Equazioni d'evoluzione non lineari e applicazioni

- **21.01 mattino (2)** Definizione di operatore multivoco. Dominio, immagine, grafico. Operatore monotono. Operatore multivoco inverso, combinazione lineare di operatori, relazione d'ordine fra operatori con l'inclusione delle immagini. Caso degli operatori lineari. Esempi: funzioni e grafi multivoci da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, operatore di proiezione su un convesso chiuso, operatore identità meno contrazione larga, operatore derivata in $L^2(0,1)$ con dominio ad hoc, operatore $u' + u^3$ con commento sul problema di Cauchy per la ODE, operatore $-\Delta$ in $L^2(\Omega)$ con condizioni di Dirichlet o di Neumann omogenee, operatore p-laplaciano in $W_0^{1,p}(\Omega)$, estensione di un operatore A in E allo spazio $L^p(S;E)$.

- **21.01 pomeriggio (1)** Caratterizzazione operatori monotoni in spazi di Hilbert con disuguaglianza per $I+\lambda A$. Operatori massimali monotoni: definizione, caratterizzazione massimalità, commento per A^{-1} e λA, lemma importante di identificazione grazie al $\limsup$, caratterizzazione operatori massimali monotoni in spazi di Hilbert.

- **3.02 mattino (2)** Controllo massimale monotonia per alcuni esempi: operatore derivata in $L^2(-1,1)$ con dominio ad hoc, operatore $-\Delta$ in $L^2(\Omega)$ con condizioni di Neumann omogenee, estensione dell'operatore A massimale monotono in uno spazio di Hilbert H allo spazio $L^2(S;H)$. Richiami su funzioni convesse proprie s.c.i. in uno spazio di Banach E. Caratterizzazione con epigrafico. Funzione coniugata. Esempi: $p^{-1}|x|^p$, funzioni con dominio limitato, $\|x\|$ in generale, funzioni indicatrici di un convesso chiuso. Enunciato per φ^* propria e come conseguenza funzioni convesse proprie s.c.i. sono minorate da funzioni affini.

- **3.02 pomeriggio (2)** Enunciato del teorema di Fenchel-Moreau. Esempi di funzioni con biconiugata: $p^{-1}|x|^p$ facendo anche tendere p a 1, ancora funzione $\|x\|$ in generale, coniugata di una retta in $\mathbb{R}$ e coniugata della funzione indicatrice di un punto. $\varphi \le \psi$ implica $\psi^* \le \varphi^*$. Esistenza del minimo per funzioni convesse proprie s.c.i. e coercive: traccia della dimostrazione. Sottogradienti e operatore sottodifferenziale. Se x è minimo di φ, allora $0 \in \partial\varphi(x)$; $D(\partial\varphi) \subseteq D(\varphi)$; se $y \in \partial\varphi(x)$ allora $\langle y, x\rangle = \varphi(x) + \varphi^*(y)$. Controllo che $\partial\varphi$ è un operatore monotono. In uno spazio di Hilbert, $\partial\varphi$ è un operatore massimale monotono: dimostrazione con lemma relativo, di cui comincio a provare una implicazione.

- **5.02 mattino (2)** Prova anche dell'altra implicazione del lemma che serve per dimostrare massimale monotonia di $\partial\varphi$. Operatori monotoni univoci ovunque definiti ed emicontinui sono massimali monotoni. Operatore risolvente e le sue proprietà: in particolare $J_\lambda x$ converge alla proiezione di x sulla chiusura del dominio di A, che è un insieme convesso. Approssimata Yosida di A e sue proprietà: $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, A_λ è monotono e lipschitziano di costante $1/\lambda$, composizione di approssimate Yosida è ancora un'approssimata Yosida, convergenza o non convergenza di $A_\lambda x$ e di $\|A_\lambda x\|$ a seconda che x appartenga o meno a $D(A)$.

- **5.02 pomeriggio (2)** Richiami vari su funzioni a valori in spazi di Banach: funzioni semplici e miserabili, funzioni misurabili, funzioni integrabili, integrale, teoremi di Lebesgue e di Bochner, spazi $L^p(S;E)$, spazi $C^k([0,T];E)$ e $\mathcal{D}(0,T;E)$, densità, derivata generalizzata o nel senso delle distribuzioni con caratterizzazione ed effettiva estensione di derivata classica.

- **17.02 mattino (2)** Spazi $L^p(0,T;E)$ e spazi $C^k([0,T];E)$: inclusioni fra spazi di questo tipo, particolareggiando anche gli spazi E come spazi di funzioni definite su $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Richiami alla derivata generalizzata o nel senso delle distribuzioni. Spazi $W^{1,p}(0,T;E)$, inclusioni in spazio $C^0([0,T];E)$, spazi $W^{k,p}(0,T;E)$ e $H^k(0,T;W)$ con W Hilbert, esplicitazioni per W del tipo $H^m(\Omega)$. Spazi $BV(0,T;E)$ e $AC([0,T];E)$ con le loro proprietà; derivate q.o. e relazioni con $W^{1,p}(0,T;E)$. Operatori ciclicamente monotoni, definzione e proprietà; sottodifferenziali di convesse proprie s.c.i. sono ciclicamente monotoni.

- **17.02 pomeriggio (2)** Operatori ciclicamente monotoni si caratterizzano come operatori monotoni contenuti in sottodifferenziali di convesse proprie s.c.i.: teorema relativo con dimostrazione. Approssimata Yosida di $A = \partial\varphi$ è un operatore ciclicamente monotono. Introduzione della funzione convessa e Fréchet-differenziabile φ_λ il cui sottodifferenziale coincide con l'approssimata Yosida di $\partial\varphi$: dimostrazione delle varie proprietà.

- **18.02 mattino (2)** Funzione convessa φ_λ cresce al decrescere di $\lambda > 0$. L'operatore inverso di un sottodifferenziale di convessa propria s.c.i. è il sottodifferenziale della coniugata, con dimostrazione. Operatori massimali monotoni in $\mathbb{R}$ sono tutti sottodifferenziali di convesse proprie s.c.i.: esempi di indicatrice di un punto, retta, grafo di Heaviside, sottodifferenziale di $[-1,1]$, potenziale logaritmico individuando per i vari casi risolvente ed approssimata Yosida. Funzione indicatrice di un convesso chiuso di spazio di Hilbert: caratterizzazione del sottodifferenziale e del risolvente, approssimata Yosida.

- **18.02 pomeriggio (2)** Esempio di $-\Delta$ (con condizioni di Neumann omogenee) come operatore ciclicamente monotono e anche massimale: allora è un sottodifferenziale della funzione quadratica nel gradiente; controlli ed osservazioni. Integrando convesso: controllo proprietà di convesso, proprio, s.c.i. e caratterizzazione del sottodifferenziale come sottodifferenziale della funzione di partenza per la relazione di inclusione q.o. Inizio del problema di Cauchy per equazione di evoluzione autonoma: non possiamo aspettarci regolarità C^1 con esempio, regolarità della soluzione che cerchiamo, dipendenza continua dai dati iniziali e unicità.

- **25.02 mattino (2)** Teorema di esistenza, unicità, regolarità per la soluzione del problema di Cauchy per equazione di evoluzione $u' + Au \ni 0$ quando il dato u_0 appartiene a $D(A)$. Dimostrazione dell'esistenza passando per il problema approssimato $u' + A_\lambda u = 0$ e provando convergenza uniforme, $u(t) \in D(A)$ per ogni $t \geq 0$, stima uniforme per $\|u'(t)\|$, equazione soddisfatta q.o. in $(0,T)$. Proprietà di semigruppo e semigruppi continui di contrazioni non lineari.

- **25.02 pomeriggio (2)** Ancora semigruppi: caso in cui $0 \in A(0)$, estensione del concetto di soluzione per $u_0 \in \overline{D(A)}$, approssimabilità tramite $u' + A_\lambda u = 0$ nel caso di $u_0 \in \overline{D(A)}$. Effetto regolarizzante nel caso in cui A è sottodifferenziale di una funzione convessa propria

s.c.i.: proposizione relativa e prova della stima $\|A^0u(t)\| \leq \|A^0v\| + \|u_0 - v\|/t$ per $v \in D(A)$. Enunciati lemmi di Gronwall e prova di quello particolare con maggiorazione semplice che non fa intervenire l'esponenziale.

- **11.03 mattino (2)** Equazione $u' + Au \ni f$ con secondo membro f non nullo: soluzioni forti e deboli, lemma con le stime di tipo contrattivo per le soluzioni deboli, teorema di esistenza – unicità – dipendenza continua delle soluzioni deboli $u \in C^0([0,T];H)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $u_0 \in \overline{D(A)}$ e secondo membro $f \in L^1(0,T;H)$. L'operatore che a f data in $L^2(0,T;H)$ associa la soluzione debole del problema di Cauchy con dato iniziale u_0 fissato è massimale monotono. Osservazioni su condizioni equivalenti alla proprietà "u è soluzione forte" e condizioni sufficienti ad avere una soluzione forte del problema di Cauchy (senza dimostrazioni).

- **11.03 pomeriggio (2)** Caso $A = \partial\varphi$ con φ convessa propria s.c.i.: abbiamo una soluzione forte in condizioni di maggiore generalità su u_0 ed f. Lemma di un certo interesse per stabilire assoluta continuità di $\varphi(u)$ in $[0,T]$ e rappresentare la sua derivata quasi ovunque. Teorema: se $u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)}$ e $f \in L^2(0,T;H)$ allora la soluzione u è forte e in particolare $u \in W^{1,2}(\delta,T;H)$ per ogni $\delta \in (0,T)$ e $\varphi(u) \in L^1(0,T)$; se inoltre $u_0 \in D(\varphi)$ allora $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ e $\varphi(u) \in L^\infty(0,T)$.

- **13.03 mattino (2)** Esempio della rotazione di $\pi/2$ in $\mathbb{R}^2$ come operatore massimale monotono che non è ciclicamente monotono; impostazione del problema di Cauchy relativo e considerazioni sulle soluzioni deboli che sono in realtà forti. Esempio dell'operatore $u \mapsto -\Delta u + \beta(u)$ in $L^2(\Omega)$ con β grafo massimale monotono tale che $0 \in \beta(0)$. Prova che tale operatore è sottodifferenziale di un'opportuna funzione convessa propria s.c.i.: è incluso nel sottodifferenziale ed è anche massimale perché l'immagine di identità più operatore è tutto $L^2(\Omega)$. Inizio della lunga dimostrazione con doppia approssimazione di β, applicazione del teorema di punto fisso di Schauder, prova delle stime uniformi.

- **13.03 pomeriggio (2)** Fine della lunga dimostrazione di cui sopra con due passaggi al limite ad ottenere la soluzione del problema con β. Equazione di Allen-Cahn: posizione del problema, presentazione modellistica dell'equazione sia nel caso di potenziali regolari che singolari, energia che decresce, considerazioni su tale energia. Risoluzione dell'equazione nel caso generale applicando un argomento di punto fisso sulla perturbazione lipschitziana e usando il teorema delle contrazioni iterate. Avevo preparato anche l'esempio del problema di Stefan come equazione d'evoluzione per un operatore massimale monotono in $H^{-1}(\Omega)$, ma non ho avuto tempo per presentarlo: le note complessive sono comunque disponibili sulla pagina web.