1

Ω è un insieme misurabile.

In realtà, $L^p(\Omega)$ è lo spazio delle classi di funzioni uguali tra loro q.o.

IV.2. Definizione e proprietà elementari degli spazi L^p

Definizione. Sia $p \in \mathbf{R}$ con $1 \leqslant p < \infty$; poniamo

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \,;\, f \text{ misurabile e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

e

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu\right]^{1/p}$$

Verificheremo in seguito che $\|\ \|_p$ è una norma.

Definizione. Poniamo

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ misurabile ed esiste una costante} \\ C \text{ tale che } |f(x)| \leqslant C \text{ q.o. in } \Omega \end{array} \right\}$$

e

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname{Inf} \{C ;\ |f(x)| \leqslant C \quad \text{q.o. in } \Omega\} .$$

La seguente osservazione implica che $\|\ \|_\infty$ è una norma .

OSSERVAZIONE 1. – Se $f \in L^\infty$, allora si ha

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Infatti, esiste una successione C_n tale che $C_n \to \|f\|_\infty$ e, per ogni n, $|f(x)| \leqslant C_n$ q.o. in Ω. Pertanto $|f(x)| \leqslant C_n$ per ogni $x \in \Omega \setminus E_n$ con $|E_n| = 0$. Poniamo $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, in modo che $|E| = 0$ e

$$|f(x)| \leqslant C_n \quad \forall n, \quad \forall x \in \Omega \setminus E ;$$

ne segue che $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \quad \forall x \in \Omega \setminus E$.

Notazione. Sia $1 \leqslant p \leqslant \infty$; denotiamo con p' **l'esponente coniugato**, cioè, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Teorema IV.6 (Disuguaglianza di Hölder). *Supponiamo che $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Allora $fg \in L^1$ e*

(1) $$\int |fg| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_{p'} ,$$

DIMOSTRAZIONE. – La conclusione è ovvia se $p = 1$ o $p = \infty$; perciò supponiamo che $1 < p < \infty$. Ricordiamo la **disuguaglianza di Young.**

(2) $$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \qquad \forall a \geqslant 0 , \quad \forall b \geqslant 0^{(1)} ;$$

(1) Talvolta è conveniente utilizzare la forma $ab \leqslant \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'}$ con $C_\epsilon = \epsilon^{-1/(p-1)}$

2

la disuguaglianza (2) è conseguenza della concavità della funzione log su $(0, \infty)$:

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab \, .$$

Si ha:

$$|f(x)\, g(x)| \leqslant \frac{1}{p}\, |f(x)|^p + \frac{1}{p'}\, |g(x)|^{p'}, \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \, .$$

Ne segue che $fg \in L^1$ e

$$\text{(3)} \qquad \int |fg| \leqslant \frac{1}{p}\, \|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\, \|g\|_{p'}^{p'} \, .$$

Sostituendo f con λf $(\lambda > 0)$ nella (3), si ottiene

$$\text{(4)} \qquad \int |fg| \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p}\, \|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'}\, \|g\|_{p'}^{p'} \, .$$

Scegliendo $\lambda = \|f\|_p^{-1} \cdot \|g\|_p^{p'/p}$ (in modo da minimizzare il secondo membro della (4)), si ha (1).

OSSERVAZIONE 2. – E' utile ricordare la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Hölder:

Siano $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funzioni tali che

$$f_i \in L^{p_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leqslant 1 \, .$$

Allora il prodotto $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ appartiene a L^p e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1}\, \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_k\|_{p_k} \, .$$

In particolare se $f \in L^p \cap L^q$ con $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, allora $f \in L^r$

per ogni r tale che $p \leqslant r \leqslant q$ e sussiste la seguente "disuguaglianza di interpolazione":

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\alpha}\, \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \text{ove} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \, .$$

Teorema IV.7. – ***L^p è uno spazio vettoriale e $\|\ \|_p$ è una norma per ogni p tale che $1 \leqslant p \leqslant \infty$.***

DIMOSTRAZIONE. – I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono noti. Perciò supponiamo $1 < p < \infty$ e siano $f, g \in L^p$. Si ha

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \, .$$

Di conseguenza $f + g \in L^p$. D'altra parte si ha

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^{p-1}\, |f+g| \leqslant \int |f+g|^{p-1}\, |f| + \int |f+g|^{p-1} |g| \, .$$

Ma $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$ e, per la disuguaglianza di Hölder, risulta

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p) \, ,$$

cioè $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Teorema IV.8 (Fisher-Riesz). – ***L^p è uno spazio di Banach per ogni p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.***

DIMOSTRAZIONE. – Distinguiamo i casi $p = \infty$ e $1 \leqslant p < \infty$.

1) Caso $p = \infty$. Sia (f_n) una successione di Cauchy in L^∞. Dato un intero $k \geqslant 1$, esiste un intero N_k tale che $\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$, per $m, n \geqslant N_k$.

Pertanto esiste un insieme trascurabile E_k tale che

3

(5) $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall m, n \geq N_k$.

Posto $E = \bigcup_k E_k$ – in modo che E è trascurabile – allora, per ogni $x \in \Omega \setminus E$, la successione $f_n(x)$ è di Cauchy (in **R**). Così $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in \Omega \setminus E$. Passando al limite in (5) per $m \to \infty$, si ottiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \geq N_k .$$

Si deduce perciò che $f \in L^\infty$ e $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$; per cui $f_n \to f$ in L^∞.

2) Caso $1 \leq p < \infty$. Sia (f_n) una successione di Cauchy in L^p. Per concludere è sufficiente determinare una sottosuccessione convergente in L^p.

Sia (f_{n_k}) una sottosuccessione tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1$$

[Si procede come segue: si sceglie n_1 tale che $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}$ $\forall m, n \geq n_1$; poi si sceglie $n_2 > n_1$ tale che $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^2}$ $\forall m, n \geq n_2$, e così via...].

Verifichiamo che f_{n_k} converge in L^p.

Per semplificare le notazioni, scriviamo f_k in luogo di f_{n_k}, in modo che

(6) $$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1 .$$

Sia

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

in modo che

$$\|g_n\|_p \leq 1 .$$

Per il teorema della convergenza monotona, $g_n(x)$ tende a un limite finito $g(x)$, q.o. in Ω, con $g \in L^p$. D'altra parte, per $m \geq n \geq 2$ si ha

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq$$
$$\leq g(x) - g_{n-1}(x) .$$

Ne segue che, q.o. in Ω, $f_n(x)$ è di Cauchy e converge ad un limite finito, diciamo $f(x)$. Si ha q.o. in Ω

(7) $$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{per } n \geq 2 ,$$

e in particolare $f \in L^p$.

Infine concludiamo, grazie al teorema di Lebesgue, che $\|f_n - f\|_p \to 0$, dato che $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ q.o. e inoltre $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$.

Teorema IV.9. – *Sia (f_n) una successione in L^p e sia $f \in L^p$ tale che $\|f_n - f\|_p \to 0$. Allora esistono una sottosuccessione (f_{n_k}) e una funzione $h \in L^p$ tali che*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.o. in Ω*

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$, *q.o. in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. – La conclusione è ovvia se $p = \infty$. Così supponiamo $1 \leq p < \infty$. Poiché (f_n) è una successione di Cauchy, possiamo procedere come nella dimostrazione del teorema IV.8 e considerare una sottosuccessione (f_{n_k}) – indicata con f_k – soddisfacente (6), tale che $f_k(x)$ tende q.o. ad un limite $f^*(x)$[1] con $f^* \in L^p$. Inoltre per la (7) si ha $|f^*(x) - f_k(x)| \leq g(x)$ $\forall k$, q.o. in Ω con $g \in L^p$.

Convergenza dominata $\Rightarrow f_k \to f^*$ in L^p
Dunque $f = f^*$ q.o. Inoltre risulta
$|f_k(x)| \leq |f^*(x)| + g(x)$ da cui la tesi.