a = \phi_s - \phi'_s$ sarebbe una misura sia μ-singolare che μ-assolutamente continua, quindi la misura ovunque nulla. Quindi $\phi_a = \phi'_a$ e $\phi_s = \phi'_s$, da cui segue l'unicità della decomposizione trovata. □

3 Le misure di Lebesgue-Stieltjes

Per tutto ciò che segue consideriamo fissata una funzione

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

non decrescente continua da sinistra. Una tale funzione ha tutti i punti di discontinuità di tipo salto e, dato che ogni salto corrisponde a un intervallo

di lunghezza positiva nel codominio e ognuno di questi intervalli contiene un numero razionale (ed è disgiunto dagli altri), i punti di discontinuità di F non possono essere più che numerabili (dato che $\mathbb{Q}$ è numerabile).

Definizione 3.1. Si pone

$$\mathcal{R}:=\{[a,b)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})|a,b\in\mathbb{R},a<b\}\cup\{\emptyset\}\,.$$

e inoltre si pone la seguente

Definizione 3.2. La funzione $m_F\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ è definita da

$$m_F([a,b)):=F(b)-F(a).$$

Ovviamente $\mathcal{R}$ non è una σ-algebra, nè un'algebra, tuttavia abbiamo la seguente

Proposizione 3.3. *Se $[a,b)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n)$ dove gli $[a_n,b_n)$ sono a due a due disgiunti, allora*

$$m_F([a,b))=\sum_{n\in\mathbb{N}}m_F([a_n,b_n)).$$

Proof. Per ogni n, $\sum_{k=0}^{n}m_F([a_k,b_k))\leq m_F([a,b))$. Supponiamo infatti che i (finiti) intervalli considerati siano dati in modo che $b_k\leq a_{k+1}$ per ogni $k=0,...,n-1$ (questo non lede la generalità, infatti basta considerare una diversa enumerazione); in tal caso abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{n}m_F([a_k,b_k))=\sum_{k=0}^{n}(F(b_k)-F(a_k))=$$

$$=F(b_n)+\sum_{k=0}^{n-1}(F(b_k)-F(a_{k+1}))-F(a_0)\leq F(b)-F(a)$$

grazie al fatto che F è non descrescente. Passando al limite per $n\to\infty$, abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty}m_F([a_k,b_k))\leq m_F([a,b)).$$

Fissiamo ora $\varepsilon>0$. Grazie alla continuità da sinistra esistono $\bar{b}<b$ e $\bar{a}_n<a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ tali che $F(\bar{b})\geq F(b)-\varepsilon$ e $F(\bar{a}_n)\geq F(a_n)-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ per $n\in\mathbb{N}$.

Dato che $[a, \bar{b}]$ è compatto e $\{(\bar{a}_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un suo ricoprimento, esiste k tale che $\{(\bar{a}_n, b_n)\}_{n=0,...,k}$ è un ricoprimento di $[a, \bar{b}]$. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $b_n < b_{n+1}$ per $n = 0, ..., k-1$. Inoltre si ha che $b_n \geq \bar{a}_{n+1}$ per ogni $n = 0, ..., k-1$. Abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{k}(F(b_n) - F(\bar{a}_n)) = F(b_k) + \sum_{n=0}^{k-1}(F(b_n) - F(\bar{a}_{n+1})) - F(\bar{a}_0) \geq F(\bar{b}) - F(a),$$

grazie al fatto che F è non decrescente. Da questo in particolare segue che

$$F(\bar{b}) - F(a) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(F(b_n) - F(\bar{a}_n))$$

da cui si ha che

$$F(b) - F(a) \leq F(\bar{b}) - F(a) + \epsilon \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(F(b_n) - F(\bar{a}_n)) + \epsilon \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(F(b_n) - F(a_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) + \varepsilon \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(F(b_n) - F(a_n)) + 2\varepsilon,$$

da cui per l'arbitrarietà di ε si ottiene che

$$m_F([a, b)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_F([a_n, b_n)).$$

□

Procediamo ora con la seguente

Definizione 3.4. Si definisce la funzione $\mu_F^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tramite

$$\mu_F^*(E) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} m_F(I_n) |\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ \ I_n \in \mathcal{R}\ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\right\},$$

per $E \subseteq \mathbb{R}$.

Osservazione 3.5. La definizione precedente è ben posta, infatti per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$, la famiglia $\{[-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ricopre E ed è composta da elementi di $\mathcal{R}$.

Abbiamo la seguente

Proposizione 3.6. *μ_F^* è una misura esterna.*

Proof. $\mu^*(\emptyset) = 0$ infatti basta considerare il ricoprimento con tutti gli $I_n = \emptyset$. Inoltre se $A \subseteq B$, ogni ricoprimento di B è anche un ricoprimento di A, e dunque $\mu_F^*(A) \leq \mu_F^*(B)$. Per quanto riguarda la subadditività supponiamo che $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e, grazie alla definizione di estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$, prendiamo una famiglia $\{I_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{R}$ tale che

$$E_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n$$

e

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m_F(I_k^n) \leq \mu_F^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Possiamo ora considerare il ricoprimento numerabile di E dato da $\{I_k^n\}_{k,n\in\mathbb{N}}$. Abbiamo che

$$\mu_F^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} m_F(I_k^n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu_F^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F^*(E_n) + 2\epsilon,$$

e dunque per l'arbitrarietà di ϵ, abbiamo che

$$\mu_F^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F^*(E_n).$$

□

Ricordiamo il seguente teorema senza riportare la dimostrazione.

Teorema 3.7 (di Caratheodory). *Sia μ^* una misura esterna su un insieme X e sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra definita da*

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X |\ \text{per ogni } E \subseteq X,\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)\},$$

allora $(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$ è uno spazio di misura.

Definizione 3.8. La *misura di Lebesgue-Stieltjes* per F, μ_F, è definita da $\mu_F := \mu_F^*|_{\mathcal{M}_F}$ dove $\mathcal{M}_F$ è la σ-algebra definita nel teorema precedente in relazione alla misura esterna μ_F^*.

Riportiamo anche la seguente proposizione senza dimostrazione.

Proposizione 3.9. *$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$ e $\mu_F|_{\mathcal{R}} = m_F$.*

Abbiamo anche la seguente

Proposizione 3.10. *Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu_F(\{x_0)\}) = 0$ se e solo se F è continua in x_0.*

Proof. Dato che $\mu_F(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \mu_F([x_0, x_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} F(x) - F(x_0)$ e dato che F è continua a sinistra, sappiamo che $\mu_F(\{x_0\}) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$ se e solo se F é continua in x_0. □

Passiamo ora a due esempi.

Esempio 3.11. Nel caso in cui $F = id_{\mathbb{R}}$, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Esempio 3.12. Nel caso in cui $F = \chi_{(0,+\infty)}$, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_0)$. Procediamo per gradi.

Innanzitutto è chiaro che per ogni $I \in \mathcal{R}$, $m_F(I) = 1$ se e solo se $0 \in I$.

Inoltre abbiamo che

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ([-(n+1), -n)) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n+1, n+2)$$

e dato che nessuno di questi intervalli contiene lo 0, abbiamo che $\mu_F^*(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$. Da questo otteniamo per monotonia che per ogni $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ che non contiene 0 si ha che $\mu_F^*(E) = 0$, dato che $E \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'altra parte si ha che ogni ricoprimento di $\{0\}$ fatto da insiemi di $\mathcal{R}$ contiene almeno un intervallo I che contiene 0 e quindi tale che $m_F(I) = 1$. Quindi $\mu_F^*(\{0\}) \geq 1$. Inoltre se I é un intervallo che contiene 0, allora si può considerare il ricoprimento $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dato da $I_0 = I$ e $I_{n+1} = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui si ottiene che $\mu_F^*(\{0\}) \leq 1$, da cui $\mu_F^*(\{0\}) = 1$.

Supponiamo ora che $E \subseteq \mathbb{R}$ contenga 0. Allora da una parte per monotonia

$$1 = \mu_F^*(\{0\}) \leq \mu_F^*(E)$$

e dall'altra per subadditivitá

$$\mu_F^*(E) \leq \mu_F^*(E \setminus \{0\}) + \mu_F^*(\{0\}) = \mu_F^*(\{0\}) = 1.$$

Quindi $\mu_F^*(E) = 1$.

Ora si vede subito, per definizione della σ-algebra di Caratheodory, che $\mathcal{M}_F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e che, quindi, $\mu_F = \mu_F^* = \delta_0$.