

# APPUNTI SULLE SERIE DI FOURIER



Joseph Fourier  
(1768-1830)



Lipót Fejér  
(1880-1959)



Willard Gibbs  
(1839-1903)

Note per il corso di

Complementi di Analisi Matematica di Base  
Laurea triennale in Fisica - A. A. 2007-8



*Gianni A. Pozzi*

29/8/2007



# Indice

1	Serie trigonometriche.....	1
2	Serie di Fourier.....	12
3	Il fenomeno di Gibbs.....	20
3.1	Due esempi preliminari.....	21
3.2	Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs.....	28
4	Somme di Fejér.....	33
5	Cenni sulla teoria in $L^2$ .....	44
5.1	Serie di Fourier in $L^2(-\pi, \pi)$ .....	44
5.2	Verso la trasformata di Fourier.....	51
6	Qualche applicazione.....	60
6.1	Somma di serie numeriche.....	60
6.2	L'equazione del calore unidimensionale.....	63
	<b>Indice analitico</b> .....	<b>81</b>



## 1 Serie trigonometriche.

Le *serie trigonometriche* sono particolari *serie di funzioni*, costruite a partire dalle funzioni trigonometriche elementari  $\{\sin nx, \cos nx\}$ , che risultano estremamente utili in moltissime applicazioni: *ad esempio* –ma non soltanto: si veda il **Paragrafo 6**– nell’analisi di *fenomeni periodici*.

Cominciamo con l’introdurre la nozione di *polinomio trigonometrico*:

**Definizione 1.1** Si dice **polinomio trigonometrico** ogni funzione  $s_n$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  della forma

$$(1) \quad s_n(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

dove  $n$  è un intero  $\geq 0$  fissato. I numeri complessi  $a_0$  e  $a_k, b_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) sono i **coefficienti** del polinomio trigonometrico. Il polinomio si dice **reale** quando tutti i suoi coefficienti sono reali (ed allora, evidentemente,  $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Se i coefficienti  $a_n, b_n$  di indice massimo non sono entrambi nulli, si dice che il polinomio ha **grado**  $n$ . ■

La terminologia usata deriva dal fatto che, grazie alle formule di DE MOIVRE e del binomio di NEWTON, si ha

$$\cos kx + i \sin kx = (\cos x + i \sin x)^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} i^h \sin^h x \cos^{k-h} x,$$

dunque, posto  $t_1 := \cos x, t_2 := \sin x$ ,<sup>1</sup>

$$\cos kx = \sum_{h=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2h} (-1)^h t_1^{k-2h} t_2^{2h}; \quad \sin kx = \sum_{h=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k}{2h+1} (-1)^h t_1^{k-2h-1} t_2^{2h+1};$$

quindi un polinomio trigonometrico di grado  $n$  è in effetti un *polinomio*  $P_n(t_1, t_2)$  di grado  $n$  nelle variabili  $t_1 = \cos x, t_2 = \sin x$ .

È chiaro che ogni polinomio trigonometrico  $s_n$  è una funzione *indefinitamente derivabile*, e  $2\pi$ -**periodica** (cioè tale che  $s_n(x + 2\pi) = s_n(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ): ovviamente, *non è detto* che  $2\pi$  sia il *minimo* periodo positivo.

Una proprietà, immediata ma notevole, del sistema  $\{\sin nx, \cos nx\}$ :

**Proposizione 1.1** Per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$ , valgono le **relazioni di ortogonalità**

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \delta_{n,m}; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \delta_{n,m},$$

dove  $\delta_{n,m}$  è il simbolo di KRONECKER, definito da  $\delta_{n,n} := 1$ , e  $\delta_{n,m} := 0$  se  $m \neq n$ .

<sup>1</sup>  $[x]$  indica la *parte intera* di  $x \in \mathbb{R}$  ( $[x] \in \mathbb{Z}$ , e  $[x] \leq x < 1 + [x]$ ).

**Dim.:** basta integrare tra  $-\pi$  e  $\pi$  le identità di WERNER, valide  $\forall(m, n \in \mathbb{N})$ ,

$$\begin{aligned}\sin nx \sin mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x), \\ \sin nx \cos mx &= \frac{1}{2} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x), \\ \cos nx \cos mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x). \blacksquare\end{aligned}$$

Grazie a queste proprietà di ortogonalità, si ricava immediatamente che se  $s_n(x)$  è il polinomio trigonometrico dato dalla (1), i suoi coefficienti sono *determinati* dalle formule seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cos kx \, dx & (k = 0, 1, \dots, n); \\ b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \sin kx \, dx & (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Se il polinomio trigonometrico (1) è reale, si può anche scrivere nella forma

$$(4) \quad s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(kx + \vartheta_k) :$$

basta porre  $A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ , e definire  $\vartheta_k$ , per  $A_k \neq 0$ , mediante le relazioni  $\cos \vartheta_k := a_k/A_k$ ,  $\sin \vartheta_k := -b_k/A_k$  (se  $A_k = 0$ , il valore di  $\vartheta_k$  è irrilevante); il passaggio inverso, dalla (4) alla (1), si effettua ponendo  $a_k := A_k \cos \vartheta_k$ , e  $b_k := -A_k \sin \vartheta_k$ .  $A_k$  e  $\vartheta_k$  si dicono, rispettivamente, **ampiezza** e **fase** della  $k$ -esima armonica di  $s_n(x)$ .

Un'altra scrittura *equivalente* di un polinomio trigonometrico, che risulta spesso utile *anche nel caso reale*, si ricava utilizzando *esponenziali complesse*. Grazie alle formule di EULERO, si ha infatti, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ikx};$$

quindi, posto

$$(5) \quad c_0 := \frac{1}{2} a_0; \quad c_k := \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} := \frac{1}{2} (a_k + ib_k) \quad (k = 1, \dots, n),$$

la (1) assume la forma

$$(6) \quad s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Per passare dalla (6) alla (1), basta porre  $a_k := c_k + c_{-k}$ ,  $b_k := i(c_k - c_{-k})$  per  $k = 0, 1, \dots, n$ . Si osservi che il polinomio (1) è reale se e solo se, scritto nella forma (6), si ha

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Il sistema delle esponenziali complesse verifica le **relazioni di ortogonalità**:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} \, dx = \delta_{m,n},$$

di verifica immediata. Se  $s_n(x)$  è scritto nella forma (6), valgono quindi le formule seguenti:

$$(7) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx \quad (k = -n, \dots, 0, 1, \dots, n).$$

Risulta naturale a questo punto considerare **serie trigonometriche**, cioè serie di funzioni della forma

$$(8) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

In termini di esponenziali, definendo i  $\{c_n\}$  tramite le (5), la (8) si scrive

$$(9) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

ma è indispensabile una precisazione. *Se si vuole che la convergenza della serie (8) sia equivalente alla convergenza della serie (9) (con i  $c_n$  dati dalle (5)), occorre infatti utilizzare il **valore principale** della (9)), definito come il limite (quando esiste) per  $n \rightarrow +\infty$  delle **somme parziali simmetriche**:*

$$\text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

**Osservazione 1.1** *Insistiamo nel sottolineare due circostanze:*

- *L'esistenza del valore principale della serie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$  non implica l'esistenza del limite  $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m}^n c_k e^{ikx}$ : un esempio banale si ha,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , per  $c_0 := 0$ ,  $c_n = 1/n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (si veda l'esempio dopo il **Corollario 1.1**).*
- *analogamente, non è equivalente richiedere che converga la serie che compare nella (8), oppure che convergano entrambe le serie*

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

*Infatti, è ovvio che se le (10) convergono entrambe nel punto  $x \in \mathbb{R}$ , nello stesso punto converge anche la (8); ma la (8) può convergere anche in punti nei quali nessuna delle (10) è convergente. Ad esempio, la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(4n-1)x + \sin(4n-1)x)$$

*ha tutti i termini nulli (quindi converge a zero) per  $x = \pi/4$ , mentre i termini generali delle serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos((4n-1)\pi/4)$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin((4n-1)\pi/4)$  non sono infinitesimi (valgono rispettivamente  $(-1)^n \sqrt{2}/2$  e  $(-1)^{n+1} \sqrt{2}/2$ ). ■*

Il primo problema che si pone è evidentemente di studiare se si possano caratterizzare la convergenza della (8) e le proprietà di regolarità della sua somma tramite condizioni sui coefficienti  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ . È una questione notevolmente complessa; ci limiteremo quindi ad illustrare alcune condizioni *sufficienti* per la convergenza, che utilizzeremo nel seguito.

Un risultato immediato è il seguente:

**Teorema** 1.1 *Se esiste un intero  $k \geq 0$  tale che*

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

*allora la serie (8) converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ ; la sua somma  $s(x)$  è  $2\pi$ -periodica, e  $s \in C^k(\mathbb{R})$ ; inoltre, sono lecite in  $(-\pi, \pi)$  sia l'integrazione per serie, sia la derivazione per serie di  $s$  fino all'ordine  $k$ .*

**Dim.:** per  $k = 0$ , basta applicare il criterio di convergenza di WEIERSTRASS: per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , risulta infatti

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx| \leq |a_n| + |b_n|,$$

e l'ultima quantità è il termine generale di una serie numerica convergente per ipotesi. La serie (8) converge quindi (assolutamente ed) uniformemente in tutto  $\mathbb{R}$  ad una funzione  $s(x)$ , che è evidentemente  $2\pi$ -periodica ed inoltre continua (come limite uniforme di funzioni continue); è quindi lecito integrare per serie su  $(-\pi, \pi)$ .

Per  $k = 1$ , si osservi che la serie delle derivate si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

dunque, ancora per il criterio di WEIERSTRASS, converge uniformemente; la conclusione segue allora dal teorema di derivazione per serie. Infine, per  $k > 1$  la tesi si dimostra facilmente per induzione. ■

Se la serie è scritta nella forma (9), si vede subito che una condizione *equivalente* alla (11) è la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k (|c_n| + |c_{-n}|) < +\infty :$$

basta infatti osservare che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$|a_n| + |b_n| \leq 2(|c_n| + |c_{-n}|) \leq 2(|a_n| + |b_n|).$$

**Osservazione** 1.2 *È intuibile che la condizione (11), già con  $k = 0$ , può risultare eccessivamente restrittiva. Infatti, fornisce esistenza e continuità della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ , mentre, in molte applicazioni, hanno interesse serie trigonometriche la cui somma presenta delle discontinuità.*

*Inoltre, i due esempi che seguono mostrano che i coefficienti  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  non hanno un ruolo perfettamente simmetrico.*

1. *Si consideri la serie (di soli coseni) (8) con  $a_0 = a_n = 1$ ,  $b_n = 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ):*

$$(12) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \dots$$

*Questa serie non converge per nessun  $x \in \mathbb{R}$ . Infatti, se per assurdo convergesse per  $x = x_0$ , il suo termine generale  $\cos nx_0$  dovrebbe essere infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$ . Ma ciò è impossibile, dato che si avrebbe*

$$\cos^2 nx_0 \rightarrow 0, \text{ ma anche } \cos^2 nx_0 = \frac{1 + \cos 2nx_0}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$



2. Si consideri la serie (di soli seni) (8) con  $a_0 = a_n = 0$ ,  $b_n = 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ):

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$$

Supponiamo che la serie converga per  $x = x_0$ ; in particolare,  $\sin nx_0 \rightarrow 0$ , e l'identità

$$\sin(n+1)x_0 - \sin(n-1)x_0 = 2 \sin x_0 \cos nx_0$$

mostra, grazie al risultato precedente, che dev'essere  $\sin x_0 = 0$ : la serie converge (e la sua somma è nulla) se e solo se  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

Prima di illustrare un altro teorema di convergenza, premettiamo la

**Definizione 1.2 (successioni a variazione limitata)** La successione  $\{\alpha_n\}$  si dice a variazione limitata se è convergente la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ . ■

Poiché  $\alpha_n = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \alpha_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ , è chiaro che valgono le proprietà seguenti:

- ogni successione reale monotona (in senso largo) e con limite finito è a variazione limitata; ne segue che lo è anche la differenza di due successioni reali limitate, entrambe non decrescenti (oppure, entrambe non crescenti);
- ogni successione (complessa) a variazione limitata ammette limite finito.

Invece, una successione può avere limite finito (addirittura nullo) ma non essere a variazione limitata: un esempio è dato dalla successione definita da  $\alpha_n := (-1)^n/n$ , che è infinitesima, ma per la quale risulta

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{2}{n+1},$$

da cui si ricava, per confronto con la serie armonica, che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$  è divergente.

Un primo notevole risultato, di portata generale:

**Teorema 1.2** Siano  $\{\alpha_n\}$  una successione numerica ed  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni da  $(a, b)$  in  $\mathbb{C}$ . Se sono verificate le condizioni:

i) le ridotte  $s_n(x)$  della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  sono uniformemente limitate in  $(a, b)$ , cioè

$$\exists M : |s_n(x)| = |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)| \leq M \quad \forall (n \in \mathbb{N}, x \in (a, b));$$

ii)  $\{\alpha_n\}$  è a variazione limitata e infinitesima,

allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n(x)$  converge uniformemente in  $(a, b)$ .

**Dim.:** fissato  $\varepsilon > 0$ , per la prima delle *ii*) esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n > n_\varepsilon$  e per ogni  $r \in \mathbb{N}$  risulti

$$\sum_{k=n+1}^{n+r} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \varepsilon.$$

Dall'*identità di ABEL* (analogo discreto della formula di integrazione per parti)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k f_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k (s_k(x) - s_{k-1}(x)) = \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k s_k(x) - \sum_{k=n}^{n+r-1} \alpha_{k+1} s_k(x) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+r-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) s_k(x) + \alpha_{n+r} s_{n+r}(x) - \alpha_{n+1} s_n(x) \end{aligned}$$

e dalla *i*) segue che, per ogni  $x \in (a, b)$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k f_k(x) \right| \leq M \left( \sum_{k=n+1}^{n+r} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| + |\alpha_{n+r}| + |\alpha_{n+1}| \right) < M (\varepsilon + |\alpha_{n+r}| + |\alpha_{n+1}|).$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n(x)$  verifica allora, grazie anche alla seconda delle *ii*), la condizione di CAUCHY uniformemente su  $(a, b)$ ; ne segue la convergenza uniforme della serie. ■

Per mostrare un'importante applicazione del Teorema precedente, premettiamo qualche proprietà delle *serie di coseni* e delle *serie di seni*, cioè serie trigonometriche rispettivamente della forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx, \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

Osserviamo intanto le seguenti proprietà (di verifica immediata):

- La somma  $f$  di una serie di coseni è definita in un insieme  $I$  *simmetrico* rispetto all'origine, ed è una funzione *pari* ( $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I$ ); ma l'insieme  $I$  può essere vuoto.
- La somma  $g$  di una serie di seni è definita anch'essa in un insieme  $I'$  *simmetrico* rispetto all'origine, ed è *dispari* ( $g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in I'$ ); ma l'insieme  $I'$  di convergenza della serie *non è mai vuoto* (contiene sempre l'insieme  $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , in cui la somma della serie è nulla).

Mostriamo che, fissato ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , le ridotte delle serie (12), (13) sono *uniformemente limitate* quando  $x \in [-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ ; più precisamente, si ha il seguente risultato:

**Lemma 1.1** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), risulta

$$(14) \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}; \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

**Dim.:** consideriamo la progressione geometrica di ragione  $e^{ix}$ ; si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikx} &= 1 + \sum_{k=1}^n \cos kx + i \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-ix/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{-2i \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[ \sin \frac{x}{2} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + i \left( \cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) \right]; \end{aligned}$$

uguagliando parti reali ed immaginarie dei due membri si ottengono le (14). ■

Dal **Teorema 1.2** segue allora che

**Corollario 1.1** Se  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  sono due successioni a variazione limitata ed infinitesime, allora, fissato ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ ,

- i) la serie (8) converge uniformemente in  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n\pi - \varepsilon, 2n\pi + \varepsilon)$ ;  
 ii) la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge uniformemente nell'insieme  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n-1)\pi + \varepsilon, (2n+1)\pi - \varepsilon]$ .

**Dim.:** la prima affermazione è evidente; la seconda segue subito dalla prima con il cambiamento di variabile  $x \mapsto x + \pi$ . ■

In particolare, poiché ogni serie di seni converge (a zero) per  $x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , dalla i) del Corollario precedente si deduce che

se  $\{b_n\}$  è a variazione limitata ed infinitesima, la serie di soli seni  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$  converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

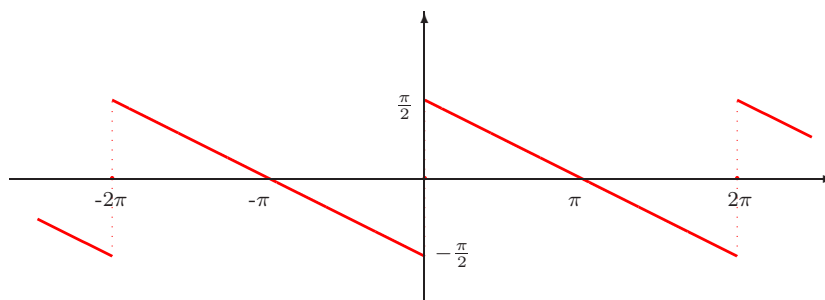
Tuttavia, la sua somma, *continua* in  $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , può presentare delle *discontinuità* per  $x = 2k\pi$ . Ne è un esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots,$$

la cui somma  $f_0(x)$ , come mostreremo più avanti, è data nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  da

$$(15) \quad f_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x + \pi) & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{2}(x - \pi) & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e presenta nell'origine (in generale, nei punti  $x = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ) una *discontinuità di prima specie*:



Si possono però presentare casi ben più complicati (d'altronde, si ricordi l' **Osservazione 1.2**). Esistono infatti serie trigonometriche che (ad esempio...) presentano uno di questi comportamenti nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ :

- la serie converge in  $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  ad una funzione  $C^\infty([-\pi, \pi] \setminus \{0\})$ , mentre *diverge* per  $x = 0$ ;
- la serie converge  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ; la sua somma  $s(x)$  è *limitata*, ma ha una discontinuità di prima specie in *ciascuno* dei punti  $x = \mp 1/n$ , ed una discontinuità di seconda specie per  $x = 0$ ;
- la serie verifica tutte le proprietà del caso precedente, tranne che la sua somma è *illimitata*.

**Osservazione 1.3** Mettiamo in evidenza un'altra differenza tra serie di seni e serie di coseni, per quanto riguarda condizioni equivalenti alla convergenza uniforme:

**Teorema 1.3** Siano  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  due successioni reali non crescenti.

i) La serie di soli coseni

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se e solo se è convergente la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

ii) La serie di soli seni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n b_n = 0$ .

(Le ipotesi implicano evidentemente che le successioni  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  sono infinite-sime).

**Dim.:** i) la condizione esprime la convergenza in  $x = 0$ , quindi è necessaria. Per il **Teorema 1.1** (con  $b_n = 0$ ), è anche sufficiente per la convergenza uniforme della serie di coseni (si osservi che  $a_n \geq 0$ ).

ii): supponiamo che la serie di seni converga uniformemente; posto  $x_n := \pi/(2n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), quando  $k = 1 + [n/2], 2 + [n/2], \dots, n$  si ha  $(\pi/4) < kx_n \leq (\pi/2)$ , quindi

$$\sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^n b_k \sin kx_n \geq b_n \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( n - \left[ \frac{n}{2} \right] \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{4} n b_n \geq 0,$$

perciò  $\lim_n n b_n = 0$ . Reciprocamente, sia  $n b_n \rightarrow 0$ ; allora, posto  $\varepsilon_m := \sup_{k \geq m} k b_k$ , si ha  $\lim_m \varepsilon_m = 0$ . Fissiamo  $x \in (0, \pi]$ , e sia  $N := [\pi/x]$ , cosicché  $\pi/(N+1) < x \leq \pi/N$ . Per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , decomponiamo il resto  $m$ -esimo della serie di seni nel modo seguente:

$$R_m(x) = R_m^{(1)}(x) + R_m^{(2)}(x), \quad \text{dove } R_m^{(1)}(x) := \sum_{k=m+1}^{m+N} b_k \sin kx, \quad R_m^{(2)}(x) := \sum_{k=m+N+1}^{+\infty} b_k \sin kx.$$

Si ha allora

$$|R_{m-1}^{(1)}(x)| = \left| \sum_{k=m}^{m+N-1} x k b_k \frac{\sin kx}{kx} \right| \leq x \sum_{k=m}^{m+N-1} k b_k < x N \varepsilon_m \leq \pi \varepsilon_m,$$

mentre, posto

$$\tilde{D}_n(x) := \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

(si ricordi la formula (14)) si ottiene

$$|R_{m-1}^{(2)}(x)| = \left| \sum_{k=m+N}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) \tilde{D}_k(x) - b_{m+N} \tilde{D}_{m+N-1}(x) \right|,$$

da cui, osservando che  $|\tilde{D}_n(x)| \leq (1/\sin(x/2)) \leq (\pi/x)$ ,

$$|R_{m-1}^{(2)}(x)| \leq 2b_{m+N} \frac{\pi}{x} \leq 2(N+1)b_{m+N} \leq 2\varepsilon_m.$$

La convergenza uniforme della serie di seni ne segue immediatamente. ■

Quando  $\{c_n\}$  è non crescente, la condizione  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$  è strettamente più restrittiva della condizione  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nc_n = 0$ . Per verificare che la prima implica la seconda, basta utilizzare le disuguaglianze, valide per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n > m$ ,

$$0 \leq nc_n = (n-m)c_n + mc_n \leq \sum_{k=m+1}^n c_k + mc_n \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} c_k + mc_n,$$

ed osservare che il primo addendo è il resto  $m$ -esimo di una serie convergente, mentre il secondo (per  $m$  fissato) è infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$ . Invece, la successione (decescente) di termine generale  $c_n := 1/(n \ln n)$  ( $n \geq 2$ ) è tale che  $nc_n \rightarrow 0+$ , mentre la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n$  è positivamente divergente: si ha infatti, per  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} > \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{N+1} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_2^{N+1} \rightarrow +\infty. \blacksquare$$

Utilizziamo ora le proprietà di ortogonalità del sistema  $\{\sin nx, \cos nx\}$  per fornire una risposta (parziale) alla seguente domanda, che si pone in modo del tutto naturale, vista la formula (3):

- la conoscenza della somma di una serie trigonometrica convergente permette di individuarne i coefficienti? •

Naturalmente, la risposta dipende anche dal *tipo di convergenza* che si impone alla serie. Il problema si riconduce a stabilire se una serie trigonometrica che “converge” a zero abbia necessariamente tutti i coefficienti nulli. Ci limitiamo per ora a citare due risultati relativi alla *convergenza puntuale*. Il primo, dovuto a RIEMANN, dà una risposta *affermativa* nel caso in cui la convergenza a zero sia verificata per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus E$ , con  $E$  al più numerabile. Ci si potrebbe aspettare che lo stesso valga anche nel caso della convergenza q.o.; viceversa, MENŠOV ha mostrato che

esiste una serie trigonometrica che converge quasi ovunque a zero, ma i cui coefficienti *non* sono tutti nulli.

Questo risultato, piuttosto sorprendente, mostra che per poter dare una risposta affermativa alla domanda iniziale è indispensabile qualche ipotesi *più forte* della sola convergenza q.o.. Vediamo due condizioni, ciascuna delle quali è sufficiente a garantire che i coefficienti della serie trigonometrica sono individuati *univocamente* dalla sua somma (*avvertiamo che in questi appunti l'integrabilità è sempre intesa nel senso di LEBESGUE*):

**Teorema 1.4** *Se la serie trigonometrica (8)*

*i) converge q.o. ad una funzione  $s(x)$ , e la successione delle sue ridotte è maggiorata in modulo da una funzione integrabile su  $(-\pi, \pi)$ , cioè se*

$$\exists \varphi \text{ integrabile in } (-\pi, \pi) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad |s_n(x)| \leq \varphi(x) \text{ q.o. in } (-\pi, \pi);$$

*oppure*

*ii) converge uniformemente ad  $s(x)$ ,*

*allora i coefficienti  $a_n, b_n$  della serie sono necessariamente dati dalle formule*

$$(16) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, \dots); \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

**Dim.:** *i)*: cominciamo ad osservare intanto che ciascuna delle ipotesi *i)*, *ii)* implica l'integrabilità di  $s(x)$  su  $(-\pi, \pi)$ : nel primo caso, perché risulta  $|s(x)| \leq \varphi(x)$ , nel secondo perché  $s(x)$ , limite uniforme di funzioni continue, è anch'essa continua. Basta allora mostrare che nelle formule (3) si può passare al limite per  $n \rightarrow +\infty$  sotto il segno di integrale. Ciò è in effetti lecito: nel caso *i)*, grazie al Teorema di LEBESGUE sulla convergenza dominata; nel caso *ii)*, per la convergenza *uniforme* di  $\{s_n\}$ . ■

Si osservi che, nelle ipotesi del Teorema precedente, se la serie è scritta nella forma (9) si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-inx} \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Un risultato fondamentale per il seguito è il

**Lemma 1.2 (Riemann-Lebesgue)** *Per ogni funzione  $f$  integrabile sull'intervallo  $(a, b)$ , risulta*

$$(17) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0.$$

**Dim.:** dimostriamo la prima relazione (la dimostrazione della seconda è perfettamente analoga). Il risultato è ovvio se  $f$  è costante ( $= c$ ) in un sottointervallo  $(\alpha, \beta)$  di  $(a, b)$ , e nulla in  $(a, b) \setminus (\alpha, \beta)$ , dato che allora

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| = \left| -\frac{c}{\lambda} [\cos \lambda x]_{\alpha}^{\beta} \right| \leq \frac{2|c|}{|\lambda|},$$

da cui la (17). Ne viene facilmente che la (17) vale anche se  $f$  è una funzione a scala su  $(a, b)$ . Infine, nel caso di una generica  $f$  integrabile, fissato ad arbitrio  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione a scala  $\varphi$  tale che  $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon/2$ ; per quanto appena visto, esiste inoltre  $\lambda_\varepsilon$  tale che  $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \varepsilon/2$  per ogni  $\lambda > \lambda_\varepsilon$ , quindi

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \sin \lambda x \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \varepsilon,$$

cioè la tesi. ■

Ne discende il seguente risultato (che fornisce anche una condizione *necessaria* per la convergenza di una serie trigonometrica):

**Teorema 1.5 (Cantor-Lebesgue)** *Se  $\lim_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$  per tutti gli  $x \in I$ , dove  $I$  è un sottoinsieme di  $[0, 2\pi)$  con misura di Lebesgue positiva, allora  $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ .*

**Dim.:** scriviamo  $a_n \cos nx + b_n \sin nx$  nella forma  $\varrho_n \cos(nx + \alpha_n)$ : la tesi equivale allora ad affermare che  $\lim_n \varrho_n = 0$ . Supponiamo che ciò non sia vero: in tal caso, devono esistere  $\varepsilon > 0$  ed una successione *strettamente crescente*  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  di interi positivi tale che  $\varrho_{n_k} > \varepsilon$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ; ma in  $I$  si deve avere, in particolare, che, per  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\varrho_{n_k} \cos(n_k x + \alpha_{n_k}) \rightarrow 0$ , possibile solo se  $\cos(n_k x + \alpha_{n_k}) \rightarrow 0$ , quindi anche  $\cos^2(n_k x + \alpha_{n_k}) \rightarrow 0$ . Per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, si ha allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_I \cos^2(n_k x + \alpha_{n_k}) dx = 0.$$

Dall'identità

$$\cos^2(n_k x + \alpha_{n_k}) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2n_k x \cos 2\alpha_{n_k} - \sin 2n_k x \sin 2\alpha_{n_k}],$$

per il Teorema precedente, e detta  $\chi$  la funzione caratteristica di  $I$ , si ha

$$\lim_k \int_I \cos 2n_k x dx = \lim_k \int_0^{2\pi} \chi(x) \cos 2n_k x dx = 0,$$

e lo stesso risultato vale per l'integrale su  $I$  di  $\sin 2n_k x$ . Ne segue facilmente che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_I \cos^2(n_k + \alpha_{n_k}) dx = \frac{1}{2} m(I),$$

dunque, per quanto visto più sopra,  $m(I) = 0$ : ma ciò è contrario all'ipotesi. ■

## 2 Serie di Fourier.

In molte applicazioni, ha notevole interesse il seguente problema (in un certo senso *inverso* a quello di studiare la convergenza di una *assegnata* serie trigonometrica):

- *data una funzione  $f$ ,  $2\pi$ -periodica da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ , stabilire se esiste una serie trigonometrica di cui  $f$  è la somma.* •

Si tratta cioè di dare condizioni su  $f$  affinché esistano delle costanti complesse  $a_0, a_n, b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) tali che la serie (8) non solo sia *convergente*, ma converga *proprio* ad  $f(x)$ .

Quando ciò accade, si dice che  $f$  è **svilupabile in serie di Fourier**. Se inoltre è verificata una delle ipotesi del **Teorema 1.4**, i coefficienti della serie trigonometrica sono individuati in modo *univoco* da  $f$  (sono dati dalle (16)), il che autorizza a definire tale serie come **la serie di Fourier di  $f$** .

Osserviamo tuttavia che se  $f$  è una *qualunque* funzione integrabile su  $(-\pi, \pi)$ , gli integrali che compaiono nelle (16) esistono e sono *finiti*, quindi è sempre possibile considerare la serie trigonometrica con coefficienti dati dalle (16):

**Definizione 2.1** Indichiamo con  $L_{\#}^1$  l'insieme delle funzioni  $f$  (a valori reali o complessi), definite su  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodiche (quasi ovunque), ed integrabili su  $(-\pi, \pi)$ . Fissata  $f \in L_{\#}^1$ , i numeri

$$(18) \quad \begin{cases} a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, \dots); \\ b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

si dicono **costanti di Fourier** di  $f$  rispetto al sistema delle funzioni trigonometriche (per il **Lemma 1.2**,  $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ ). La serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

con i coefficienti dati dalle (18) si dice **serie di Fourier associata ad  $f$** , e si scrive

$$(19) \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

In termini di esponenziali complesse, le relazioni precedenti si scrivono

$$f(x) \sim \text{v.p.} \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \text{dove} \quad \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

(si ricordi l'**Osservazione 1.1**). ■

Una precisazione *essenziale*: nella (19) non si è usato il segno di uguaglianza, ma un simbolo particolare,  $(\sim)$  il cui *unico* significato è:

“i coefficienti  $a_n, b_n$  nella (19) sono legati ad  $f$  dalle (18)”.



Ma deve essere ben chiaro che ciò *non sottintende alcuna affermazione sulla (eventuale) somma della serie*. In effetti,

- *non è detto* che la serie che compare nella (19) sia convergente in  $(-\pi, \pi)$ ;
- anche se la serie converge, *non è detto* che la sua somma sia  $f(x) - \frac{1}{2}a_0$ .

È immediato verificare che

**Lemma 2.1** *Se  $g \in L^1_{\#}$ , allora:*

$$i) \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+x_0) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx.$$

ii): se  $g$  è pari,

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots); \quad b_n(g) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

mentre se  $g$  è dispari,

$$a_n(g) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots); \quad b_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dim.:** i): è ovvio che  $g$ , data la sua periodicità, è integrabile su *ogni intervallo limitato*; di conseguenza, lo è anche ogni *traslata* di  $g$ , della forma  $x \mapsto g(x+x_0)$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Con la sostituzione  $y := x - x_0$ , si ha subito che

$$\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(y+x_0) dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+x_0) dx;$$

si ha inoltre che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+x_0) dx &= \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} g(x) dx = \\ &= \int_{-\pi+x_0}^{-\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{\pi+x_0} g(x) dx = \\ &= \int_{-\pi+x_0}^{-\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{\pi+x_0} g(x-2\pi) dx = \\ &= \int_{-\pi+x_0}^{-\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{-\pi+x_0} g(x) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx. \end{aligned}$$

ii): evidente ■

**Osservazione 2.1** *Per semplicità, nel seguito ci riferiremo sempre a funzioni  $2\pi$ -periodiche; ma il caso generale di una funzione  $g$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  che sia  $T$ -periodica (dove il periodo  $T$  è un qualunque numero positivo assegnato) si riconduce facilmente al precedente con il cambiamento di variabile  $x \mapsto \frac{2\pi}{T}x$ . Osserviamo solo che, posto  $\omega := \frac{2\pi}{T}$ , si ha, quando  $g$  è integrabile su  $(0, T)$ ,*

$$g(x) \sim \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\omega x + \beta_n \sin n\omega x),$$

dove le costanti di FOURIER sono date da

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha_n := \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \cos n\omega x \, dx & (n = 0, 1, \dots); \\ \beta_n := \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \sin n\omega x \, dx & (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Se poi  $g$  è una qualunque funzione definita nell'intervallo limitato  $[a, b]$ , si può considerarne un **prolungamento periodico**, al quale applicare le definizioni precedenti.

Ad esempio, posto  $T := b - a$ , si può:

- definire la funzione ( $T$ -periodica)

$$\tilde{g}(x) := g(x - kT) \quad \text{se } a + kT \leq x < b + kT;$$

- estendere dapprima  $g$  alla funzione  $g_1$  da  $[a - T = 2a - b, a + T = b]$  in  $\mathbb{R}$ , simmetrica rispetto ad  $x = a$ :

$$g_1(x) := g(2a - x) \quad \text{se } x \text{ verifica } 2a - b \leq x < a,$$

e poi prolungare come sopra  $g_1$  alla funzione ( $2T$ -periodica)  $\tilde{g}_1$ ;

- o, ancora, estendere  $g$  (ristretta ad  $(a, b)$ ) ad una funzione  $g_2$  antisimmetrica rispetto ad  $x = a$  (ponendo  $g_1(x) := -g(2a - x)$  se  $x$  verifica  $2a - b < x < a$ ), e poi prolungare  $g_2$  a  $\tilde{g}_2$ .

Se  $g$  è continua su  $[a, b]$ , anche  $\tilde{g}_1$  è continua su  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{g}$  lo è se e solo se  $g(b) = g(a)$ , e  $\tilde{g}_2$  è prolungabile ad una funzione continua su  $\mathbb{R}$  se e solo se  $g(b) = g(a) = 0$ .

Infine, si osservi che se la funzione (non costante)  $f$  è continua, ed esiste un  $T > 0$  tale che  $f$  sia  $T$ -periodica, l'insieme  $\{\tau > 0 \mid f \text{ è } \tau\text{-periodica}\}$  ammette minimo, che si chiama **periodo fondamentale** di  $f$  (l'ipotesi di continuità è essenziale: la funzione di DIRICHLET è  $\tau$ -periodica  $\forall \tau \in \mathbb{Q}$ ). ■

Indicando –come faremo d'ora in poi– con  $s(f)$  la serie di FOURIER di  $f$  in  $L^1_{\#}$ , e con  $s_n(f; x)$  la sua ridotta  $n$ -esima  $s_n(f)$  calcolata nel punto  $x$ :

$$s_n(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \text{ dati dalle (18)}),$$

risulta

$$\begin{aligned} s_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky) \right) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - y) \right) dy. \end{aligned}$$

Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si indica con  $D_n$  il **nucleo di Dirichlet**:

$$(21) \quad D_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \begin{cases} n + \frac{1}{2} & \text{se } x = 2k\pi, \\ \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} & \text{se } x \neq 2k\pi, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(si ricordi il **Lemma 1.1**), si può scrivere  $s_n(f)$  in *forma integrale*:

$$(22) \quad \begin{aligned} s_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x \mp y) D_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+y) + f(x-y)] D_n(y) dy. \end{aligned}$$

Utilizzeremo tra poco il nucleo di DIRICHLET per dimostrare un *Teorema di convergenza puntuale* per le serie di FOURIER. Osserviamo intanto che, dalla definizione stessa, si ha che  $D_n(x)$  è una funzione  $2\pi$ -periodica, *pari*, ed inoltre

$$(23) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1;$$

di conseguenza, dati  $S_0 \in \mathbb{C}$  ed  $f$  integrabile<sup>2</sup> su  $(-\pi, \pi)$  risulta, grazie alla (22),

$$(24) \quad s_n(f; x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + y) - S_0] D_n(y) dy.$$

Per quanto visto nell'**Osservazione 1.2**, quando  $n \rightarrow +\infty$  la funzione  $D_n(y)$  non ammette però limite per nessun  $y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ ; non si può quindi pensare di valutare il limite del primo membro utilizzando qualche risultato relativo al passaggio al limite sotto il segno di integrale. Dal **Lemma 1.2** discende tuttavia il seguente risultato di **convergenza puntuale**:

**Teorema 2.1 (Dini)** *Sia  $f$  una funzione in  $L^1_{\#}$ . Se in corrispondenza al punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  esiste un numero  $S_0$  tale che sia verificata la seguente **condizione generalizzata del Dini**:*

$$(25) \quad \exists \delta > 0 : \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2S_0|}{y} dy < +\infty,$$

*allora  $s(f; x_0) = S_0$ : nel punto  $x_0$ , la serie di FOURIER di  $f$  converge ad  $S_0$ .*

**Dim.:** si ha intanto che

$$\begin{aligned} s_n(f; x_0) - S_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + y) - S_0] D_n(y) dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + y) - S_0] D_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 - y) + f(x_0 + y) - 2S_0}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) y dy. \end{aligned}$$

Supponiamo, come non è limitativo, che sia  $\delta < \pi$ , ed indichiamo con  $\varphi(y)$  la frazione che compare nell'ultimo integrando. Nell'intervallo  $(0, \delta)$  si ha  $2 \sin \frac{y}{2} \geq \frac{2}{\pi} y$ , quindi

$$|\varphi(y)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2S_0|}{y},$$

dunque, per la (25),  $\varphi$  è integrabile in  $(0, \delta)$ . Nell'intervallo  $(\delta, \pi)$  risulta

$$|\varphi(y)| \leq \left( 2 \sin \frac{\delta}{2} \right)^{-1} \{ |f(x_0 + y)| + |f(x_0 - y)| + 2|S_0| \},$$

<sup>2</sup> che supponiamo estesa ad una funzione  $2\pi$ -periodica su tutto  $\mathbb{R}$ .

quindi  $\varphi$  è integrabile anche in  $(\delta, \pi)$ , e, in definitiva, in  $(0, \pi)$ . La conclusione segue allora dal Lemma di RIEMANN-LEBESGUE. ■

Una prima conseguenza immediata è il seguente

**Teorema 2.2 (Principio di localizzazione di Riemann)** *Siano  $f, g$  due funzioni in  $L^1_{\#}$ ; se le due funzioni coincidono q.o. in un intervallo<sup>3</sup>  $(a, b)$ , allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n(f; x_0) - s_n(g; x_0)) = 0 \quad \forall x_0 \in (a, b). \blacksquare$$

**Dim.:** la funzione  $f - g$  verifica la condizione generalizzata del DINI con  $S_0 = 0$  per ogni  $x_0 \in (a, b)$ ; quindi,  $\forall x_0 \in (a, b)$  si ha

$$s_n(f - g; x_0) = s_n(f; x_0) - s_n(g; x_0) \rightarrow 0. \blacksquare$$

Si noti che i limiti per  $n \rightarrow +\infty$  di  $s_n(f; x_0)$  e di  $s_n(g; x_0)$  potrebbero anche *non esistere separatamente*. Una conseguenza del Teorema precedente è però che il *comportamento* della serie di FOURIER di  $f$  nel punto  $x_0$  ha *carattere puramente locale*, cioè dipende *solo* dall'andamento di  $f$  in un intorno di raggio  $\varepsilon > 0$  *comunque piccolo* di  $x_0$ . In altri termini, comunque si modifichino i valori di  $f$  fuori dall'intervallo  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  (con l'unica avvertenza che la funzione  $\tilde{f}$  così modificata deve essere ancora  $2\pi$ -periodica, ed integrabile in  $(-\pi, \pi)$ ), le serie di FOURIER di  $f$  e  $\tilde{f}$  nel punto  $x_0$  hanno lo stesso carattere (sono *entrambe* convergenti, oppure divergenti, oppure indeterminate); inoltre, se sono convergenti la loro somma in  $x_0$  è *la stessa*. È una proprietà estremamente notevole, dato che i *coefficienti* delle serie di FOURIER di  $f$  e di  $\tilde{f}$  dipendono invece dai valori che le funzioni assumono in *tutto* l'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , e possono quindi essere *completamente diversi*.

La (25), come si vede immediatamente, è verificata con  $S_0 = f(x_0)$  in ogni punto  $x_0$  in cui la funzione  $f$  è *derivabile*.

Se ne deduce il seguente notevole risultato:

**Corollario 2.1** *La funzione  $g \in L^1_{\#}$  è quasi ovunque nulla se e solo se tutte le sue costanti di FOURIER sono nulle.*

**Dim.:** se  $g = 0$  q.o., è ovvio che  $a_n(g) = b_n(g) = 0$ . Per dimostrare la reciproca, conviene introdurre la funzione integrale  $G(x) := \int_{-\pi}^x g(y) dy$ , che è continua, derivabile q.o. in  $\mathbb{R}$  (con  $G'(x) = g(x)$ ), ed è  $2\pi$ -periodica: infatti, dato che, per ipotesi,  $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \pi a_0(g) = 0$ , da cui anche (si ricordi il **Lemma 2.1**, *i*)  $\int_x^{x+2\pi} g(y) dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , risulta

$$G(x + 2\pi) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} g(y) dy = \int_{-\pi}^x g(y) dy + \int_x^{x+2\pi} g(y) dy = \int_{-\pi}^x g(y) dy = G(x).$$

Alla funzione  $G$ , in ogni punto  $x$  in cui è derivabile (cioè q.o. in  $\mathbb{R}$ ), è di conseguenza applicabile il **Teorema 2.1**:

$$G(x) = s(G; x) = \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(G) \cos nx + b_n(G) \sin nx);$$

<sup>3</sup> di ampiezza *comunque piccola*, che non è limitativo supporre contenuto in  $(-\pi, \pi)$

ma si ha  $a_n(G) = b_n(G) = 0 \quad \forall n \geq 1$ , dato che, per il **Teorema 1.4**,

$$\begin{aligned} a_n(G) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G'(x) \sin nx \, dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} b_n(g) = 0, \end{aligned}$$

e analogamente per  $b_n(G)$ . Dunque  $G(x) = \frac{1}{2} a_0(G)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (dato che  $G$  è continua); quindi, q.o. in  $\mathbb{R}$ ,  $g(x) = G'(x) = 0$ . ■

La condizione (25) può tuttavia essere soddisfatta anche in condizioni ben più generali della derivabilità di  $f$  in  $x_0$ : ad esempio, e supponendo per semplicità che  $f$  sia a valori reali, in  $x_0$  la funzione potrebbe presentare un *punto angoloso*, o addirittura un *salto*, come mostra la seguente

**Proposizione 2.1** Se  $f : (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\sigma > 0)$  è tale che:

- i): esistono finiti i limiti  $f(x_0 \mp 0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 \mp h)$ ;
- ii): esistono finiti i limiti (detti anche pseudervative sinistra e destra in  $x_0$ )

$$d_{\mp}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 \mp h) - f(x_0 \mp 0)}{\mp h},$$

allora in  $x_0$  è soddisfatta la condizione generalizzata del DINI con

$$S_0 = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

**Dim.:** basta osservare che dalle ipotesi poste segue che esistono  $\delta > 0$ ,  $c_{\mp} \in \mathbb{R}$  tali che,  $\forall y \in (0, \delta)$ ,

$$\left| \frac{f(x_0 + y) - f(x_0 + 0)}{y} \right| \leq c_+; \quad \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0 - 0)}{-y} \right| \leq c_-.$$

Ne viene che

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]|}{y} \, dy \leq \\ & \leq \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + y) - f(x_0 + 0)}{y} \right| \, dy + \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0 - 0)}{-y} \right| \, dy \leq \\ & \leq \delta(c_+ + c_-) < +\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le ipotesi della Proposizione precedente sono evidentemente verificate in ogni punto dalle funzioni regolari a tratti, di cui ricordiamo la definizione:

**Definizione 2.2** La funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **regolare a tratti** in  $[a, b]$  se esiste una partizione finita  $\xi_0 = a < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$  dell'intervallo  $[a, b]$  tale che, per ogni  $k = 1, \dots, n$ ,

- i)  $f$  è derivabile nell'intervallo aperto  $(\xi_{k-1}, \xi_k)$ ;
- ii) esistono finiti  $f(x_{k-1} + 0)$  e  $f(x_k - 0)$ ;
- iii) esistono finiti  $d_+(x_{k-1})$  e  $d_-(x_k)$ .

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  è regolare a tratti in  $\mathbb{R}$  se lo è in ogni intervallo limitato  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ . Infine, se  $f$  è a valori in  $\mathbb{C}$  si dice regolare a tratti se lo sono  $\Re f$  e  $\Im f$ . ■

Ne segue il risultato, importante per le applicazioni:

**Teorema 2.3** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e regolare a tratti in  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la sua serie di FOURIER converge, e si ha

$$s(f; x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

In particolare, la serie di FOURIER di una funzione  $f$  regolare a tratti converge ad  $f(x_0)$  in ogni punto  $x_0$  in cui  $f$  è continua.

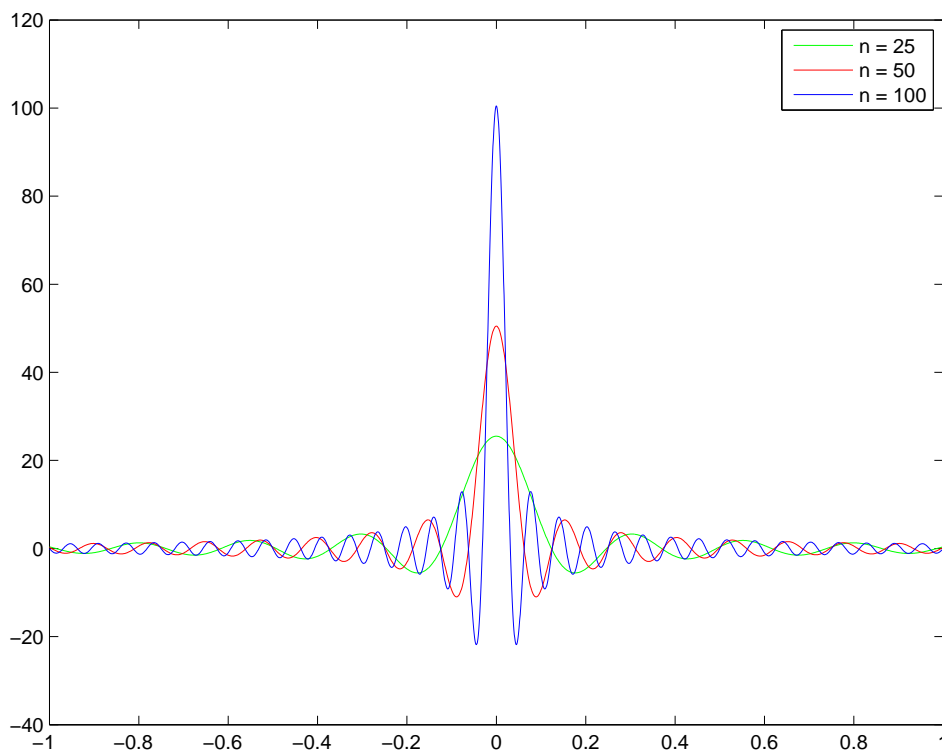
Si può poi dimostrare che se  $f$  è  $2\pi$ -periodica e regolare a tratti in  $\mathbb{R}$ ,  $s_n(f)$  converge ad  $f$  uniformemente in ogni intervallo  $[\alpha, \beta]$  in cui  $f$  è continua. ■

Le funzioni che verificano le ipotesi del Teorema precedente costituiscono una classe notevolmente ampia; va tuttavia precisato che anche funzioni  $f$  che *non* sono regolari a tratti *possono* verificare in ogni punto  $x_0$  l'uguaglianza  $s(f; x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ .

La rilevanza del Teorema del DINI è messa bene in luce dal fatto che, in generale,

la sola continuità di una funzione  $2\pi$ -periodica non è sufficiente a garantirne la sviluppabilità in serie di FOURIER.

**Osservazione 2.2** I grafici di  $D_n$  per  $n = 25, 50, 100$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  sono i seguenti:



Tenendo conto della differenza, estremamente rilevante, tra le unità di misura sui due assi, l'andamento di  $D_n$  illustra bene, da un punto di vista grafico, il principio di localizzazione di RIEMANN, che può anche essere formulato come segue: se  $f$  è in  $L^1_{\#}$ ,  $\forall(x \in \mathbb{R}, \delta \in (0, \pi))$  si ha

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} f(x-y) D_n(y) dy = 0.$$

Questo risultato tuttavia è dovuto ad una sorta di “compensazione” tra i contributi relativi alle zone in cui  $D_n$  è positivo, ed a quelle in cui è negativo.

D'altra parte, si può verificare che risulta

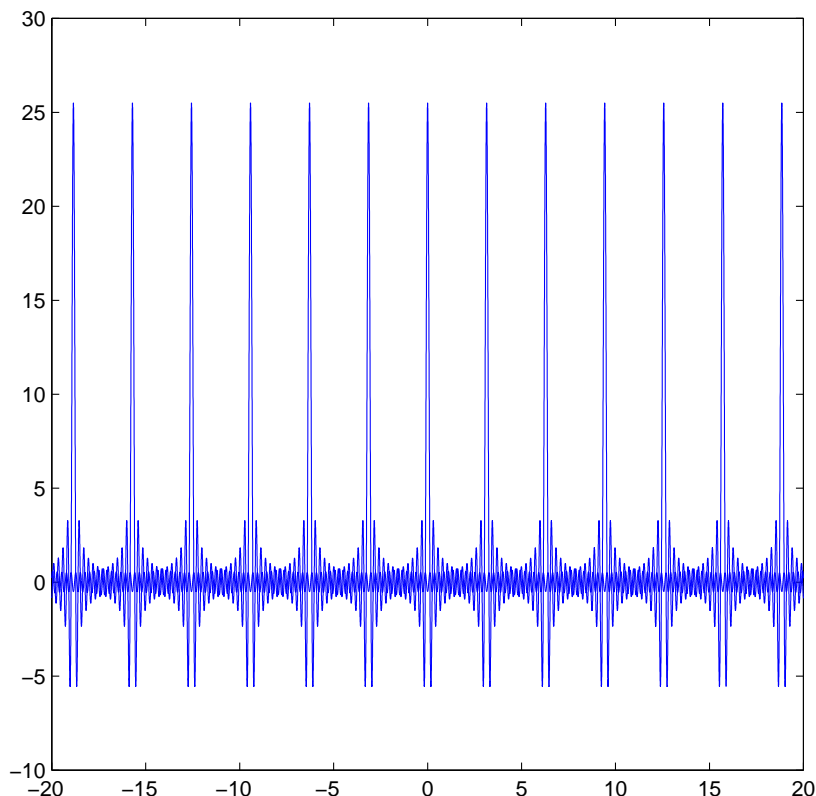
$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = +\infty.$$

Proprio dalla (27), utilizzando alcuni risultati generali di Analisi Funzionale, si deduce il seguente risultato, che evidenzia un aspetto (poco intuitivo ed un po' deludente, ma fondamentale) delle serie di FOURIER:

esiste una funzione continua,  $2\pi$ -periodica, la cui serie di FOURIER ha un insieme di convergenza che *non è tutto*  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo poi che (con una terminologia che lo studente apprenderà in altri Corsi) dal **Teorema 2.3** e dalla (22) segue che la successione  $\{\frac{1}{\pi} D_n(x)\}$  tende nel senso delle distribuzioni al cosiddetto “pettine di DIRAC”, cioè all'estensione  $2\pi$ -periodica della misura unitaria concentrata nell'origine. ■

Per dare un'idea più globale dell'andamento del nucleo di DIRICHLET, riportiamo il grafico di  $D_{25}$  nell'intervallo  $[-20, 20]$  (scelto per far sì che le unità di misura sui due assi siano uguali):



### 3 Il fenomeno di Gibbs.

Riprendiamo l'esempio visto subito dopo il **Corollario 1.1**. Sia  $f_0(x)$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita nella (15). È evidentemente una funzione regolare a tratti, e dispari; la serie di FOURIER ad essa associata è quindi di soli seni, e le costanti di FOURIER si calcolano subito: si ha infatti

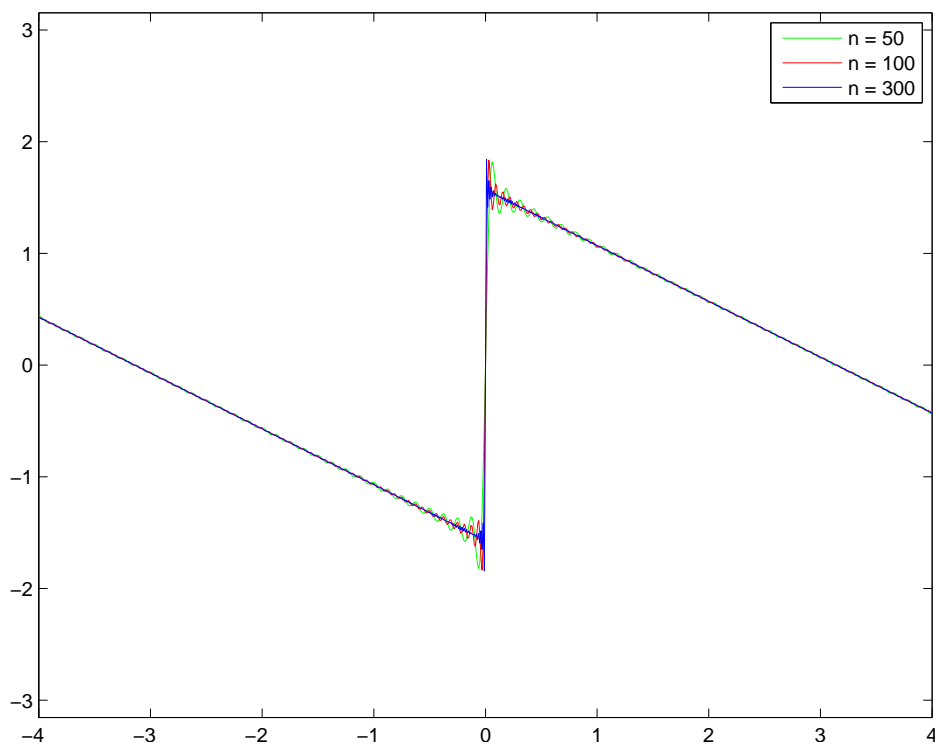
$$\begin{aligned} b_n(f_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2n\pi} [x \cos nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

cosicché

$$f_0(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Si può allora applicare il **Teorema 2.3**; dato che  $f_0(0) = \frac{1}{2} [f_0(0+) + f_0(0-)]$ , risulta così dimostrato che  $s(f_0; x) = f_0(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$ , quindi  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Riportiamo i grafici di  $s_n(f_0)$ , nell'intervallo  $[-4, 4]$ , per  $n = 50, 100, 300$ :

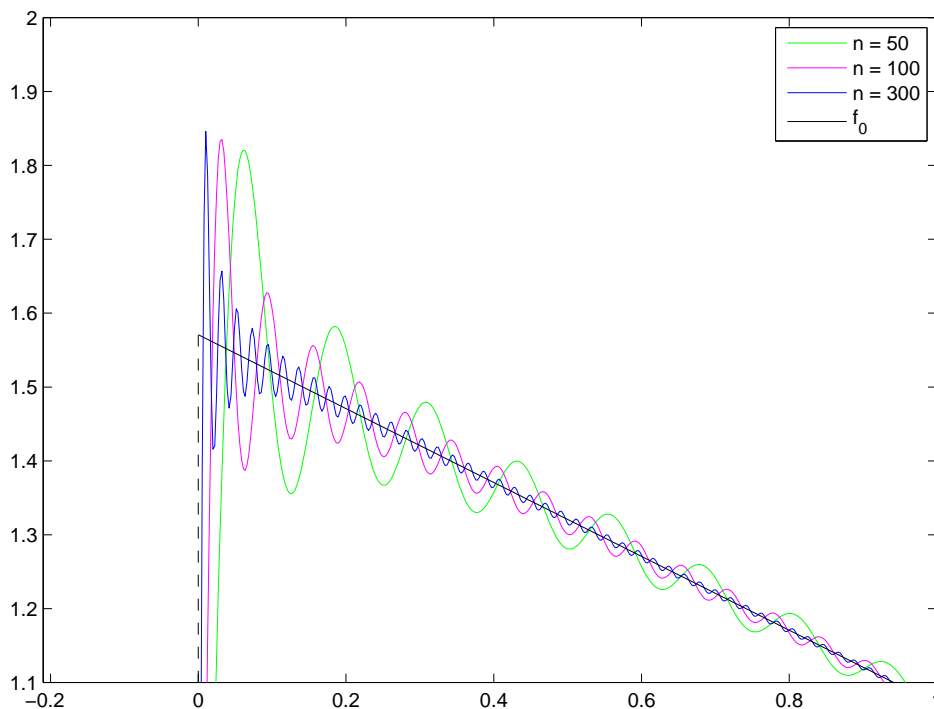


Vicino ad  $x = 0$ , si osserva un andamento *anomalo*: dato che  $s_n(f_0)$  è continua,  $\forall \varepsilon > 0$  l'immagine  $I_{n,\varepsilon}$  tramite  $s_n(f_0)$  dell'intervallo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  è un intervallo,



e ci si aspetterebbe che per  $n \rightarrow +\infty$  tale intervallo tendesse a  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Invece, l'esame dei grafici non sembra affatto suffragare questa ipotesi; anzi, si ha l'impressione che  $\{I_{n,\varepsilon}\}$  tenda sì ad un intervallo, ma *più ampio* di quello previsto.

Ciò sembra ancora più evidente se si ingrandisce il grafico precedente vicino al punto  $(0, \pi/2)$ :



Per cercare di comprendere questo fenomeno, cominceremo ad esaminare due casi particolari; effettueremo poi un'analisi quantitativa del caso generale.

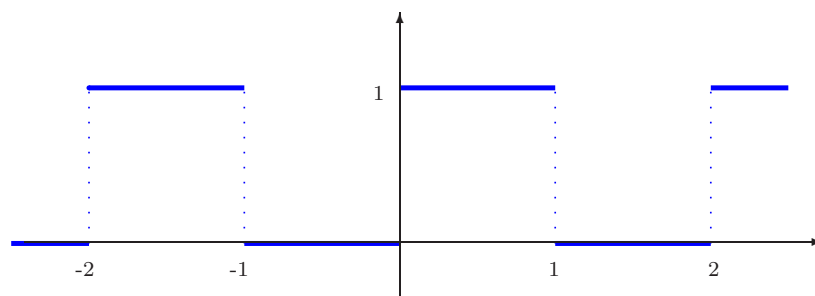
### 3.1 Due esempi preliminari.

Discuteremo dapprima due casi emblematici.

Il primo riguarda una semplicissima funzione periodica con discontinuità di 1<sup>a</sup> specie, il cui studio tuttavia, come vedremo, può essere facilmente esteso al caso generale.

Il secondo caso è quello di una funzione periodica con discontinuità di prima specie e punti angolosi; l'esame di questo caso *suggerisce* che il comportamento "anomalo" delle ridotte della serie di FOURIER si manifesti *solo* in presenza di discontinuità della *funzione* (e non, ad esempio, della sua *derivata*).

### 1. Onda quadra:



Indichiamo con  $q$  la funzione (“onda quadra”) definita da:

$$q(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n, \\ 1 & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(si osservi che per  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  si ha  $q(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } x)$ , dove  $\text{sign}(x)$  è la funzione *segno di x*). Le costanti della serie di FOURIER

$$s(q; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

associata a  $q$  si determinano immediatamente: si ha infatti, per le (20),

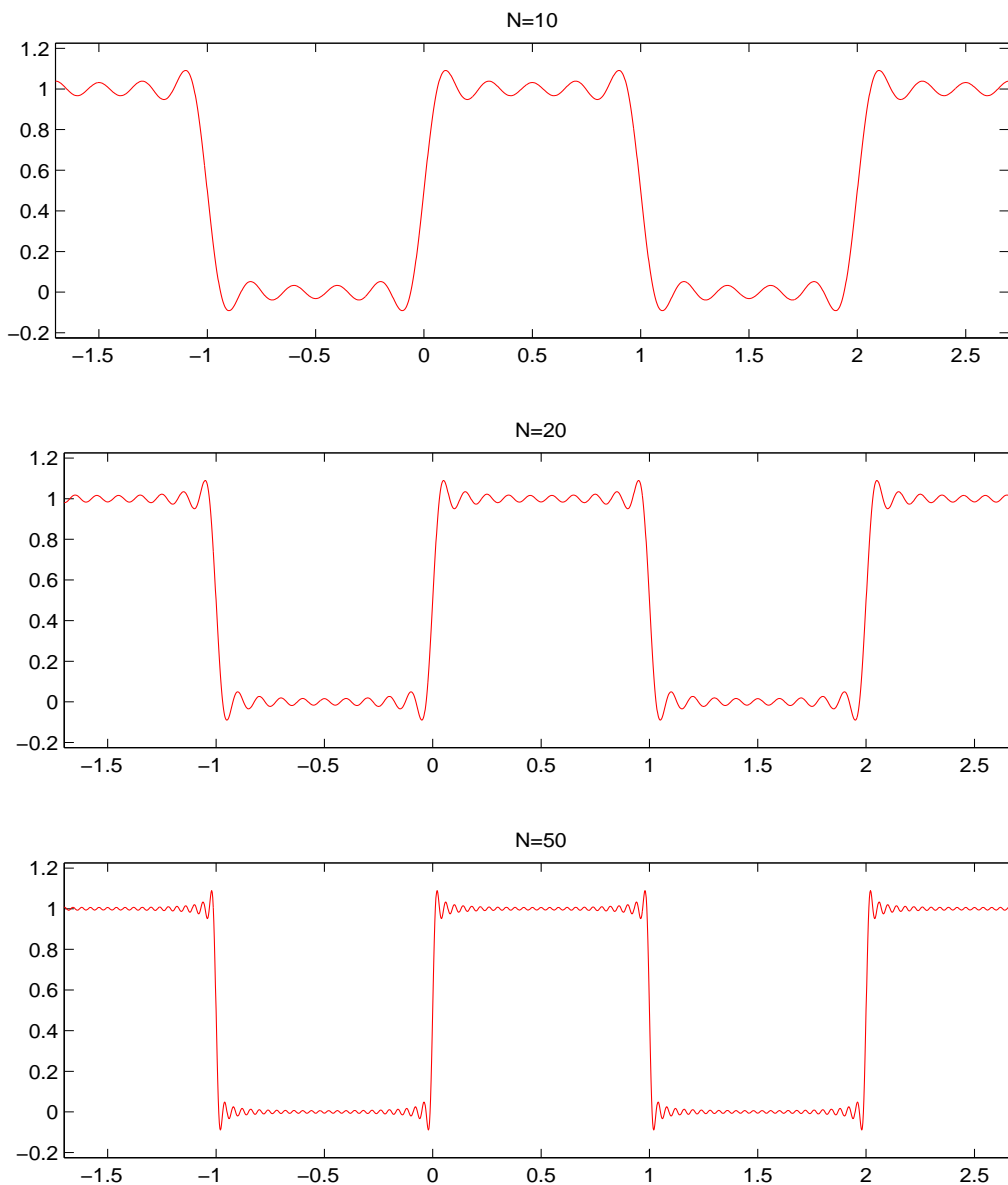
$$a_0 = \int_0^1 dx = 1; \quad \begin{cases} a_n = \int_0^1 \cos n\pi x dx = 0, \\ b_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Di conseguenza, risulta

$$\begin{aligned} s(q; x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo i grafici (per  $N = 10, 20, 50$ ) delle ridotte  $N$ -sime di  $s(q)$ : si noti che

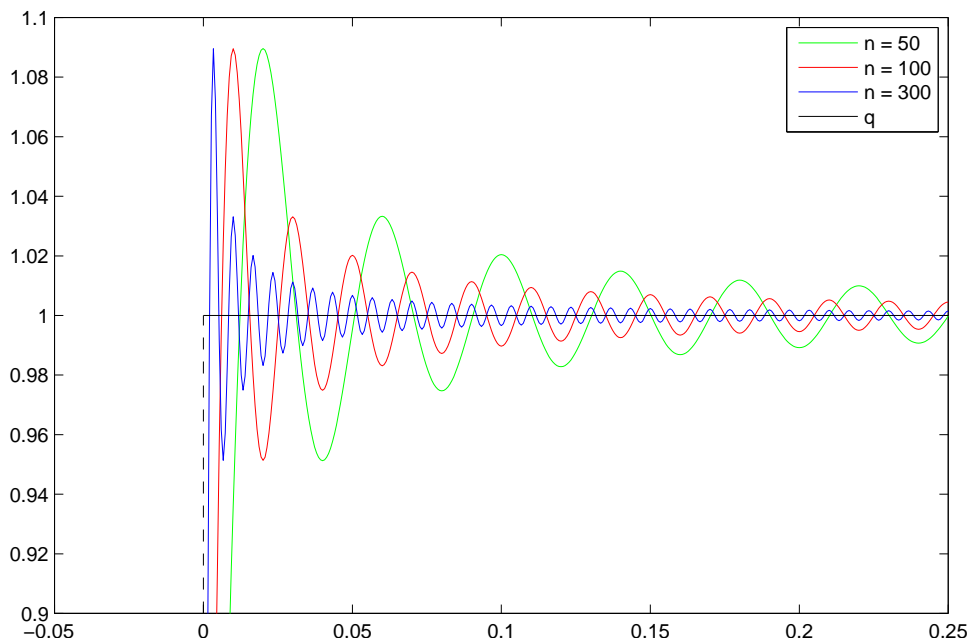
$$s_{2n}(q; x) = s_{2n-1}(q; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$



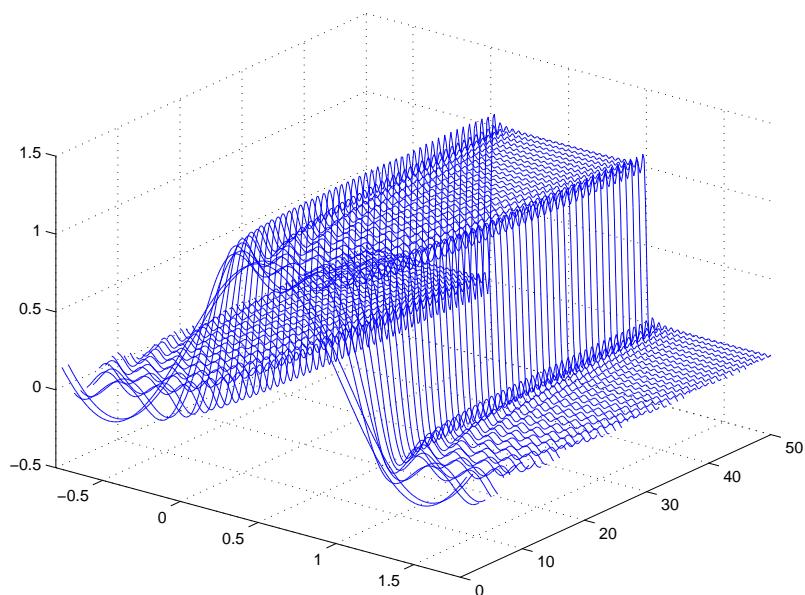
Dai grafici di  $s_n(q; x)$ , la convergenza a  $q(x)$  sembra buona *all'interno* degli intervalli  $(k, k+1)$ , mentre, in prossimità dei punti  $x_k = k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , corrispondenti ai salti di  $q$ , si presenta l'anomalia descritta in precedenza.

Precisamente, si osserva che ogni ridotta presenta vicino ad  $x_k$  un massimo assoluto, la cui ascissa *tende* ad  $x_k$ , ma la cui ordinata è *maggiore* di 1, e *non sembra affatto tendere ad 1* (e neppure *diminuire*) anche se si aumenta l'ordine della ridotta; analogamente, sempre vicino ad  $x_k$  presenta un minimo assoluto *negativo*, la cui ascissa sembra tendere ad  $x_k$ , mentre l'ordinata sembra avere valore *negativo* sostanzialmente costante. È il cosiddetto **fenomeno di Gibbs**, che, come vedremo, si presenta *sempre* per le ridotte  $s_n(f)$  in in intorno di un

punto di salto di  $f$ . Per mettere in evidenza tale fenomeno, nella figura seguente riportiamo un ingrandimento, vicino al punto  $(0, 1)$ , dei grafici di  $s_n(q)$  per  $n = 50, 100, 300$ :

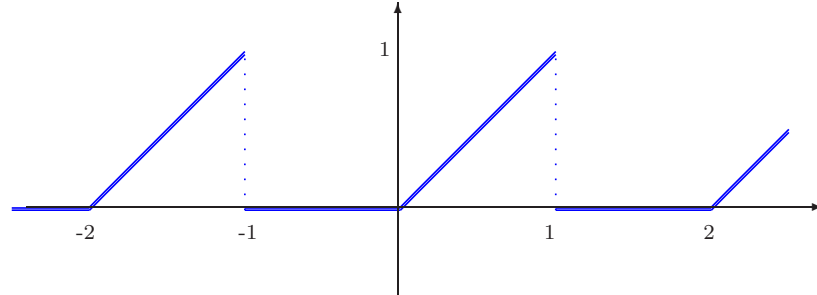


Per avere una visione d'insieme, diamo inoltre una raffigurazione “di tipo tridimensionale”: mostriamo cioè i grafici delle funzioni  $s_n(q)$  (per  $x \in [-.8, 1.8]$  ed  $n = 1, \dots, 50$ ) nel piano  $(x, n)$ :



**2. Onda semitriangolare:**

Tra le funzioni periodiche che presentano, oltre a punti di salto, anche punti angolosi, una delle più semplici, che ora esamineremo brevemente, è la cosiddetta “onda semitriangolare”  $t$ , di cui riportiamo il grafico,



definita da:

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n, \\ x - 2n & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Calcoliamo le costanti di FOURIER di  $t$ . Si ha

$$a_0 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

e, per  $n = 1, 2, \dots$ ,

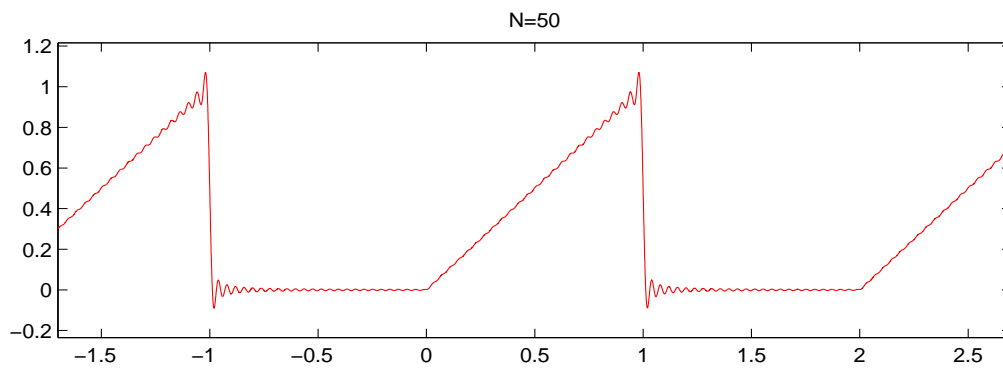
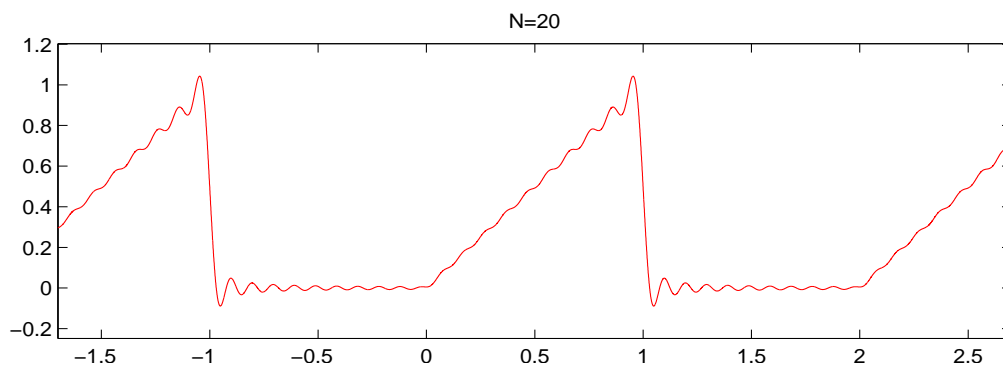
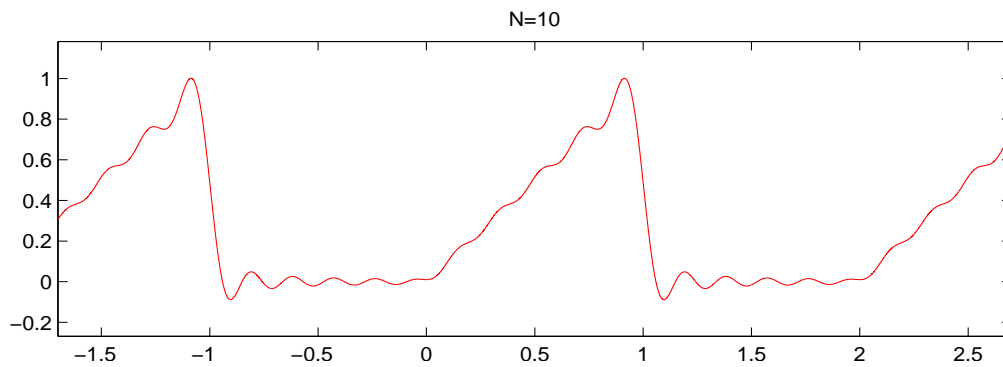
$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = \\ &= \frac{1}{n\pi} [x \sin n\pi x]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos n\pi x]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi} [x \cos n\pi x]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

La serie di FOURIER di  $t$  è quindi data da:

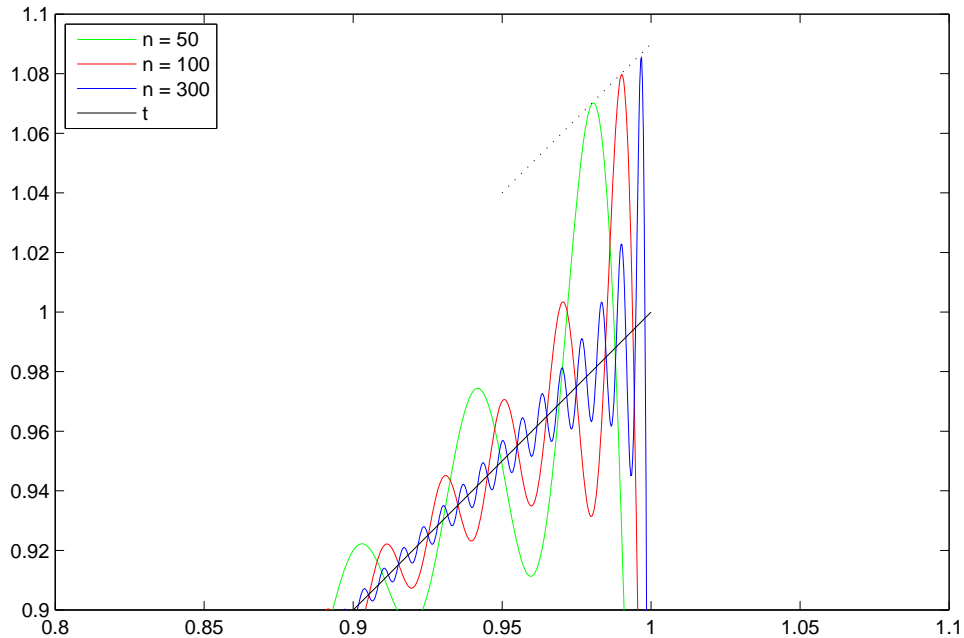
$$s(t; x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2 \cos(2n-1)\pi x}{\pi(2n-1)^2} + (-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n} \right).$$

Seguono i grafici delle ridotte  $s_N(t)$  di  $s(t)$  per  $N = 10, 20, 50$ :



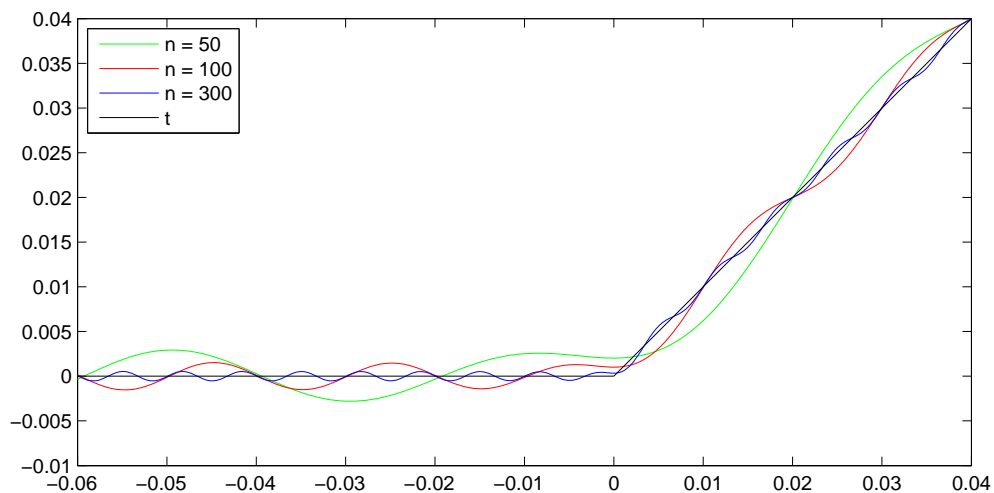
Anche in questo caso, nell'intorno dei punti  $x_n = 2n - 1$  è evidente il fenomeno di GIBBS.

Ancora, per avere un'immagine più efficace del fenomeno mostriamo un ingrandimento, nell'intorno del punto  $(1, 1)$ , delle ridotte  $s_n(t)$  per  $n = 50, 100, 300$ :

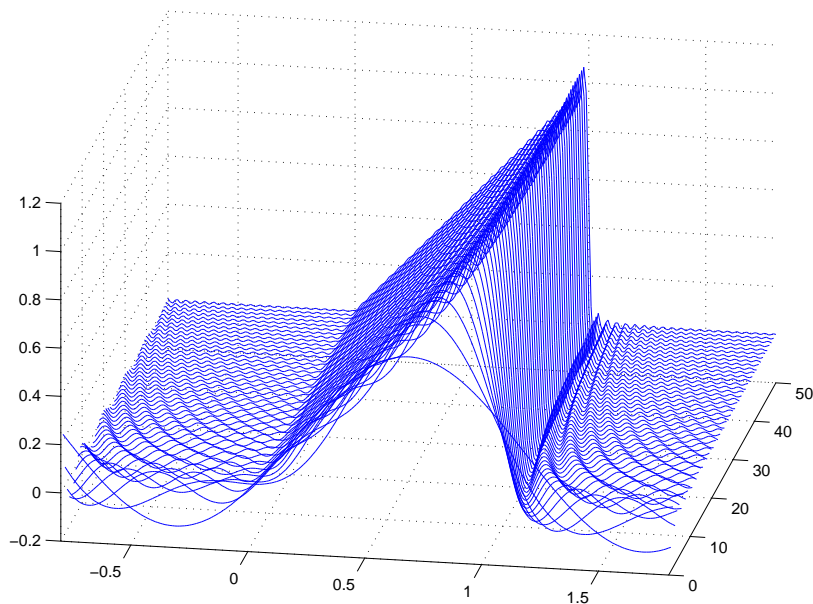


I punti di massimo (assoluto)  $(x_n, s_n(t; x_n))$  delle ridotte sembrano essere disposti su una retta parallela al grafico di  $t$ ; inoltre, la differenza tra ordinata  $s_n(t; x_n)$  del punto di massimo della ridotta  $n$ -esima e valore  $t(x_n)$  della funzione  $t$  nello stesso punto sembra essere costante, ed uguale a quello analogo relativo alla funzione  $q$  (si noti che, in entrambi i casi, il salto delle due funzioni vale 1).

Come mostra il grafico delle ridotte  $s_n(t)$  per  $n = 50, 100, 300$  in un intorno (*molto piccolo!*) dell'origine, l'approssimazione sembra invece buona (e, soprattutto, *migliorare all'aumentare dell'ordine della ridotta*) nell'intorno dei punti di ascissa  $x'_n = 2n$ , in cui la funzione  $f$  non è derivabile, ma è *continua*:



Segue una rappresentazione “di tipo tridimensionale” delle ridotte  $s_n(t)$ , nell'intervallo  $(-0.8, 1.8)$ , per  $n = 1, 2, \dots, 50$ :



## 3.2 Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs.

### 1. Il caso dell'onda quadra.

Si è visto che le ridotte dell'onda quadra  $q$  hanno l'espressione

$$(28) \quad s_{2n-1}(q; x) = s_{2n}(q; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$

Si verificano immediatamente le seguenti simmetrie:

$$s_{2n}(q; -x) = 1 - s_{2n}(q; x); \quad s_{2n}(q; 1-x) = s_{2n}(q; x);$$

inoltre (osservato che  $s_{2n}(q)$  è 2-periodica, ed è quindi sufficiente studiarla ad esempio nell'intervallo  $[-1, 1)$ ), si ha in tale intervallo

$$s_{2n}(q; x) > \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in (0, 1); \quad s_{2n}(q; x) < \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Per determinare il massimo ed il minimo di  $s_{2n}(q)$  in  $[-1, 1]$  (quindi in  $\mathbb{R}$ ), è utile semplificare l'espressione della sua derivata

$$(29) \quad s'_{2n}(q; x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\pi x.$$

A ciò risponde il seguente



**Lemma 3.1** Per  $n = 1, 2, \dots$  ed ogni  $x \notin \mathbb{Z}$ , risulta

$$2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\pi x = \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x}.$$

**Dim.:** dall'identità

$$\begin{aligned} 2 \sin \pi x \cos(2k-1)\pi x &= \sin(\pi x + (2k-1)\pi x) + \sin(\pi x - (2k-1)\pi x) = \\ &= \sin 2k\pi x - \sin 2(k-1)\pi x, \end{aligned}$$

sommando per  $k = 1, \dots, n$  si ottiene

$$2 \sin \pi x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\pi x = \sin 2n\pi x,$$

da cui l'uguaglianza cercata. ■

Dalle (28), (29) si vede facilmente che

- le ascisse degli estremi relativi di  $s_{2n}(q)$  nell'intervallo  $(-1, 1)$  (che coincidono con gli zeri di  $s'_{2n}(q)$ ) sono i punti  $\mp x_h^{(n)}$ , dove  $x_h^{(n)} := \frac{h}{2n}$  ( $h = 1, 2, \dots, 2n-1$ ); si noti che  $s'_{2n}(q; 0) = -s'_{2n}(q; \mp 1) = 2n$ ;
- più precisamente, i punti  $x_h^{(n)}$  sono di massimo relativo per  $h = 1, 3, \dots, 2n-1$ , di minimo relativo per  $h = 2, 4, \dots, 2n-2$  (si controlla infatti immediatamente che  $s''_{2n}(q; \frac{2h-1}{2n}) < 0$ , mentre  $s''_{2n}(q; \frac{h}{n}) > 0$ ); per simmetria, i punti  $-x_k^{(n)}$  e  $-1 + x_k^{(n)}$  sono di massimo relativo se  $k$  è pari, di minimo relativo se  $k$  è dispari;
- infine, come ora mostriamo, il massimo assoluto di  $s_{2n}(q)$  in  $[-1, 1]$  (quindi in  $\mathbb{R}$ ) è assunto nei punti  $x_1^{(n)} = \frac{1}{2n}$  e  $x_{2n-1}^{(n)} = 1 - \frac{1}{2n}$ ; di conseguenza, il minimo assoluto è assunto nei punti  $-\frac{1}{2n}$  e  $-1 + \frac{1}{2n}$ .

Poiché

$$\begin{aligned} s_{2n}\left(q; \frac{2h+1}{2n}\right) &= \frac{1}{2} + \int_0^{(2h+1)/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx = \\ &= s_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) + \sum_{j=1}^h \int_{(2j-1)/(2n)}^{(2j+1)/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx, \end{aligned}$$

basta verificare che ciascuno degli ultimi integrali scritti è negativo per  $1 \leq h < n/2$ . Ora, si calcola facilmente che

$$\begin{aligned} \int_{(2j-1)/(2n)}^{(2j+1)/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx &= \int_{(2j-1)/(2n)}^{j/n} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{j/n}^{(2j+1)/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx = \\ &= \int_{(2j-1)/(2n)}^{j/n} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{(2j-1)/(2n)}^{j/n} \frac{\sin 2n\pi\left(y + \frac{1}{2n}\right)}{\sin \pi\left(y + \frac{1}{2n}\right)} dy = \\ &= \int_{(2j-1)/(2n)}^{j/n} \left( \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2n}\right)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_{(2j-1)\pi}^{2j\pi} \left( \frac{1}{\sin \frac{y}{2n}} - \frac{1}{\sin \frac{y+\pi}{2n}} \right) \sin y dy. \end{aligned}$$

Quando  $y$  varia nell'intervallo  $((2j-1)\pi, 2j\pi)$ , si ha  $\sin y < 0$ ; inoltre, poiché nello stesso intervallo  $0 < \frac{y+\pi}{2n} \leq \frac{2h+1}{2n}\pi \leq \frac{\pi}{2}$ , si ha anche  $\sin \frac{y}{2n} < \sin \frac{y+\pi}{2n}$ ; di conseguenza, l'integrando è sempre  $\leq 0$ .

- Il valore  $s_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right)$  del massimo di  $s_{2n}(q)$  è dato da

$$\max_x s_{2n}(q; x) = s_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \int_0^{1/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx,$$

mentre il valore  $s_{2n}(q; -\frac{1}{2n})$  del minimo di  $s_{2n}(q)$  è

$$\min_x s_{2n}(q; x) = s_{2n}\left(q; -\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - \int_0^{1/(2n)} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx. \blacksquare$$

Poniamo ora

$$G := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx;$$

si ha il seguente risultato:

**Teorema 3.1** *Si ha*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \max_x s_n(q; x) \right) = \frac{1}{2}(1 + G);$$

*inoltre,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \max_x s_n(q; x) - \min_x s_n(q; x) \right) = G.$$

**Dim.:** per quanto visto sopra, si ha infatti

$$\max_x s_{2n}(q; x) = s_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} \frac{\tau/(2n)}{\sin(\tau/(2n))} d\tau \right);$$

le funzioni  $\tau \mapsto (\tau/2n)/\sin(\tau/2n)$  sono minori di  $\pi/2$  su  $[0, \pi]$  (perché in  $[0, \pi/2]$  si ha  $\sin t \geq 2t/\pi$ ), quindi, applicando il Teorema di LEBESGUE sulla convergenza dominata, si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_x s_{2n}(q; x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_x s_{2n-1}(q; x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) = \frac{1}{2}(1 + G).$$

Poiché  $s_{2n}(q; -\frac{1}{2n}) = 1 - s_{2n}(q; \frac{1}{2n})$ , si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \min_x s_{2n}(q; x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n}\left(q; -\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}(1 - G),$$

da cui il risultato cercato.  $\blacksquare$

Il numero  $G$  si chiama **costante di Wilbraham-Gibbs**,<sup>4</sup> un suo valore approssimato è dato da  $G \simeq 1.178980\dots$  *Nel caso ora esaminato*, si vede quindi che il salto effettivo (uguale ad 1) della funzione  $q$  in corrispondenza ai punti di ascissa intera viene *enfaticizzato* di quasi il 18% quando si approssima la funzione con una ridotta, di ordine comunque elevato, della sua serie di FOURIER.

Al caso ora trattato si riconduce immediatamente quello di un'onda quadra  $2L$ -periodica, definita in  $[x_0 - L, x_0 + L)$  da

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_0 - L \leq x < x_0, \\ \beta & \text{se } x_0 \leq x < x_0 + L, \end{cases}$$

basta infatti osservare che  $g(x) = \alpha + (\beta - \alpha)q((x - x_0)/L)$ : dalla Proposizione precedente si ricava subito che

$$s_{2n}\left(g; x_0 + \frac{L}{2n}\right) = \alpha + (\beta - \alpha) s_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) \rightarrow \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(1 + G),$$

<sup>4</sup> attenzione: a volte con tale nome viene indicato il numero  $\frac{\pi}{2}G \sim 1.851937\dots$

$$s_{2n} \left( g; x_0 - \frac{L}{2n} \right) = \alpha + (\beta - \alpha) s_{2n} \left( g; -\frac{1}{2n} \right) \rightarrow \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} (1 - G),$$

e se ne deduce che anche in questo caso il salto  $\beta - \alpha$  di  $g$  nel punto  $x_0$  viene enfatizzato *esattamente del fattore*  $G$ .

In realtà, come ora mostreremo, tale risultato non è relativo al solo caso dell'onda quadra, ma ha carattere *del tutto generale*.

## 2. Il caso generale.

Premettiamo un notevole risultato riguardante, in generale, le successioni *uniformemente convergenti* di funzioni continue:

**Lemma 3.2** Sia  $\{g_n\}$  una successione di funzioni continue in  $[a, b]$  che in tale intervallo converge uniformemente ad una funzione  $g$  (che quindi risulta continua). Sia  $\{c_n\}$  una successione  $\subset [a, b]$  che tende a  $c$ . Allora la successione  $\{g_n(c_n)\}$  è convergente, e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(c_n) = g(c)$ .

**Dim.:** fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, per l'uniforme convergenza di  $\{g_n\}$  a  $g$  esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n > n_\varepsilon$  si abbia  $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; in particolare,  $|g_n(c_n) - g(c_n)| < \varepsilon/2$ . Dato che  $c_n \rightarrow c$  e  $g$  è continua, esiste  $\delta > 0$  tale che se  $|x - c| < \delta$  allora  $|g(x) - g(c)| < \varepsilon/2$ . Poiché  $c_n \rightarrow c$ , si ha, definitivamente,  $|c_n - c| < \delta$ , quindi  $|g(c_n) - g(c)| < \varepsilon/2$ , dunque

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \varepsilon. \blacksquare$$

Diamo ora il risultato generale riguardante il fenomeno di GIBBS; naturalmente, occorrerà limitarsi a considerare funzioni a valori reali:

**Teorema 3.2** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare a tratti,  $2L$ -periodica, che presenta nel punto  $x_0$  una discontinuità di 1<sup>a</sup> specie, con salto  $\Delta(x_0)$  definito da  $\Delta(x_0) := f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ . Posto  $x_n := L/2n$ , si ha:

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f; x_0 \mp x_n) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] \mp \frac{\Delta(x_0)}{2} G;$$

inoltre, se si pone

$$M_n(f) := \limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \{\sup\{s_n(f; x) \mid 0 < |x - x_0| < \sigma\}\};$$

$$m_n(f) := \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \{\inf\{s_n(f; x) \mid 0 < |x - x_0| < \sigma\}\}$$

si ha che

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n(f) - m_n(f)) = |\Delta(x_0)| G.$$

**Dim.:** ridefinendo eventualmente il valore di  $f(x_0)$ , non è limitativo supporre, come faremo, che  $f$  sia continua da destra in  $x_0$  (cioè che  $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ ). Poniamo poi  $\tilde{q}(x) := q((x - x_0)/L)$ , e definiamo

$$\varphi(x) := f(x) - \Delta(x_0)\tilde{q}(x).$$

Si noti intanto che  $\varphi$  è una funzione regolare a tratti,  $2L$ -periodica, che risulta *continua* per  $x = x_0$ , dato che (essendo  $\tilde{q}(x_0 + 0) = \tilde{q}(x_0) = 1$ , mentre  $\tilde{q}(x_0 - 0) = 0$ ) si ha

$$\varphi(x_0 + 0) = f(x_0) - \Delta(x_0) = f(x_0 - 0) = \varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0).$$

Fissato un intervallo  $[x_0 - l, x_0 + l]$  che non contiene altre discontinuità (oltre  $x_0$ ) di  $f$ , ne risulta che  $\varphi$  è *continua* in  $[x_0 - l, x_0 + l]$ ; quindi, per il **Teorema 2.3**, si ha che

$$s_n(\varphi) \rightarrow \varphi \quad \text{uniformemente in } [x_0 - l, x_0 + l].$$

Se  $x_n := L/2n$ , si ha

$$s_n(f; x_0 \mp x_n) = s_n(\varphi; x_0 \mp x_n) + \Delta(x_0) s_n(q; \mp x_n);$$

per il Lemma precedente, e ricordando i risultati visti per  $s_n(q)$ , si deduce che risulta

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f; x_0 \mp x_n) &= \varphi(x_0) + \Delta(x_0) \frac{1 \mp G}{2} = \\ &= f(x_0 - 0) + \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)] \mp \frac{\Delta(x_0)}{2} G, \end{aligned}$$

da cui la (30).

Supponiamo ora  $\Delta(x_0) > 0$ : dalla relazione  $s_n(f; x) = s_n(\varphi; x) + \Delta(x_0) s_n(q; (x - x_0)/L)$  si ha che

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) &\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(\varphi; x) + \Delta(x_0) \limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(q; (x - x_0)/L) = \\ &= s_n(\varphi; x_0) + \Delta(x_0) s_n(q; 1/2n), \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) &\geq \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(\varphi; x) + \Delta(x_0) \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(q; (x - x_0)/L) = \\ &= s_n(\varphi; x_0) + \Delta(x_0) s_n(q; -1/2n). \end{aligned}$$

Ne viene che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) - \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) \leq \Delta(x_0) [s_n(q; 1/2n) - s_n(q; -1/2n)],$$

da cui, ricordando i risultati relativi ad  $s_n(q)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \limsup_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) - \liminf_{x \rightarrow x_0} s_n(f; x) \right) \leq \Delta(x_0) G$$

Poiché però la (30) implica evidentemente la disuguaglianza opposta, ne discende la (31). Il caso  $\Delta(x_0) < 0$  si riconduce a quello ora trattato passando alla funzione  $-f$ . ■

## 4 Somme di Fejér.

Alcuni degli aspetti meno soddisfacenti della teoria ora svolta (ad esempio, l'esistenza di funzioni continue non sviluppabili in serie di FOURIER, od il verificarsi del fenomeno di GIBBS), possono essere eliminati se si adotta una definizione diversa e più generale di *convergenza* di una successione, quindi anche di una serie:

**Definizione 4.1** *Data la successione  $\{s_n\}$  di numeri complessi, formiamo la successione  $\{\sigma_n\}$  delle sue medie aritmetiche:*

$$\sigma_n := \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}.$$

Se  $\{\sigma_n\}$  tende<sup>5</sup> ad un limite  $s \in \mathbb{C}$ , si dice che  $\{s_n\}$  tende ad  $s$  **secondo Cesàro**, o **in media**  $(C, 1)$ , e si scrive  $(C, 1)\text{-}\lim_n s_n = s$ ; se  $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$  e  $s = \mp\infty$ , si dice che  $\{s_n\}$  **diverge (negativamente o positivamente) secondo Cesàro**.

Si dice poi che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  **converge ad  $s \in \mathbb{R}$  secondo Cesàro** se la successione  $\{\sigma_n\}$  delle sue ridotte tende secondo CESÀRO ad  $s$ ; se la serie è a termini reali, si definiscono in modo ovvio la divergenza (a  $\mp\infty$ ) della serie. ■

Non è difficile dimostrare che se la successione  $\{s_n\}$  tende ad  $s$  con la definizione usuale, allora tende ad  $s$  anche secondo CESÀRO. Però, ad esempio, la successione di termine generale  $s_n := (-1)^n$ , che *non* ammette limite per  $n \rightarrow +\infty$ , tende a zero secondo CESÀRO: infatti, si ha

$$\frac{s_1 + \dots + s_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La definizione precedente si estende in modo naturale alla convergenza di successioni o serie di funzioni; in particolare, nel caso della serie di FOURIER associata alla funzione  $f$ , le medie aritmetiche

$$\sigma_n(f; x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

si chiamano **somme di Fejér associate a  $f$** ; anch'esse, come ora mostriamo, sono rappresentabili in forma integrale:

**Teorema 4.1** *Se  $f$  è integrabile in  $(-\pi, \pi)$ , le sue somme di FEJÉR si scrivono nella forma*

$$(32) \quad \sigma_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \Phi_n(x - y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x \mp y) \Phi_n(y) dy,$$

dove il **nucleo di Fejér**  $\Phi_n$  è dato da

$$(33) \quad \Phi_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } x = 2k\pi, \\ \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 & \text{se } x \neq 2k\pi. \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

<sup>5</sup> nel senso abituale, cioè quello fin qui utilizzato.

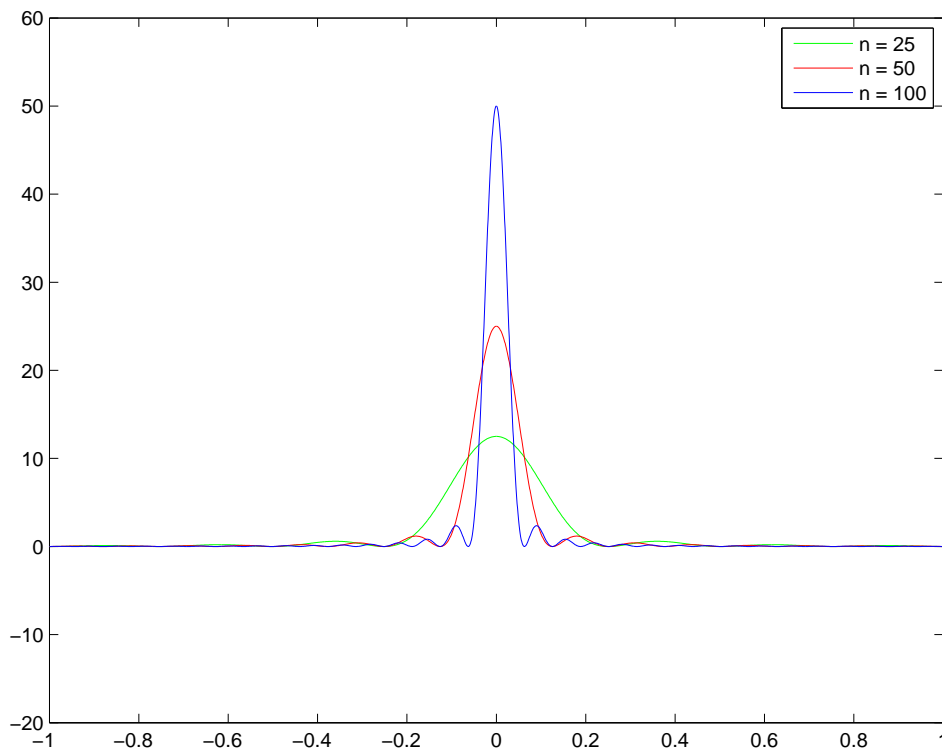
**Dim.:** dalla (22) si ottiene che

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) y}{\sin \frac{y}{2}} dy;$$

per calcolare la somma che compare nell'integrale, osserviamo che, grazie al **Lemma 1.1**,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) y &= \cos \frac{y}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sin ky + \sin \frac{y}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos ky\right) = \\ &= \cos \frac{y}{2} \frac{\cos \frac{y}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) y}{2 \sin \frac{y}{2}} + \sin \frac{y}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right) y}{2 \sin \frac{y}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left(\cos^2 \frac{y}{2} - \cos \frac{y}{2} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) y\right) + \\ &+ \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left(\sin^2 \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) y\right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} (1 - \cos ny) = \frac{\sin^2 \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Riportiamo i grafici dei nuclei di FEJÉR  $\Phi_n$  per  $n = 25, 50, 100$ ; è utile un confronto con gli analoghi grafici dei nuclei di DIRICHLET illustrati nel **Paragrafo 2** (nei due casi, le unità di misura sull'asse delle ordinate sono *diverse*).



Si vede facilmente che anche i nuclei di FEJÉR sono *pari*, e verificano

$$(34) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 1;$$

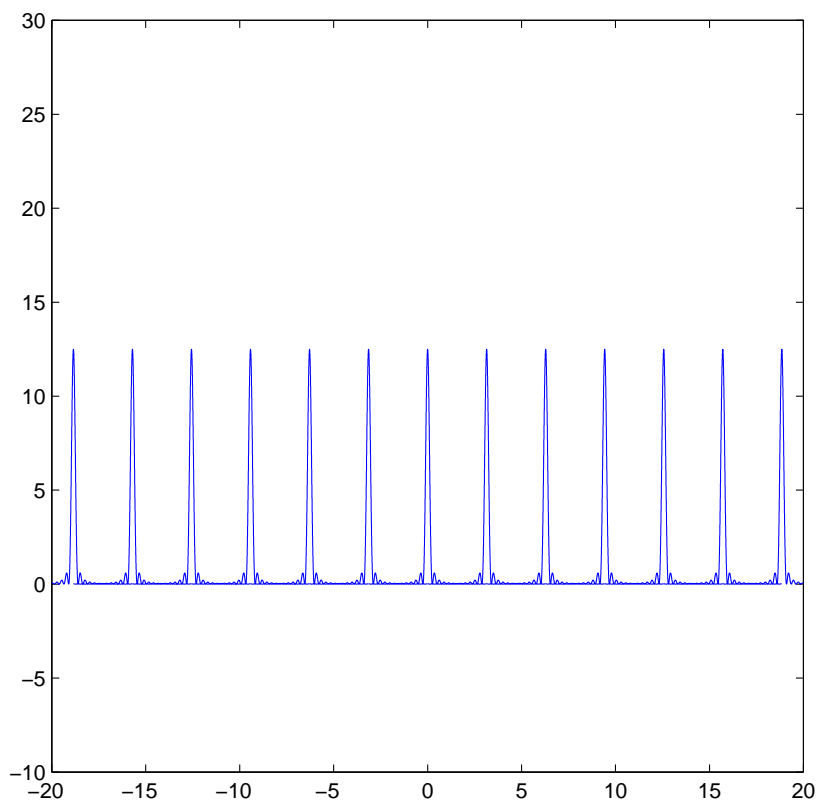
infatti, se  $f$  è la funzione identicamente uguale ad 1, è chiaro che  $\sigma_n(f; x) = 1$ ; basta allora applicare la (32) ad  $f(x) = 1$ .

Tra i nuclei di FEJÉR e quelli di DIRICHLET ci sono però delle differenze, che sono *fondamentali* perché, come ora vedremo, implicano comportamenti *radicalmente diversi* tra le relative somme  $s_n(f)$  e  $\sigma_n(f)$ : precisamente,

- *i nuclei di FEJÉR sono non negativi;*
- *per ogni  $\delta > 0$  fissato,  $\Phi_n(x)$  tende uniformemente a zero per  $\delta \leq |x| \leq \pi$ .*

La prima proprietà è ovvia; per la seconda, si osservi che per  $0 < y \leq \frac{1}{2}\pi$  si ha  $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$ ; di conseguenza, per  $\delta \leq |x| \leq \pi$  risulta  $0 \leq \Phi_n(x) \leq \frac{1}{2n} \frac{\pi^2}{\delta^2}$ .

Riportiamo i grafici di  $\Phi_{25}$  nell'intervallo  $[-20, 20]$ , sempre con unità di misura uguali sui due assi, da confrontare con i grafici di  $D_{25}$  nello stesso intervallo:



Si tenga presente che in alcuni testi si definisce

$$\sigma_n := \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1};$$

naturalmente, in questo caso anche la definizione di  $\Phi_n$  deve essere modificata di conseguenza: precisamente, nel secondo membro della (33),  $n$  va sostituito da  $n+1$ .

Dalle proprietà ora viste del nucleo di FEJÉR si ricava il seguente

**Teorema 4.2 (Fejér)** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è continua e  $2\pi$ -periodica, la successione delle sue somme di FEJÉR  $\sigma_n(f)$  tende ad  $f$  uniformemente in  $\mathbb{R}$ .*

**Dim.:** fissiamo  $\delta$  con  $0 < \delta < \pi$ ; dalla (32) si ricava che, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) f(x+y) dy - f(x) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) [f(x+y) - f(x)] dy \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) |f(x+y) - f(x)| dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|y| \leq \delta} \Phi_n(y) |f(x+y) - f(x)| dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \Phi_n(y) |f(x+y) - f(x)| dy \leq \\ &\leq \left\{ \sup_{|y| \leq \delta} |f(x+y) - f(x)| \right\} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) dy + \\ &+ \left\{ \sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} \Phi_n(y) \right\} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Poiché  $f$  è *uniformemente continua*, fissato  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare  $\delta > 0$  tale che se  $|y| < \delta$  risulti  $|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{R}$ ; fissato  $\delta$  in queste condizioni, è poi possibile determinare  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n > n_\varepsilon$  si abbia  $\Phi_n(y) < \varepsilon$  per tutti gli  $y$  con  $|y| > \delta$ ; dalla disuguaglianza precedente si ha allora che

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon(1 + 4M) \quad \forall (x \in \mathbb{R}, n > n_\varepsilon),$$

dove  $M := \max |f(x)|$ , da cui la tesi. ■

Dato che  $\sigma_n(f)$  è un polinomio trigonometrico, ne discende il

**Teorema 4.3 (Teorema di approssimazione di Weierstrass)** *Ogni funzione continua e  $2\pi$ -periodica in  $\mathbb{R}$  è limite uniforme di una successione di polinomi trigonometrici. ■*

Osserviamo inoltre la seguente importante conseguenza:



**Corollario 4.1** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è continua,  $2\pi$ -periodica, e la sua serie di FOURIER è convergente nel punto  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $s(f; x) = f(x)$ .

**Dim.:** basta osservare che se la successione  $\{s_n(f; x)\}$  tende a  $g(x)$  in  $\mathbb{C}$ , anche la successione  $\{\sigma_n(f; x)\}$  tende allo stesso limite  $g(x)$ ; ma, per il Teorema precedente,  $\sigma_n(f; x)$  tende ad  $f(x)$ , da cui  $g(x) = f(x)$ . ■

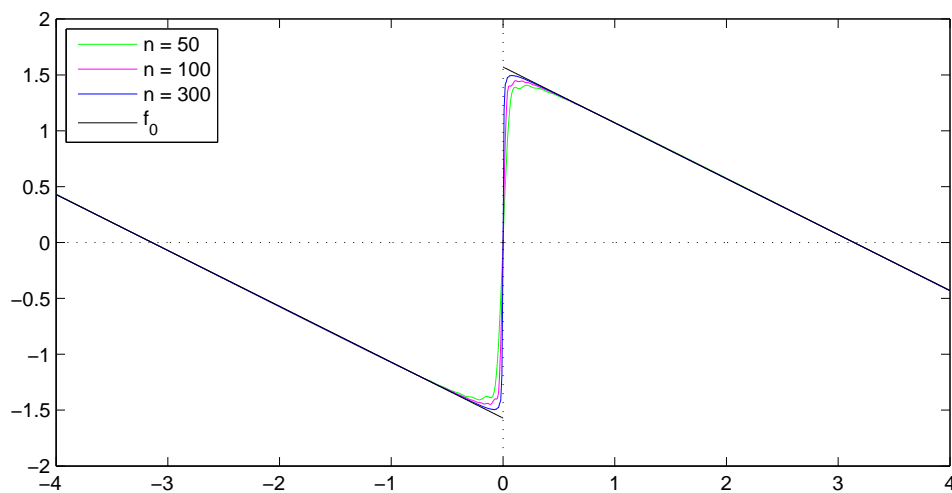
La *positività* è una delle proprietà fondamentali dei nuclei di FEJÉR, ed ha conseguenze estremamente rilevanti. Una prima osservazione immediata è che, essendo  $\Phi_n(x) \geq 0$ , se q.o. nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  la funzione  $2\pi$ -periodica ed integrabile  $f$  verifica le maggiorazioni  $c \leq f(x) \leq C$ , allora (dalle (32), tenuto conto delle (34)) si deduce che risulta anche  $c \leq \sigma_n(f; x) \leq C$ . Ciò implica un'altra notevole caratteristica delle somme di FEJÉR, di *non presentare* il fenomeno di GIBBS: se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è regolare a tratti, periodica, ed  $x_0$  è una discontinuità di 1ª specie per  $f$ , con salto  $\Delta(x_0)$ , si verifica che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \limsup_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(f; x) - \liminf_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(f; x) \right) = |\Delta(x_0)|;$$

si ricordi il risultato espresso invece dal **Teorema 3.2**.

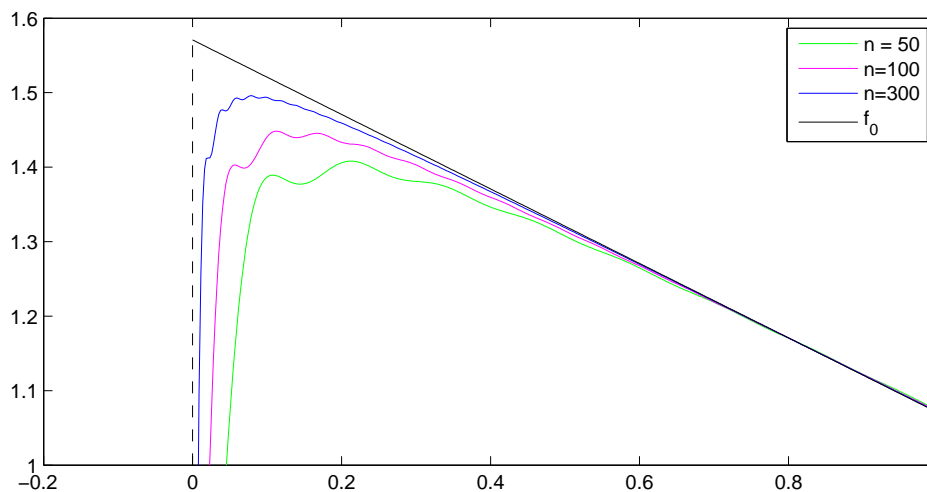
Per confronto con il **Paragrafo 2**, torniamo all'esempio da cui era partita la nostra analisi, cioè alla funzione  $2\pi$ -periodica  $f_0$  che vale  $f_0(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$  nell'intervallo  $[0, 2\pi)$ .

Riportiamo i grafici delle somme di FEJÉR  $\sigma_n(f_0)$  della funzione  $f_0$ , nell'intervallo  $[-4, 4]$  e per  $n = 50, 100, 300$ .

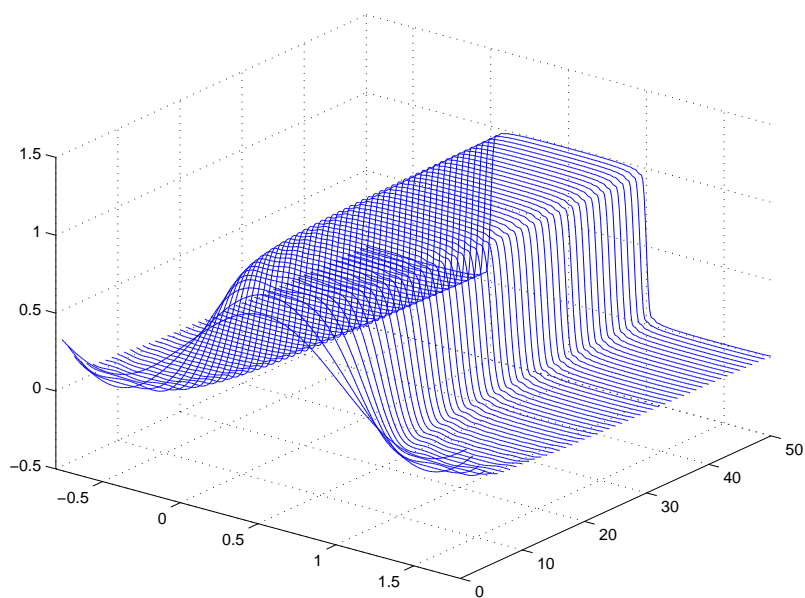


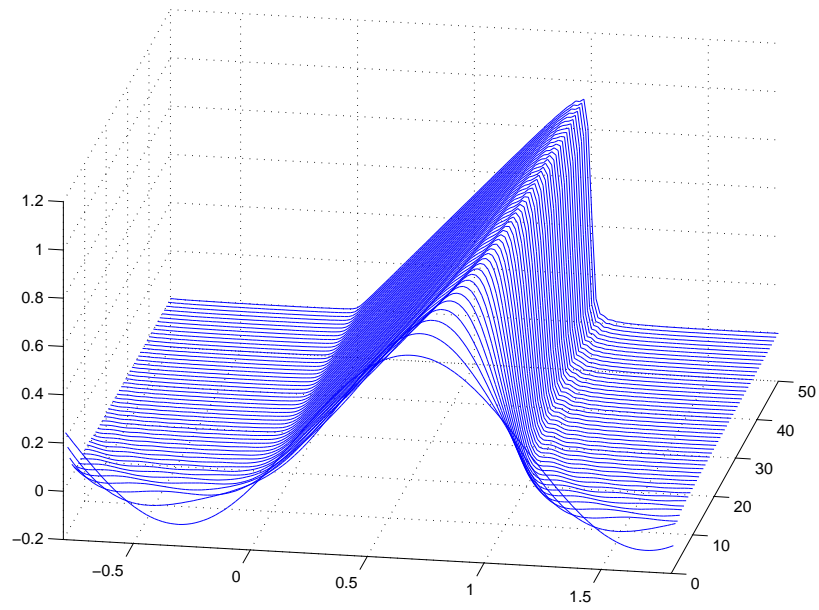
In effetti, i grafici questa volta non presentano l'anomalia dovuta al fenomeno di GIBBS: le immagini tramite  $f_0$  di un intorno prefissato dell'origine sono contenute nell'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , al quale sembrano tendere per  $n \rightarrow +\infty$ .

Ancora più convincente è l'esame di un ingrandimento del grafico precedente vicino al punto  $(0, \pi/2)$ :

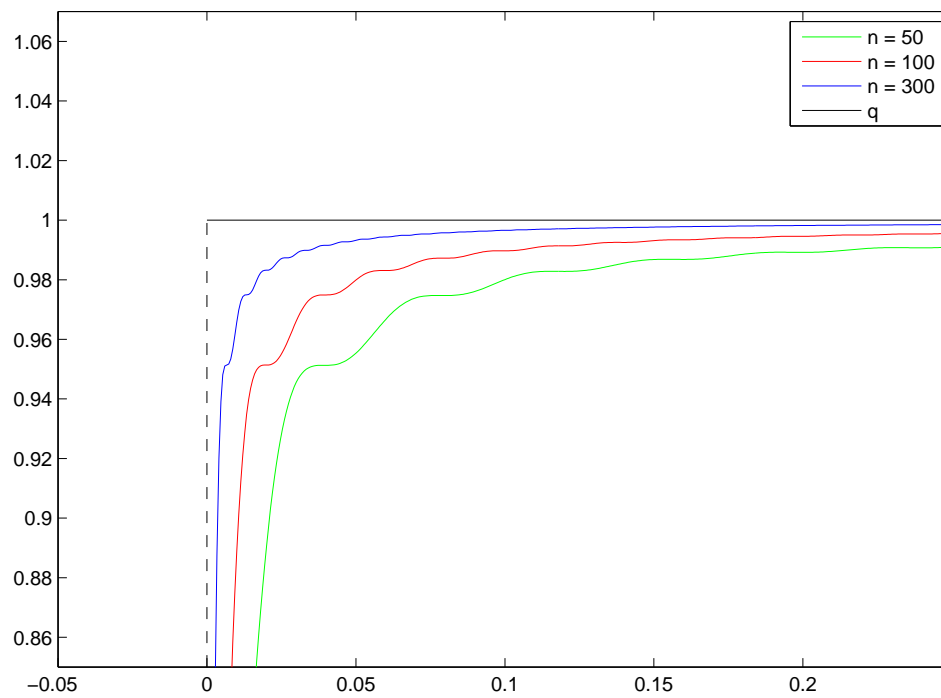


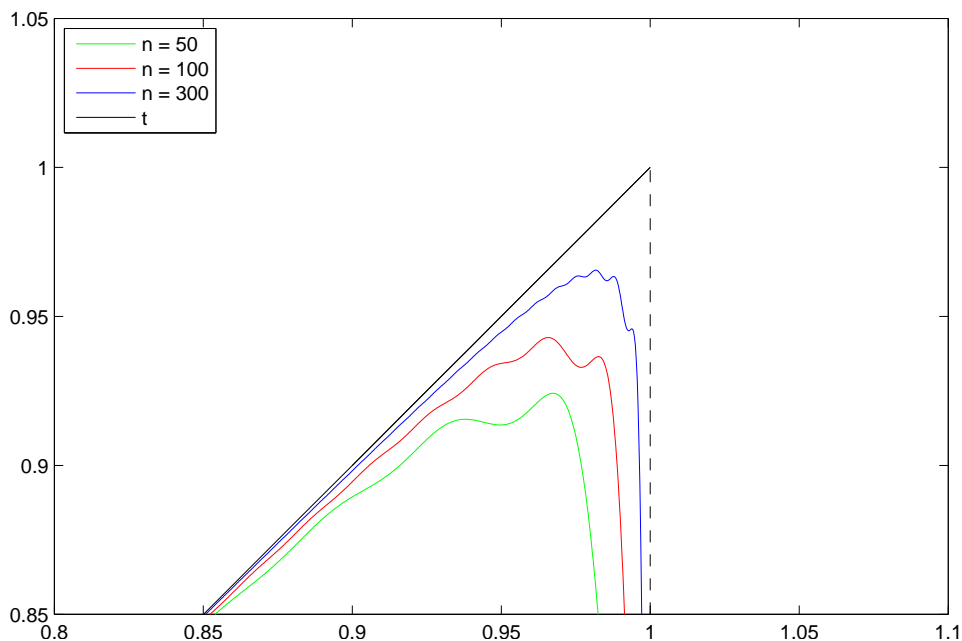
Le figure seguenti riportano una rappresentazione “di tipo tridimensionale” delle somme di FEJÉR dell’onda quadra  $(\sigma_{n+1}(q))$  e dell’onda semitriangolare  $(\sigma_{n+1}(t))$ , nell’intervallo  $(-.8, 1.8)$  e per  $n = 1, 2, \dots, 50$ ; è utile un confronto con i grafici, dati in precedenza, delle ridotte di FOURIER relative alle stesse funzioni.





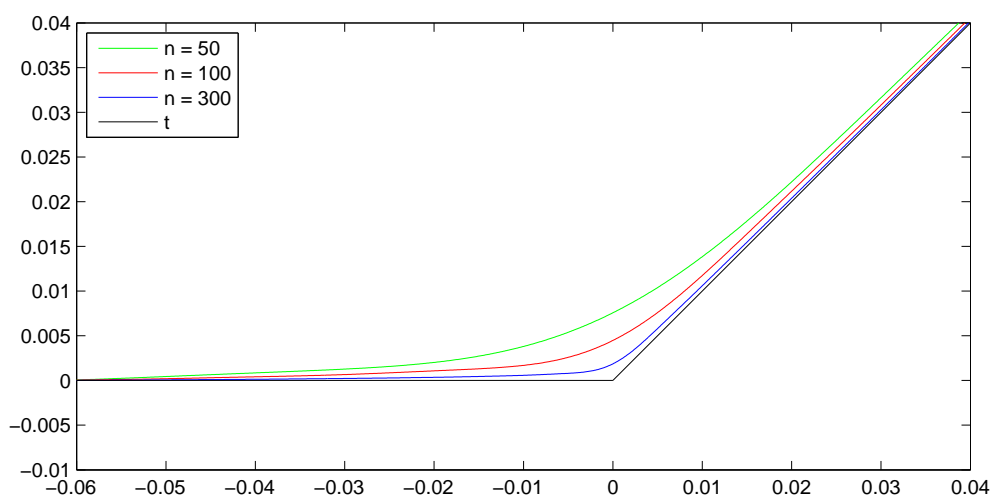
Sempre per confronto, riportiamo i grafici delle somme di FEJÉR  $\sigma_n(q)$  e  $\sigma_n(t)$ , per  $n = 50, 100, 300$ , nell'intorno rispettivamente di  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ :





I grafici precedenti illustrano un'altra caratteristica delle somme di FEJÉR: quella di *attenuare* drasticamente le piccole oscillazioni presentate dalle ridotte delle serie di FOURIER. Ciò è particolarmente evidente se si confrontano le rappresentazioni assonometriche relative sia all'onda quadra, sia all'onda semi-triangolare.

Una situazione analoga si presenta nel caso dei punti angolosi: riportiamo, ad esempio, il grafico delle  $\sigma_n(t)$  nell'intorno dell'origine, per  $n = 50, 100, 300$  (da confrontare con l'analogo grafico delle  $s_n(t)$ ):



Nel caso dell'onda quadra, le ridotte di FOURIER e di FEJÉR hanno una ulteriore particolarità: nell'intervallo  $(0, 1)$ , le curve  $y_1 := s_{2n-1}(q) = s_{2n}(q)$  e  $y_2 := \sigma_{2n}(q)$  sono *tangenti* nei punti di minimo relativo di  $y_1$ , mentre nell'intervallo  $(-1, 0)$  il grafico di  $y_1$  è tangente a quello di  $y_2$  nei punti di massimo relativo di  $y_1$  (che, ricordiamo dal **Paragrafo 3.2**, hanno ascisse date rispettivamente da  $x_h^{(n)} = h/n$ ,  $x_h^{(n)} = -h/n$  ( $h = 1, \dots, n-1$ )).

Dalla definizione di somme di FEJÉR,  $\forall x \notin \mathbb{Z}$  si ha

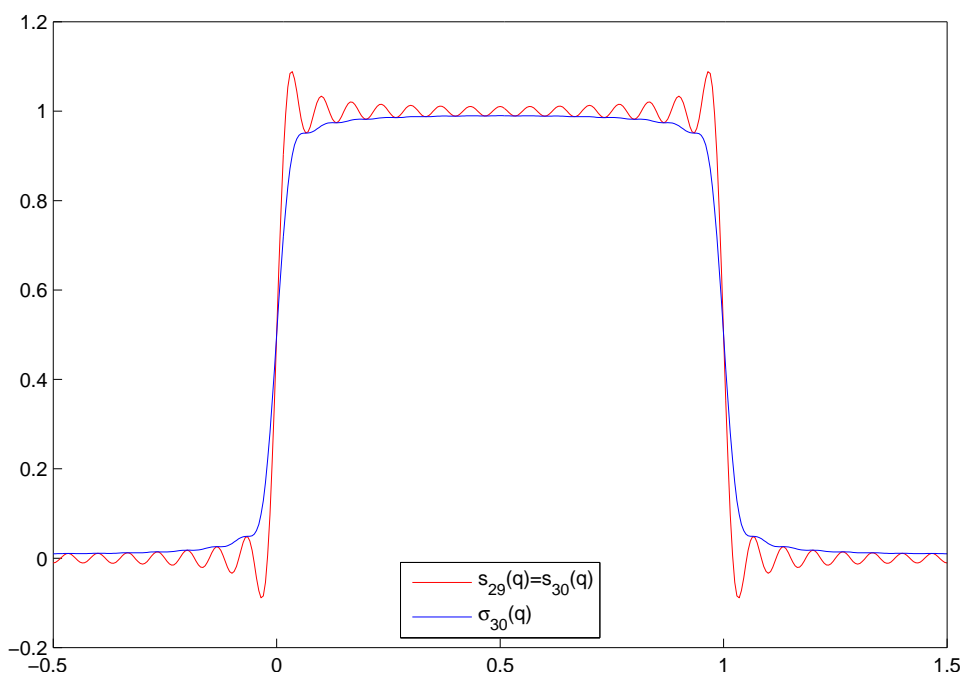
$$\begin{aligned} s_{2n}(q; x) - \sigma_{2n}(q; x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2n} = \frac{1}{4n \sin \pi x} \sum_{k=1}^n 2 \sin \pi x \sin(2k-1)\pi x = \\ &= \frac{1}{4n \sin \pi x} \sum_{k=1}^n [\cos 2(k-1)\pi x - \cos 2k\pi x] = \frac{1 - \cos 2n\pi x}{4n \sin \pi x}, \end{aligned}$$

quantità che si annulla per  $x = \mp h/n$ . Poiché poi

$$s'_{2n}(q; x) - \sigma'_{2n}(q; x) = \frac{2n\pi \sin 2n\pi x - \pi \cos \pi x (1 - \cos 2n\pi x)}{4n \sin^2 \pi x},$$

e  $s'_{2n}(q; \mp h/n) = 0$ , ne viene che  $\sigma'_{2n}(q; x) = 0$  per  $x = h/n$ , ( $h = \mp 1, \dots, \mp(n-1)$ ).

Riportiamo ad esempio i grafici, sovrapposti, di  $s_{29}(q) = s_{30}(q)$ ,  $\sigma_{30}(q)$ :



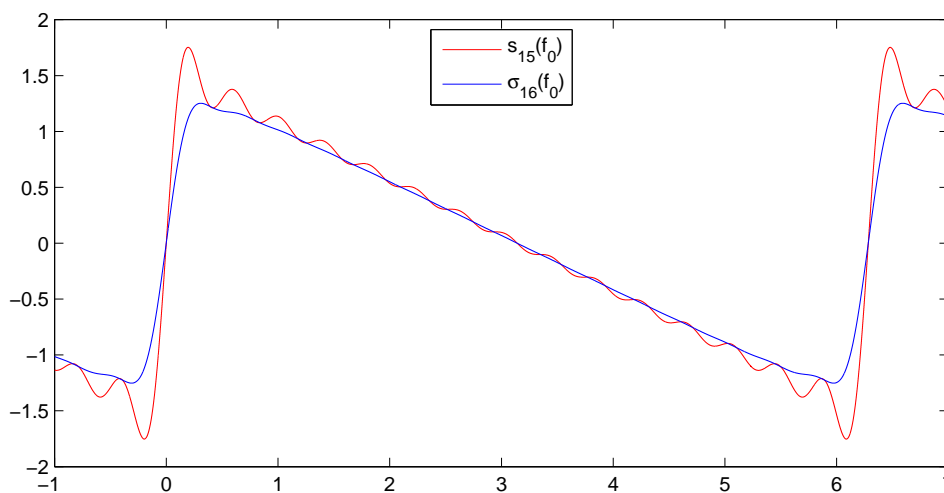
Questa situazione però non è di natura generale (è specifica dell'onda quadra). Ad esempio, per la funzione  $f_0$  introdotta nel **Paragrafo 1**, si ha che, in  $(0, 2\pi)$ , alcune delle intersezioni tra le due curve  $y_1 := s_n(f_0)$  e  $y_2 := \sigma_{n+1}(f_0)$  coincidono con punti che annullano la derivata di  $s_n(f_0)$  (ma non quella di  $\sigma_{n+1}(f_0)$ ).<sup>6</sup>

<sup>6</sup> il motivo per cui, *in generale*, occorre confrontare  $s_n$  con  $\sigma_{n+1}$ , non con  $\sigma_n$ , è evidente: nella definizione di  $\sigma_n$  non compare il termine  $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , presente invece in  $s_n$ .

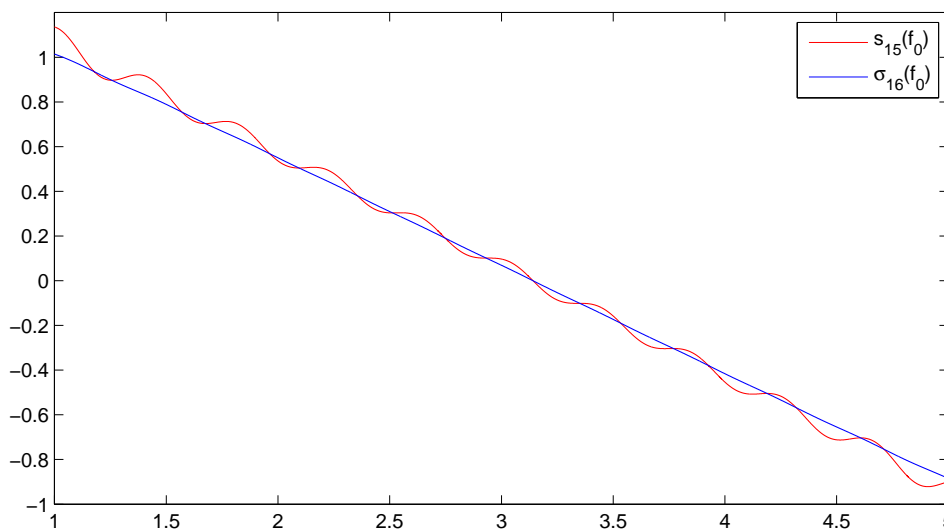
Consideriamo infatti il sistema

$$\begin{cases} s_n(f_0; x) = \sigma_{n+1}(f_0; x), \\ s'_n(f_0; x) = 0. \end{cases} \quad (0 < x < 2\pi)$$

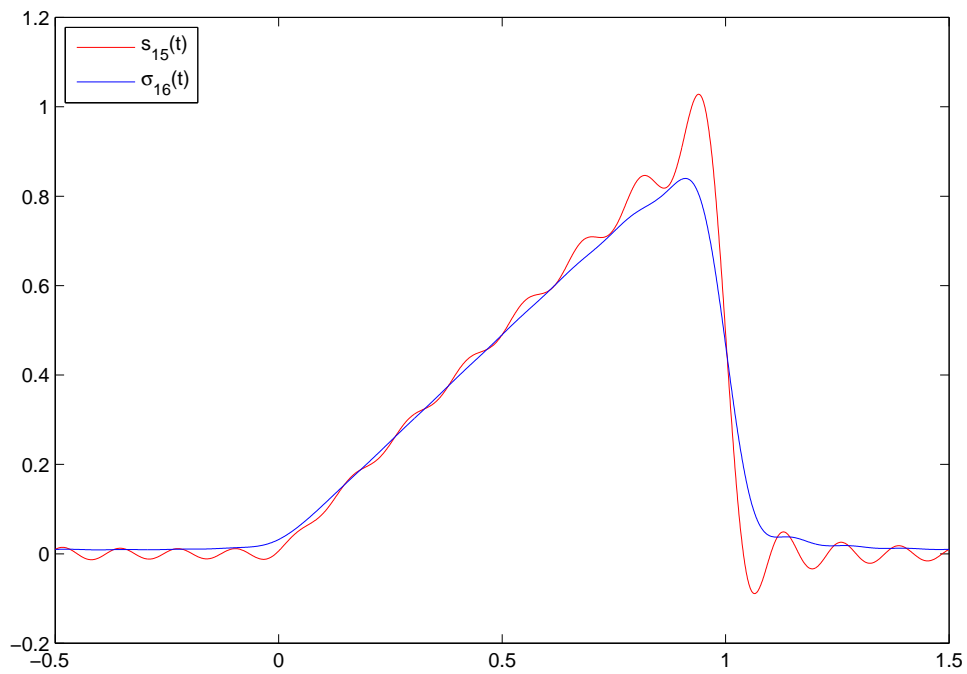
Ricordando che  $f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx/n$ , si vede facilmente che la prima equazione equivale a  $\sum_{k=1}^n \sin kx = 0$ , la seconda a  $\sum_{k=1}^n \cos kx = 0$ ; quindi, le soluzioni comuni verificano l'equazione  $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = 0$ . Dato che  $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix}(1 - e^{inx})/(1 - e^{ix})$ , ne viene che soluzioni del sistema sono i punti  $x = 2h\pi/n$ , con  $h = 1, \dots, n-1$ . Riportiamo i grafici di  $s_{15}(f_0)$  e  $\sigma_{16}(f_0)$ :



Un ingrandimento del grafico precedente, per  $1 \leq x \leq 5$ :



Per completezza, riportiamo, nella figura che segue, i grafici di  $s_{15}(t)$ ,  $\sigma_{16}(t)$ , dove  $t$  è la funzione studiata nel **Paragrafo 3.1**:



## 5 Cenni sulla teoria in $L^2$ .

### 5.1 Serie di Fourier in $L^2(-\pi, \pi)$ .

Nei Paragrafi precedenti abbiamo illustrato qualche aspetto della teoria “classica” delle serie di FOURIER; l’aggettivo “classica” sta ad indicare che il problema di studiare la *svilupparibilità in serie di FOURIER* di una assegnata funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  è stato impostato nell’ambito della *convergenza puntuale*. Abbiamo già osservato però che nella *definizione* di serie di FOURIER (**Definizione 2.1**) serve solo l’*integrabilità* (secondo LEBESGUE) di  $f$  su  $(-\pi, \pi)$ . Sembra quindi ragionevole chiedersi se i risultati di convergenza puntuale visti *nel caso di funzioni regolari a tratti* possano essere estesi, *in qualche forma opportuna*, a classi più generali di funzioni.

Quella più naturale sembrerebbe ovviamente lo spazio  $L^1(-\pi, \pi)$  delle (classi di equivalenza di) funzioni integrabili su  $(-\pi, \pi)$  (che, pensandole prolungate per periodicità, possiamo *identificare* ad elementi di  $L^1_{\#}$ ). È chiaro che la convergenza di tipo *puntuale ovunque* non è certo naturale in quest’ambito (d’altronde, si è visto (**Osservazione 2.2**) che può non essere verificata anche nel caso di una funzione  $2\pi$ -periodica e *continua*). Si può allora pensare di utilizzare la convergenza *puntuale*, ma *quasi ovunque*: invece, KOLMOGOROV ha mostrato che<sup>7</sup>

esiste una funzione in  $L^1_{\#}$  la cui serie di FOURIER *non converge in nessun punto*.

Ciò suggerisce di sostituire lo spazio  $L^1(-\pi, \pi)$  con qualche altro spazio *meno ampio*. Anche in vista delle applicazioni (*ad esempio*, alla Meccanica Quantistica, in cui gli spazi basilari non sono di tipo  $L^1$ , ma di tipo  $L^2$ ), in questo Paragrafo forniremo qualche prima indicazione sulle serie di FOURIER in  $L^2(-\pi, \pi)$ .

Ricordiamo che con  $L^2(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) si indica l’insieme delle *classi di equivalenza* (modulo la relazione di *uguaglianza q.o.*) delle funzioni  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  che verificano la condizione  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$ . Dalla disuguaglianza

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$$

discende che se  $f, g \in L^2(a, b)$  allora il prodotto  $f\bar{g}$  è *integrabile* su  $(a, b)$ . Ne viene altresì che se  $f, g$  sono in  $L^2(a, b)$ , lo è anche  $f + g$  (dato che, per quanto ora visto, risulta che  $|f(x) + g(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + 2|f(x)g(x)| + |g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2$ ). La quantità

$$(f, g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

<sup>7</sup> Si dimostra però che per ogni  $f$  integrabile in  $(-\pi, \pi)$  la successione  $\{\sigma_n(f)\}$  delle sue somme di FEJÉR tende ad  $f$  q.o. in  $(-\pi, \pi)$ , ed in *media integrale*:

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(f; x)| dx = 0.$$



è detta **prodotto scalare** di  $f$  con  $g$ , e verifica evidentemente <sup>8</sup> le proprietà formali del prodotto scalare in  $\mathbb{C}^n$ : per ogni  $f, g \in L^2(a, b)$  ed ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  si ha

$$(35) \quad \begin{cases} (f, f) \geq 0; & (f, f) = 0 \iff f = 0; & (f, g) = \overline{(g, f)}; \\ (\lambda f, g) = \lambda (f, g); & (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) \end{cases}$$

(per la seconda delle relazioni precedenti, si ricordi che gli elementi di  $L^2$  sono *classi d'equivalenza* di funzioni); poniamo poi  $\|f\|_2 := (f, f)^{1/2} (\geq 0)$ . Si ha che

**Teorema 5.1 (disuguaglianza di Schwarz)**  $\forall f, g \in L^2(a, b)$ , si ha

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2;$$

*l'uguaglianza vale se e solo se delle due funzioni  $f, g$  una è un multiplo dell'altra.*

**Dim.:** il risultato è ovvio se  $g = 0$  (si osservi che  $(f, 0) = (f, 0+0) = 2(f, 0)$ , da cui  $(f, 0) = 0$ ); se  $g \neq 0$ , posto  $h := \|g\|_2^2 f - (f, g)g$  si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 \leq \|h\|_2^2 &= (\|g\|_2^2 f - (f, g)g, \|g\|_2^2 f - (f, g)g) = \\ &= \|g\|_2^4 \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 \overline{(f, g)} (f, g) - (f, g) (g, f) \|g\|_2^2 + (f, g) \overline{(f, g)} \|g\|_2^2 = \\ &= \|g\|_2^2 \{ \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 - |(f, g)|^2 \}, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Ne discende facilmente che

**Proposizione 5.1** *L'applicazione  $f \mapsto \|f\|_2$  è una norma in  $L^2(a, b)$ , cioè verifica le seguenti proprietà:*

- i)  $\|f\|_2 \geq 0 \quad \forall f \in L^2 := L^2(a, b); \quad \|f\|_2 = 0 \iff f = 0;$
- ii)  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2 \quad \forall (f \in L^2, \lambda \in \mathbb{C});$
- iii)  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad \forall (f, g \in L^2).$

**Dim.:** le proprietà i) e ii) sono ovvie, grazie alle (35). Per quanto riguarda la iii), basta osservare che, grazie alla disuguaglianza di SCHWARZ,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|_2^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|_2^2 \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2|(f, g)| + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = \\ &= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Di conseguenza, la quantità  $\|f - g\|_2$  ha tutte le proprietà di una *distanza* (verifica immediata), quindi  $L^2(a, b)$  è in particolare uno *spazio metrico*, in cui hanno senso le nozioni di *successione convergente* e di *successione di CAUCHY*:

<sup>8</sup> con il prodotto scalare ora introdotto,  $L^2(a, b)$  è un modello canonico di una struttura, quella degli *spazi di HILBERT (separabili ed a dimensione infinita)*, che verrà trattata in altri Corsi.

**Definizione 5.1** La successione  $\{f_n\} \subset L^2(a, b)$  tende (**fortemente**) in  $L^2$  (o in media quadratica) ad  $f \in L^2$  se tende a zero la distanza in  $L^2$  tra  $f_n$  ed  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|_2^2 dx = 0;$$

in tal caso, si scrive  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  in  $L^2(a, b)$ , oppure  $L^2$ - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ , od anche  $f_n \xrightarrow{L^2} f$ .

Si dice poi che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge (**fortemente**) in  $L^2$  (o in media quadratica) ad  $s$  se la successione  $\{s_n\}$  delle sue ridotte tende ad  $s$  in  $L^2$ .

La successione  $\{f_n\} \subset L^2(a, b)$  verifica la **condizione di Cauchy in  $L^2$**  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (n > n_\varepsilon, r \in \mathbb{N}), \|f_{n+r} - f_n\|_2 < \varepsilon. \blacksquare$$

Si ricavano immediatamente le seguenti proprietà:

**Teorema 5.2** Se le successioni  $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L^2$  tendono rispettivamente ad  $f, g$  in  $L^2$ , allora:

- i*): per ogni  $h \in L^2$ , esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, h)$ , ed è uguale a  $(f, h)$ ;
- ii*): esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2$ , ed è uguale a  $\|f\|_2$ ;
- iii*): esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, g_n)$ , ed è uguale a  $(f, g)$ .

**Dim.:** *i*): segue subito dalla *disuguaglianza di SCHWARZ*, dato che

$$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2.$$

*ii*): basta osservare che, per la *i*),

$$\|f_n\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 - \|f\|_2^2 + (f, f_n) + (f_n, f) \rightarrow 0 - \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

*iii*): si ha infatti

$$\begin{aligned} |(f, g) - (f_n, g_n)| &\leq |(f, g) - (f_n, g)| + |(f_n, g) - (f_n, g_n)| = |(f - f_n, g)| + \\ &+ |(f_n, g - g_n)| \leq \|f - f_n\|_2 \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \|g - g_n\|_2; \end{aligned}$$

grazie alla *ii*), la successione numerica  $\{\|f_n\|_2\}$  è convergente, quindi limitata. Poiché  $\{\|f - f_n\|_2\}$  e  $\{\|g - g_n\|_2\}$  sono infinitesime per ipotesi, ne discende facilmente la conclusione. ■

È ovvio che ogni successione convergente è di CAUCHY. Grazie alle proprietà dell'integrale di LEBESGUE, si ha il risultato fondamentale

**Teorema 5.3** Lo spazio  $L^2(a, b)$  è **completo**: ogni successione di CAUCHY in  $L^2$  converge in media quadratica ad un elemento di  $L^2$ . ■

In  $L^2(-\pi, \pi)$ , conviene introdurre il seguente sistema di funzioni ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$(36) \quad e_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad e_{2n}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx; \quad e_{2n-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx;$$

dalla **Proposizione 1.1**, si ricava che  $\{e_n\}$  è un **sistema ortonormale** in  $L^2(-\pi, \pi)$ , cioè:

$$(37) \quad (e_n, e_m) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Risulta inoltre (nel senso della **Definizione 2.1**)

$$(38) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n) e_n(x) = s(f; x),$$

dove i numeri  $(f, e_n)$ , che si dicono **coefficienti di Fourier** di  $f$  rispetto al sistema ortonormale  $\{e_n\}$ , sono legati alle *costanti* di FOURIER dalle relazioni

$$(f, e_0) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (f, e_{2n}) = a_n \sqrt{\pi}, \quad (f, e_{2n-1}) = b_n \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Equivalentemente, si può introdurre il sistema, pure *ortonormale*, delle esponenziali normalizzate

$$\tilde{e}_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (n \in \mathbb{Z});$$

si ricavano facilmente le relazioni tra i coefficienti di FOURIER di  $f$  rispetto al sistema  $\{\tilde{e}_n\}$  e quelli rispetto ad  $\{e_n\}$ :

$$(f, \tilde{e}_0) = (f, e_0); \quad (f, \tilde{e}_{\mp n}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (f, e_{2n}) \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} (f, e_{2n-1}) \quad (n \in \mathbb{N});$$

risulta anche (si ricordino le (5)):

$$(f, \tilde{e}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = c_n \sqrt{2\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ogni polinomio trigonometrico si scrive (in modo equivalente) nella forma

$$(39) \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k e_k(x),$$

dove  $n$  è un intero, e  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono costanti. Ci poniamo il problema seguente:

- assegnata  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  e fissato  $n$ , determinare le costanti  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  in modo che sia minima la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  tra  $f$  ed il polinomio trigonometrico  $p_n(x) := \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k e_k(x)$ . •

Mostriamo che tale problema ha *una ed una sola soluzione*; precisamente:

**Teorema 5.4** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $\mathcal{P}_n$  l'insieme di tutte le funzioni della forma (39). Fissati  $n \in \mathbb{N}$  ed  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , la ridotta  $s_n(f)$  della serie di FOURIER di  $f$  è caratterizzata dall'essere la funzione in  $\mathcal{P}_n$  che ha minima distanza da  $f$  in  $L^2(-\pi, \pi)$ :

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - p_n\|_2 \quad \forall p_n \in \mathcal{P}_n.$$

**Dim.:** si osservi intanto che, grazie alle (35) e (37), per ogni  $p_n$  dato dalla (39) si ha

$$\begin{aligned}\|f - p_n\|_2^2 &= \left( f - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k e_k, f - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k e_k \right) = \\ &= \|f\|_2^2 - 2\Re \sum_{k=0}^{2n} \overline{\gamma_k} (f, e_k) + \sum_{k=0}^{2n} |\gamma_k|^2.\end{aligned}$$

In particolare (per  $\gamma_k = (f, e_k)$ ) si ha

$$(40) \quad \|f - s_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |(f, e_k)|^2;$$

ne viene allora che, se  $p_n$  è il generico polinomio trigonometrico della forma (39),

$$\begin{aligned}\|f - p_n\|_2^2 &= \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=0}^{2n} |(f, e_k)|^2 - 2\Re \sum_{k=0}^{2n} \overline{\gamma_k} (f, e_k) + \sum_{k=0}^{2n} |\gamma_k|^2 = \\ &= \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=0}^{2n} |(f, e_k) - \gamma_k|^2.\end{aligned}$$

Poiché l'ultima somma è costituita da addendi non negativi, il *minimo* di  $\|f - p_n\|_2$  è raggiunto se e solo se i  $\gamma_n$  sono proprio i coefficienti di FOURIER di  $f$  rispetto al sistema  $\{e_n\}$ . ■

Una prima interessante conseguenza della disuguaglianza (40) è la seguente:

esistono serie trigonometriche che convergono in tutto  $\mathbb{R}$ , ma *non* sono la serie di FOURIER di *nessuna* funzione in  $L^2(-\pi, \pi)$ .

Un semplice esempio è dato dalla serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

La convergenza per ogni  $x \in \mathbb{R}$  della serie deriva dal **Corollario 1.1** (la successione  $\{1/\ln n\}$  è decrescente ed infinitesima); ma se la somma della serie fosse una funzione  $f$  in  $L^2(-\pi, \pi)$ , si dovrebbe avere  $(f, e_{2n-1}) = \sqrt{\pi}/\ln n$ , e, per la (40),  $\|f\|_2^2 \geq \sum_{k=2}^n |(f, e_{2k-1})|^2 = \pi \sum_{k=2}^n (\ln k)^{-2}$  per ogni  $n$ , il che è assurdo perché si ha  $\sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)^{-2} = +\infty$ . (In realtà, si può anzi dimostrare che la somma della serie non è neppure *integrabile* in  $(-\pi, \pi)$ ).

Si noti che nella dimostrazione del **Teorema 5.4** si sono usate *unicamente* la definizione  $s_n(f) := \sum_{k=0}^{2n} (f, e_k) e_k$  e l'ortonormalità del sistema  $\{e_n\}$ , *non* la sua forma specifica. Il Teorema vale quindi anche se ad  $\{e_n\}$  si sostituisce un *qualsiasi* sistema ortonormale  $\{\eta_n\}$  nello spazio  $L^2(a, b)$ ; dalla (40) si deduce allora il seguente

**Corollario 5.1 (disuguaglianza di Bessel)** *Dato un sistema ortonormale  $\{\eta_n\}$  in  $L^2(a, b)$ , per ogni  $f \in L^2(a, b)$  la serie numerica di termine generale  $|(f, \eta_n)|^2$  è convergente, e vale la disuguaglianza di BESSEL*

$$(41) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |(f, \eta_n)|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad \blacksquare$$

Per estensione, dati in  $L^2(a, b)$  un sistema ortonormale  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ed una funzione  $f$ , si chiamano **coefficienti di Fourier di  $f$  rispetto al sistema  $\{\eta_n\}$**  i numeri  $\{(f, \eta_n)\}$ ; la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (f, \eta_n) \eta_n$  si dice **serie di Fourier di  $f$** , sempre **rispetto ad  $\{\eta_n\}$** . Si noti che la serie di FOURIER di  $f \in L^2$  è sempre convergente (in  $L^2$ ):

**Teorema 5.5** Dato un qualunque sistema ortonormale  $\{\eta_n\}$  in  $L^2(a, b)$ , per ogni  $f$  fissata in  $L^2(a, b)$  la serie di FOURIER  $\sum_{n=1}^{+\infty} (f, \eta_n) \eta_n$  converge sempre (in  $L^2$ ) ad una funzione  $g \in L^2(a, b)$ .

**Dim.:** posto  $S_n(f) := \sum_{k=1}^n (f, \eta_k) \eta_k$ , dalla (41) si ricava che  $\{S_n(f)\}$  è una successione in  $L^2(a, b)$  che verifica la condizione di CAUCHY: si osservi infatti che dall'ortonormalità di  $\{\eta_n\}$  discende che

$$\|S_{n+r}(f) - S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} |(f, \eta_k)|^2;$$

la conclusione segue dalla completezza di  $L^2(a, b)$ . ■

In generale, tuttavia,  $g$  non coincide, neppure q.o., con  $f$ : ad esempio, se  $b = -a = \pi$ ,  $\eta_n := e_{2n}$  ed  $f$  è una qualunque funzione dispari in  $L^2$ , la sua serie di FOURIER rispetto ad  $\{\eta_n\}$  è identicamente nulla. Da qui l'importanza della

**Definizione 5.2** Il sistema ortonormale  $\{\eta_n\}$  si dice **completo** in  $L^2(a, b)$  se, per ogni  $f \in L^2(a, b)$ , la serie di FOURIER di  $f$  rispetto ad  $\{\eta_n\}$  converge in  $L^2$  proprio ad  $f$ . ■

Sono estremamente utili le seguenti caratterizzazioni:

**Teorema 5.6** Dato il sistema ortonormale  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(a, b)$ , sono equivalenti le seguenti proprietà:

- i)  $\{\eta_n\}$  è completo in  $L^2(a, b)$ ;
- ii)  $\forall f \in L^2(a, b)$ , vale l'**identità di Parseval**

$$(42) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(f, \eta_n)|^2;$$

iii) se  $f \in L^2(a, b)$  è ortogonale ad  $\{\eta_n\}$ , cioè se  $(f, \eta_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , allora, q.o. in  $(a, b)$ , si ha  $f(x) = 0$ .

**Dim.:**  $i) \Rightarrow ii)$ : scriviamo la (40) con  $e_n$  sostituito da  $\eta_n$ ; se  $\{\eta_n\}$  è completo, passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene la (42).

$ii) \Rightarrow iii)$ : evidente.

$iii) \Rightarrow i)$ : fissata  $f \in L^2$ , indichiamo con  $S(f)$  l'elemento di  $L^2(a, b)$  cui converge la serie di FOURIER di  $f$  rispetto ad  $\{\eta_n\}$ . Fissato  $r \in \mathbb{N}$ , si ha, per ogni  $n \geq r$ ,

$$\left( f - \sum_{k=1}^n (f, \eta_k) \eta_k, \eta_r \right) = (f, \eta_r) - \sum_{k=1}^n (f, \eta_k) \delta_{k,r} = 0,$$

da cui, per il **Teorema 5.2, i)**,

$$(f - S(f), \eta_r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, dall'ipotesi 3) risulta che  $f = S(f)$ ; quindi il sistema è completo. ■

Si ha il seguente risultato fondamentale:

**Teorema 5.7** *Il sistema  $\{e_n\}$  della (36) è completo in  $L^2(-\pi, \pi)$ .*

**Dim.:** mostriamo che  $\{e_n\}$  verifica la condizione *iii)* del **Teorema 5.6**. Sia dunque  $f$  in  $L^2(-\pi, \pi)$  tale che  $(f, e_n) = 0$  per  $n = 0, 1, \dots$ . Indichiamo con  $\tilde{f}$  il suo prolungamento per  $2\pi$ -periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  (poniamo cioè  $\tilde{f}(x) := f(x - 2k\pi)$  se  $(2k - 1)\pi \leq x < (2k + 1)\pi$ ). Definiamo intanto

$$F(x) := \int_{-\pi}^x \tilde{f}(t) dt,$$

ed osserviamo che  $F$  è *continua* in  $\mathbb{R}$ , anzi derivabile q.o. con derivata  $F'(x) = f(x)$ , ed inoltre  $2\pi$ -periodica: infatti (si ricordi che  $F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sqrt{2\pi}(f, e_0) = 0$ ) si ha che

$$\begin{aligned} F(x + 2\pi) &= \int_{-\pi}^{x+2\pi} \tilde{f}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{x+2\pi} \tilde{f}(t) dt = \int_{-\pi}^x \tilde{f}(\tau + 2\pi) d\tau = \\ &= \int_{-\pi}^x f(\tau) d\tau = F(x). \end{aligned}$$

Si calcola poi immediatamente che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , poiché  $F(-\pi) = F(\pi) = 0$  si ha

$$(F, e_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[ \frac{1}{n} F(x) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right\} = 0;$$

$$\begin{aligned} (F, e_{2n-1}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[ \frac{1}{n} F(x) \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right\} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, se si pone  $\tilde{F}(x) := F(x) - (F, e_0) e_0(x)$ , si ha che  $\tilde{F}$  è continua,  $2\pi$ -periodica, e tutte le sue costanti di FOURIER sono nulle; grazie al **Corollario 2.1**, si ha  $\tilde{F}(x) = 0$ , quindi  $F$  è costante, e di conseguenza  $f = F' = 0$ . ■

Se ne deduce, evidentemente, che il sistema ortonormale  $\{\tilde{e}_n\}$  delle esponenziali complesse è anch'esso *completo* in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Si osservi che in  $L^2(a, b)$  sono ortonormali e completi i sistemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}}; \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos n\omega x; \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin n\omega x \right\}_{n \in \mathbb{N}}; \quad \left\{ \frac{e^{in\omega x}}{\sqrt{b-a}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

dove si è posto  $\omega := 2\pi/(b-a)$ .

Qualche osservazione finale. Il risultato principale di questo Paragrafo può essere sintetizzato nel modo seguente:

$$(43) \quad \boxed{\text{ogni funzione di } L^2(-\pi, \pi) \text{ è sviluppabile in serie di FOURIER in } L^2(-\pi, \pi)}$$

(rispetto al sistema  $\{e_n\}$ , o, equivalentemente,  $\{\tilde{e}_n\}$ ). È una formulazione semplice e suggestiva, però occorre comprenderne bene il significato, per evitare errori grossolani. A prima vista, infatti, la (43) sembra in evidente contrasto con quanto esposto nel **Paragrafo 2**, dove si era affermato che una funzione continua e  $2\pi$ -periodica (quindi, in particolare, tale che la sua restrizione a  $(-\pi, \pi)$  è in  $L^2(-\pi, \pi)$ ) *non sempre* è sviluppabile in serie di FOURIER. Ma la contraddizione è solo apparente: sono infatti radicalmente diverse *le due definizioni di convergenza* della successione  $\{s_n(f)\}$  ad  $f$ . Infatti, quella data nel **Paragrafo 2** è la convergenza *puntuale*, mentre quella del presente Paragrafo è la convergenza *in media quadratica*, che, ricordiamo, significa:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - s_n(f)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{2n} (f, e_k) e_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Orbene, è chiaro che quest'ultima convergenza *di tipo integrale* non *implica affatto* la convergenza *in ogni punto* di  $(-\pi, \pi)$ . Dai risultati generali validi per la convergenza in  $L^2$ , si può ricavare il risultato (molto più debole) che, per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  fissata, esiste una *sottosuccessione*  $s_{n_j}(f)$  tale che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} s_{n_j}(f; x) = f(x) \quad \text{q.o. in } (-\pi, \pi);$$

ma solo nel 1966 CARLESON è riuscito a dimostrare che l'*intera* successione  $\{s_n(f)\}$  converge ad  $f(x)$ , naturalmente però soltanto *quasi ovunque*.

Possiamo ora completare il risultato citato nell'**Osservazione 2.2**, riguardante la possibilità che una funzione  $f$ ,  $2\pi$ -periodica e continua in  $\mathbb{R}$ , *non* sia sviluppabile in serie di FOURIER in *tutto*  $\mathbb{R}$ . Grazie al Teorema di CARLESON, si può però concludere che in queste condizioni la serie  $s(f; x)$  converge *quasi ovunque* in  $\mathbb{R}$  ad  $f(x)$ . È interessante osservare che questo risultato *non è migliorabile*: in effetti, Jean-Pierre KAHANE e Yizhak KATZNELSON hanno dimostrato che, fissato ad arbitrio un sottoinsieme trascurabile  $I$  di  $(0, 2\pi)$ , esiste una funzione  $g$  continua su  $[0, 2\pi]$ , con  $g(0) = g(2\pi)$ , la cui serie di FOURIER non converge in *nessun punto* di  $I$ .

Infine, osserviamo che i sistemi  $\{e_n\}$  ed  $\{\tilde{e}_n\}$  non sono i soli che intervengono nelle applicazioni; si incontrano frequentemente sviluppi in serie rispetto ad *altri* sistemi di funzioni ortogonali in spazi di tipo  $L^2$  (quali i polinomi di LEGENDRE, le funzioni di ČEBYŠEV, di HERMITE, di LAGUERRE, ...) il cui studio però non rientra nello scopo di queste note.

## 5.2 Verso la trasformata di Fourier.

Accenniamo molto brevemente ad un argomento, la *trasformata di FOURIER*, che verrà illustrato in altri Corsi; qui lo scopo è principalmente di mostrarne i collegamenti con la teoria appena svolta delle *serie* di FOURIER.

La trattazione ha fin qui riguardato funzioni *periodiche*, o, più in generale, funzioni definite su un intervallo *limitato*, quindi prolungabili a tutto  $\mathbb{R}$  per periodicità. Ci chiediamo se sia possibile estendere, in qualche forma, la teoria al caso di funzioni da *tutto*  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  che siano *integrabili, ma non necessariamente periodiche*.

Osserviamo intanto che in  $L^1(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ), l'applicazione

$$f \mapsto \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

è una *norma* (cioè soddisfa le *i-iii*) della **Proposizione 5.1**, come è immediato verificare. La **Definizione 5.1** in questo caso si modifica nel modo seguente:

**Definizione 5.3** La successione  $\{f_n\}$  di funzioni in  $L^1(a, b)$  **tende in  $L^1$  (o in media integrale)** ad  $f \in L^1(a, b)$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx = 0;$$

in questo caso, scriviamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  in  $L^1(a, b)$ , o  $L^1$ - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ , od anche  $f_n \xrightarrow{L^1} f$ . La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  di funzioni  $f_n \in L^1(a, b)$  **converge ad  $s$  in  $L^1$  (o in media)** se la successione  $\{s_n\}$  delle sue ridotte tende ad  $s$  in  $L^1$ . ■

Se ora  $f$  è  $2T$ -periodica in  $\mathbb{R}$  ed integrabile in  $(-T, T)$ , è lecito definirne i coefficienti di FOURIER ( $f, \eta_n$ ) rispetto al sistema, ortonormale in  $L^2(-T, T)$ ,

$$\left\{ \eta_n(x) := \frac{e^{in\pi x/T}}{\sqrt{2T}} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

e risulta

$$(44) \quad (f, \eta_n) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\pi t/T} dt.$$

Si ha allora (si ricordi che nel caso delle esponenziali complesse si utilizzano le ridotte *simmetriche*)

$$(45) \quad f(x) \sim \frac{1}{2T} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \left( \int_{-T}^T f(t) e^{-in\pi t/T} dt \right) e^{in\pi x/T};$$

ma, come si è visto, senza ipotesi supplementari su  $f$  non è possibile affermare né che il limite scritto esista, né che, se esiste, valga proprio  $2Tf(x)$ .

Per ogni  $x$  fissato in  $\mathbb{R}$ , introduciamo la funzione  $\xi \mapsto F(\xi; x)$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  data da

$$(46) \quad F(\xi; x) := \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x}.$$

Poiché vogliamo, per il momento, solo ottenere dei *suggerimenti* sul come modificare le formule (44), (45), procediamo in modo *puramente formale*; beninteso, una volta individuata una formulazione plausibile, occorrerà *precisarne il senso e dimostrarne la validità*. Supponiamo che l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi; x) d\xi$  *esista*, e si possa approssimare con "somme del tipo di CAUCHY-RIEMANN", ma relative ad una partizione dell'intera retta (naturalmente, questo è uno dei punti solo *formali* del discorso). In particolare, prendendo come partizione quella data dai punti  $\{\xi_n := n\pi/T\}_{n \in \mathbb{Z}}$  (cosicché  $\Delta\xi = \pi/T$ ), e calcolando la funzione integranda nel primo estremo di ciascun intervallo della suddivisione, si avrebbe che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi; x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{T} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \int_{-T}^T f(t) e^{in\pi(x-t)/T} dt;$$



dalle (45), (46) discende che, se  $f$  è sviluppabile in serie di FOURIER,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Nel caso di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ma non necessariamente periodica (il che corrisponde, sempre *formalmente*, a  $T = +\infty$ ), è allora naturale considerare la funzione

$$(47) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt,$$

che è ben definita in  $\mathbb{R}$ , e si chiama **trasformata di Fourier**  $\hat{f}$  di  $f$ . I ragionamenti precedenti lasciano supporre che, *sotto opportune ipotesi*,  $f$  si possa a sua volta esprimere, in modo più o meno “simmetrico”, tramite  $\hat{f}$ . In effetti, vale il

**Teorema 5.8** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione integrabile che, nel punto  $x \in \mathbb{R}$ , verifica la **condizione del Dini bilatera**, cioè

$$(48) \quad \exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty;$$

allora vale la **formula di inversione**

$$(49) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

dove  $\hat{f}(\xi)$  è definita dalla (47).

Alla dimostrazione del teorema ora enunciato, premettiamo il seguente risultato.

**Lemma 5.1** La funzione  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  è integrabile in senso improprio su  $(0, +\infty)$ , cioè esiste finito il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt;$$

quindi esiste, per ogni  $y > 0$  fissato, anche l'integrale improprio su  $(-\infty, +\infty)$  di  $(\sin yt)/t$ ; inoltre, risulta

$$(50) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} dt = \pi \quad (\forall y > 0).$$

**Dim.:** per ogni  $n = 0, 1, \dots$ , poniamo

$$I_n := (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt,$$

cosicché  $(n+1)^{-1} < I_n < n^{-1}$ . Inoltre,

$$I_{n+1} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(\tau + \pi)|}{\tau + \pi} d\tau = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin \tau|}{\tau + \pi} d\tau < I_n;$$

per il *criterio di LEIBNIZ*, la serie a segni alterni  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$  è convergente (ma *non assolutamente*, per confronto con la serie armonica); si noti che

$\sum_{n=0}^N (-1)^n I_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ . Fissato ad arbitrio  $R > 0$ , sia  $N$  la parte intera di  $R/\pi$ ; si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n - \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt \right| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n I_n \right| + \left| \int_R^{(N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n I_n \right| + \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Nell'ultima quantità scritta, il secondo addendo tende evidentemente a zero per  $R \rightarrow +\infty$ ; e tende a zero anche il primo addendo, che è il valore assoluto del resto di una serie convergente. Dunque l'integrale improprio esiste (è uguale alla somma della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ ).

Vediamo ora di calcolarne il valore (anche se, come lo studente vedrà in altri Corsi, il modo più rapido per calcolare integrali come quello della (50) utilizza il *metodo dei residui*, relativo a funzioni *complesse di variabile complessa*).

In particolare, da quanto precede, con il cambiamento di variabile  $x = (n + (1/2))t$ , si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+(1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n + (1/2)t)}{t} dt.$$

Dato che il nucleo di DIRICHLET  $D_n$  è *pari*, si ha  $\int_0^\pi D_n(x) dx = \pi/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ; ne viene che

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right\} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Poichè però

$$\frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2 \sin(t/2)}{2t \sin(t/2)} = \frac{t^3/4 + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0+,$$

la funzione tra parentesi graffe nell'ultimo integrale è sommabile in  $(0, \pi)$ ; dunque, per il **Lemma 1.2**, il limite dell'integrale vale zero, il che dimostra la (50).

Osserviamo infine che, per ogni  $y > 0$  fissato, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin yt}{t} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{yR} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \blacksquare$$

**Dimostrazione del Teorema 5.8:** definiamo, per ogni  $y > 0$ ,

$$g(y; x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-y}^y \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Occorre dimostrare che il limite per  $y \rightarrow +\infty$  di  $g(y; x)$  esiste, ed è uguale ad  $f(x)$ . Osserviamo intanto che, scritto l'integrale precedente come somma degli integrali tra  $-y$  e  $0$ , e tra  $0$  e  $y$ , con il cambiamento di variabile  $\xi \mapsto -\xi$  nel primo dei nuovi integrali si ottiene che

$$\begin{aligned} g(y; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^y \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [e^{-i\xi(x-t)} + e^{i\xi(x-t)}] dt \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^y \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \xi(x-t) dt \right) d\xi. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di FUBINI, si ottiene che

$$\begin{aligned} g(y; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_0^y \cos \xi(x-t) d\xi \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(t) \frac{\sin \xi(x-t)}{x-t} \right]_0^y dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin y(x-t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) \frac{\sin y\tau}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Per il Lemma precedente, si ha, per ogni  $R > 0$ , posto  $A(R) := \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > R\}$ ,

$$\begin{aligned} g(y; x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-\tau) - f(x)}{\tau} \sin y\tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{f(x-\tau) - f(x)}{\tau} \sin y\tau d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{A(R)} \frac{f(x-\tau)}{\tau} \sin y\tau d\tau + \frac{1}{\pi} f(x) \int_{A(R)} \frac{\sin y\tau}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Il primo integrale dell'ultima espressione tende a zero per  $y \rightarrow +\infty$ : basta osservare che la funzione

$$\tau \mapsto \frac{f(x-\tau) - f(x)}{\tau}$$

è integrabile in  $(-R, R)$  (lo è, per la condizione del DINI bilatera, su un opportuno intervallo  $(-\delta, \delta)$ ; e lo è anche in  $(-R, R) \setminus (-\delta, \delta)$ , dove in modulo è maggiorata dalla funzione integrabile  $\frac{1}{\delta}(|f(x+\tau)| + |f(x)|)$ ), ed applicare il **Lemma 1.2**. Anche il secondo ed il terzo integrale tendono a zero per  $R \rightarrow +\infty$ : per il secondo, basta in effetti osservare che

$$\left| \int_{A(R)} \frac{f(x-\tau)}{\tau} \sin y\tau \, d\tau \right| \leq \frac{1}{R} \int_{A(R)} |f(x-\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| \, d\tau = \frac{\|f\|_1}{R},$$

mentre per l'ultimo la proprietà è ovvia, data l'integrabilità in senso improprio di  $\sin y\tau/\tau$  su  $\mathbb{R}$ . Di conseguenza, fissato  $\varepsilon > 0$  arbitrario si può intanto determinare  $R_0$  tale che per  $R > R_0$  il modulo della somma degli ultimi due integrali sia  $< \varepsilon/2$ ; fissato  $R > R_0$ , esiste  $y_0$  tale che per  $y > y_0$  il modulo del primo integrale sia anch'esso  $< \varepsilon/2$ ; in conclusione, per ogni  $y > y_0$  si ha allora  $|g(y; x) - f(x)| < \varepsilon$ , cioè la tesi. ■

La condizione (48) è *più restrittiva* della (25) con  $S_0 = f(x)$ : infatti, se è verificata la (48) si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} \, dt \leq \\ & \leq \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|}{t} \, dt = \\ & = \int_{-\delta}^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \, dt < +\infty. \end{aligned}$$

Tuttavia, la (25) può essere verificata senza che lo sia la (48), come mostra ad esempio (per  $x = 0$ ) la funzione  $f$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \text{ oppure } x = 0, \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Qualche considerazione sul limite che compare nella (49). Data una funzione  $\varphi$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ , *integrabile su ogni intervallo limitato*  $(a, b)$ , si chiama **valore principale** dell'integrale tra  $-\infty$  e  $+\infty$  di  $\varphi$  l'espressione

$$\mathbf{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, dx := \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y \varphi(x) \, dx,$$

naturalmente quando tale limite esiste ed è finito. È chiaro che se  $\varphi$  è integrabile in  $\mathbb{R}$ , allora il valore principale dell'integrale esiste, e coincide con il valore dell'integrale; non vale però, evidentemente, il viceversa (si pensi alla funzione  $\varphi(x) = x$ , o, in generale ad una funzione continua e *dispari*). Le formule che legano la funzione sommabile  $f$  alla sua trasformata di FOURIER  $\hat{f}$  si possono allora scrivere

$$(51) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi$$

**purché si sottintenda**<sup>9</sup> che il secondo integrale è inteso nel senso del suo valore principale. Tra l'altro, si noti che le due formule nella (51) hanno *significati completamente diversi*: la prima è una *definizione*, la seconda è l'*enunciato di un teorema*.

Non è detto però che la trasformata di FOURIER di una funzione di  $L^1(\mathbb{R})$  sia in  $L^1(\mathbb{R})$ : ad esempio, se  $\chi$  è la funzione caratteristica dell'intervallo limitato  $(a, b)$ , si ha  $\hat{\chi}(0) = (b - a)/\sqrt{2\pi}$ , e, per  $\xi \neq 0$ ,

$$\hat{\chi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\xi x}}{-2i\xi} \right]_a^b = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi\sqrt{2\pi}},$$

e  $\hat{\chi}$  evidentemente non è integrabile secondo LEBESGUE su  $\mathbb{R}$ .

Ci limitiamo ad enunciare *alcune* proprietà significative della trasformata di FOURIER<sup>10</sup> in  $L^1(\mathbb{R})$ :

**Teorema 5.9** *i) La trasformata  $\hat{f}$  di ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è uniformemente continua in  $\mathbb{R}$ , e tende a zero per  $|\xi| \rightarrow +\infty$ ;*

*ii) se  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$  tende ad  $f$  in  $L^1$ , allora  $\widehat{f_n}$  tende a  $\hat{f}$  uniformemente in  $\mathbb{R}$ ;*

*iii) se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è derivabile fino all'ordine  $n$ , e  $f', f'', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ , allora*

$$(52) \quad \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \quad (k = 1, \dots, n);$$

*iv) se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è tale che anche le funzioni  $xf(x), \dots, x^n f(x)$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f}$  è derivabile fino all'ordine  $n$ , e risulta*

$$(53) \quad (\hat{f})^{(k)}(\xi) = ((-ix)^k f(x))^\wedge(\xi) \quad (k = 1, \dots, n). \blacksquare$$

La proprietà *iii)* ha svariate applicazioni, perché permette di passare da un'equazione differenziale per la  $f$  ad un'equazione *ordinaria* per la sua trasformata  $\hat{f}$ . In termini intuitivi, la *iii)* stabilisce che, per  $|\xi| \rightarrow +\infty$ ,  $\hat{f}(\xi)$  tende a zero tanto più velocemente quanto più  $f$  è regolare, mentre la *iv)* mostra che vale anche il viceversa:  $\hat{f}$  è tanto più regolare, quanto più  $f(x)$  tende a zero rapidamente per  $|x| \rightarrow +\infty$ . Si comprende quindi come uno spazio *naturale* in cui studiare la trasformata di FOURIER sia lo spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  **delle funzioni a decrescenza rapida** (o **spazio di Schwartz**), definito come il sottoinsieme delle funzioni  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  tali che  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^n f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall (n, k \in \mathbb{N})$ ; in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , valgono le proprietà seguenti:

**Teorema 5.10** *i) Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , e le (52), (53) valgono per ogni  $n \in \mathbb{N}$  in tutto  $\mathbb{R}$ ;*

<sup>9</sup> ma non sarebbe male esplicitarlo, utilizzando –anziché la seconda delle (51)– la formula corretta  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ .

<sup>10</sup> per questioni tipografiche, indichiamo anche con  $f^\wedge$  la trasformata di FOURIER di  $f$ .

ii)  $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , vale  $\forall x \in \mathbb{R}$  la **formula di inversione**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi;$$

iii)  $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , vale la **formula di Parseval**

$$(54) \quad (f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = (\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

**Dim.:** la i) e la ii) sono evidenti. Per la iii): la funzione  $(x, \xi) \mapsto \hat{f}(\xi) \overline{g(x)} e^{i\xi x}$  è integrabile nel piano  $(x, \xi)$ , quindi, per il Teorema di FUBINI,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right) \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \right)} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \blacksquare \end{aligned}$$

Proprietà del tutto analoghe valgono in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  per la cosiddetta **antitrasformata di Fourier**  $f^\vee$ , così definita:

$$(55) \quad f^\vee(\eta) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\eta x} dx,$$

per la quale si hanno inoltre le seguenti proprietà (la prima delle quali spiega il termine “antitrasformata”)

**Teorema 5.11** i) Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si ha  $f = (f^\wedge)^\vee$  e  $f = (f^\vee)^\wedge$ .

ii) Per ogni  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si ha  $(f^\wedge, g) = (f, g^\vee)$ .

**Dim.:** i): la prima relazione non è altro che la formula di inversione, scritta con la notazione ora introdotta. Se indichiamo con  $\tau$  la trasformazione che manda la funzione  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nella funzione definita da  $(\tau h)(y) := h(-y)$ , per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si ha evidentemente che  $f^\vee = \tau \hat{f}$ ; si ha allora

$$\begin{aligned} (f^\vee)^\wedge(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^\vee(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau \hat{f})(y) e^{-ixy} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy = (f^\wedge)^\vee(x) = f(x), \end{aligned}$$

cioè  $(f^\vee)^\wedge = (f^\wedge)^\vee = f$ .

ii): la (54), scritta con  $g^\vee$  al posto di  $g$ , dà  $(f, g^\vee) = (f^\wedge, (g^\vee)^\wedge) = (f^\wedge, g)$ .  $\blacksquare$

Le trasformazioni (da  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in sé)  $f \mapsto f^\wedge$  e  $f \mapsto f^\vee$  sono quindi *suriettive*, e sono l’una l’inversa dell’altra.

Nel caso di  $L^2(\mathbb{R})$ , le cose sono più complicate, perché *non è detto* che una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sia *integrabile* in  $\mathbb{R}$ . È tuttavia possibile (ed in modo unico) estendere (in una forma opportuna!) la nozione di trasformata (e di antitrasformata) di FOURIER alle funzioni di  $L^2(\mathbb{R})$ ; la possibilità di tale estensione si basa sui risultati appena visti per la trasformata di FOURIER nell’ambito di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

nonché sulle seguenti proprietà di *densità* di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $L^1(\mathbb{R})$  ed in  $L^2(\mathbb{R})$ , che ci limitiamo ad enunciare:

$$(56) \quad \begin{cases} \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \exists \{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) : f_n \xrightarrow{L^2} f; \\ \forall g \in L^1(\mathbb{R}), \exists \{g_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) : g_n \xrightarrow{L^1} g. \end{cases}$$

L'idea è appunto di estendere la nozione di trasformata di FOURIER a tutto  $L^2(\mathbb{R})$  per *densità* e *continuità*. Fissata  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , esiste intanto, per la prima delle (56), una successione  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $L^2\text{-lim}_n \varphi_n = f$ . Grazie alla (54), la successione  $\{\widehat{\varphi}_n\}$  è di CAUCHY in  $L^2(\mathbb{R})$ , dato che

$$\|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}_m\|_2 = \|(\varphi_n - \varphi_m)^\wedge\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2;$$

dunque  $\widehat{\varphi}_n$  ammette limite in  $L^2(\mathbb{R})$ . Tale limite *dipende solo da  $f$* , non dalla particolare successione approssimante  $\{\varphi_n\}$  scelta: infatti, se  $\{\psi_n\}$  è un'altra successione in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $L^2\text{-lim}_n \psi_n = f$ , si ha  $\|\varphi_n - \psi_n\|_2 \rightarrow 0$ , dunque, ancora per la (54),  $\|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\psi}_n\|_2 \rightarrow 0$ , quindi  $\{\widehat{\varphi}_n\}$  e  $\{\widehat{\psi}_n\}$  hanno lo stesso limite. Indichiamo tale limite con  $\mathcal{F}f$ , e chiamiamo  $\mathcal{F}f$  **trasformata di Fourier di  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$** .

Si ponga attenzione al fatto che la definizione ora data significa che, per ogni successione  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $L^2\text{-lim}_n \varphi_n = f$ , risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}f)(\xi) - \widehat{\varphi}_n(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

e *non implica* che il limite *puntuale* delle  $\widehat{\varphi}_n(\xi)$  esista, neanche q.o. in  $\mathbb{R}$ . I risultati generali sulla convergenza in  $L^2$  mostrano tuttavia che esiste una *sottosuccessione*  $\{\widehat{\varphi}_{n_k}\}$  che tende a  $(\mathcal{F}f)(\xi)$  per quasi ogni  $\xi \in \mathbb{R}$ . Inoltre, vale la seguente estensione della (54):

**Teorema 5.12 (Plancherel)** Per ogni  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , si ha

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) \overline{(\mathcal{F}g)(\xi)} d\xi;$$

in particolare,

$$(57) \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Dim.:** se  $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  sono tali che  $L^2\text{-lim}_n \varphi_n = f$  e  $L^2\text{-lim}_n \psi_n = g$ , per il **Teorema 5.2, iii)** si ha che  $(\varphi_n, \psi_n)$  tende a  $(f, g)$ , e, analogamente, che  $(\widehat{\varphi}_n, \widehat{\psi}_n)$  tende a  $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$ . Grazie alla (54), si ha  $(\widehat{\varphi}_n, \widehat{\psi}_n) = (\varphi_n, \psi_n)$ , da cui la tesi. ■

Infine, controlliamo che *la definizione ora data di trasformata di FOURIER è coerente con le definizioni precedenti*: ciò è conseguenza del

**Teorema 5.13** Se  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\mathcal{F}f = \hat{f}$ .

**Dim.:** supponiamo dapprima che  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sia nulla fuori da un intervallo  $[-L, L]$ ; allora si ha anche  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , dunque esiste  $\hat{f}$  (anzi,  $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ ). Si può mostrare che esiste una successione  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che ogni  $\varphi_n$  è nulla fuori da  $[-L, L]$  e  $\varphi_n \xrightarrow{L^2} f$ . Ma allora si

ha anche  $\varphi_n \xrightarrow{L^1} f$ , (perché  $\|f - \varphi_n\|_1 \leq \sqrt{2L}\|f - \varphi_n\|_2$ ), quindi  $\widehat{\varphi_n} \rightarrow \widehat{f}$  uniformemente in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, per quanto visto in precedenza, esiste una sottosuccessione  $\{\widehat{\varphi_{n_k}}\}$  che tende a  $\widehat{f}$  q.o.; di conseguenza, per l'unicità del limite, si ha  $(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$  q.o. in  $\mathbb{R}$ . Se ora  $f$  è una qualsiasi funzione in  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , introduciamo la successione  $\{f_n\}$  delle sue "troncate a zero fuori da  $[-n, n]$ ", così definite:

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| \leq n, \\ 0 & \text{se } |x| > n; \end{cases}$$

si ha evidentemente che  $f_n \xrightarrow{L^2} f$  e  $f_n \xrightarrow{L^1} f$ . Inoltre, per il **Teorema 5.12**,  $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2 = \|f - f_n\|_2$ , quindi una sottosuccessione  $\mathcal{F}f_{n_k}$  tende a  $\mathcal{F}f$  q.o.; d'altra parte, per la prima parte della dimostrazione si ha che  $\mathcal{F}f_n = \widehat{f_n}$ , e sappiamo che  $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$  uniformemente; in conclusione, si ha  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$  q.o. in  $\mathbb{R}$ . ■

Ne discende anche l'ulteriore relazione espressa dal seguente

**Corollario 5.2** Per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , si ha  $\mathcal{F}f = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f_n}$ , dove  $f_n$  è la troncata a zero di  $f$  fuori da  $[-n, n]$ ; risulta quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (\mathcal{F}f)(\xi) - \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx \right|^2 d\xi = 0.$$

**Dim.:** poiché  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ , per la (57) si ha  $\|\mathcal{F}f - \widehat{f_n}\|_2 \rightarrow 0$ , cioè la tesi. ■

In modo del tutto analogo si procede per l'**antitrasformata di Fourier** in  $L^2(\mathbb{R})$ , che indichiamo con  $\overline{\mathcal{F}}f$ , della funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$ : precisamente,  $\overline{\mathcal{F}}f$  si definisce come  $L^2$ -limite di  $(\varphi_n)^\vee$ , dove  $\{\varphi_n\}$  è una qualunque successione di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  che tende ad  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Valgono gli analoghi del **Teorema 5.12**:

$$(f, g) = (\overline{\mathcal{F}}f, \overline{\mathcal{F}}g) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}); \quad \|f\|_2 = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

e del **Teorema 5.13**:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \implies \overline{\mathcal{F}}f = f^\vee,$$

nonché la relazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (\overline{\mathcal{F}}f)(x) - \int_{-n}^n f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right|^2 dx = 0.$$

Concludiamo con il seguente

**Teorema 5.14**  $\mathcal{F}$  e  $\overline{\mathcal{F}}$  sono isomorfismi suriettivi di  $L^2(\mathbb{R})$  su  $L^2(\mathbb{R})$ , e sono l'uno l'inverso dell'altro. Inoltre, vale il seguente collegamento tra  $\mathcal{F}$  e  $\overline{\mathcal{F}}$ :

$$(\mathcal{F}f, g) = (f, \overline{\mathcal{F}}g) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Dim.:** è evidente che  $\mathcal{F}$  è lineare ( $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$ ); sappiamo che è *iniettiva* (perché  $\mathcal{F}f = 0 \implies \|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2 = 0$ , quindi  $f = 0$ ), e che conserva il prodotto scalare (quindi la norma) in  $L^2(\mathbb{R})$ . Mostriamo che  $\mathcal{F}$  è *suriettiva*: data  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , sia  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $\varphi_n \xrightarrow{L^2} f$ . Poiché  $\|\overline{\mathcal{F}}\varphi_n - \overline{\mathcal{F}}\varphi_m\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$ , si ha che  $\{\overline{\mathcal{F}}\varphi_n\}$  tende in  $L^2(\mathbb{R})$  ad una funzione  $g$ . Ma allora, dato che  $\overline{\mathcal{F}}\varphi_n = (\varphi_n)^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi_n) = ((\varphi_n)^\vee)^\wedge = \varphi_n \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}g,$$

e, per l'unicità del limite, si ha che  $f = \mathcal{F}g$ .

Fissata ora ad arbitrio  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , sia  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $\varphi_n \xrightarrow{L^2} f$ ; procedendo come sopra, si vede che  $\mathcal{F}\varphi_n = \widehat{\varphi_n} \rightarrow \mathcal{F}f$ , quindi  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi_n) = ((\varphi_n)^\wedge)^\vee = \varphi_n \rightarrow \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$ , da cui  $f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$ . In modo analogo si verifica che  $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f) = f$ , sempre per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Se poi  $g$  è un'altra (arbitraria) funzione di  $L^2(\mathbb{R})$ , e  $\{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  è tale che  $\psi_n \xrightarrow{L^2} g$ , dalla *ii* del **Teorema 5.11** si ha che  $((\varphi_n)^\wedge, \psi_n) = (\varphi_n, (\psi_n)^\vee)$ , da cui, passando (come è possibile) al limite, risulta  $(\mathcal{F}f, g) = (f, \overline{\mathcal{F}}g)$ . ■

## 6 Qualche applicazione.

Sarebbe veramente troppo limitativo ritenere che le serie di FOURIER rappresentino *esclusivamente* uno strumento utile nell'analisi di un *segnale periodico*. In realtà, si utilizzano con successo in problemi di natura *estremamente varia*. Per motivi di tempo, accenniamo soltanto a due tra le (numerossime!) applicazioni.

### 6.1 Somma di serie numeriche.

Le serie di FOURIER possono essere utilizzate per il *calcolo esplicito* della somma di svariate serie numeriche. Ci limitiamo a qualche semplice esempio, cominciando dalle serie di FOURIER già esaminate nei precedenti Paragrafi.

1. Sia  $f_0$  la funzione definita dalla (15); abbiamo visto che, in particolare, risulta

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Scegliendo  $x = \pi/2$ , ed osservando che,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n, \\ (-1)^{n-1} & \text{se } k = 2n - 1, \end{cases}$$

si ricava la relazione<sup>11</sup>

$$(58) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Lo stesso risultato si ottiene utilizzando la serie di FOURIER dell'onda quadra; per  $x = 1/2$  si ha infatti che

$$s(q; 1/2) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi/2)}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

che ridà la (58).

2. Calcolando la serie di FOURIER dell'onda quadra per  $x = 1/\pi$ , si ottiene:

$$s(q; 1/\pi) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1},$$

e ne viene che

$$(59) \quad \sin 1 + \frac{\sin 3}{3} + \frac{\sin 5}{5} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Per  $x = 1/4$  si ha poi

$$s(q; \frac{1}{4}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right),$$

da cui

<sup>11</sup> la stessa formula si può ottenere, in modo però più elaborato, partendo dalla somma della serie geometrica  $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n y^{2n} = 1/(1+y^2)$  (con  $|y| < 1$ ), ed integrando tra 0 e  $x \in (0, 1)$ . Si ha infatti  $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ , e da qui, per  $x \rightarrow 1-0$  ed applicando il Teorema di ABEL, si riottiene la (58)).



$$(60) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \\ + \frac{1}{8n+1} + \frac{1}{8n+3} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+7} + \dots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

**3.** La (58) si riottiene anche calcolando la serie di FOURIER dell'onda semitriangolare per  $x = 1/2$ , dato che

$$s(t; 1/2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Calcolando invece  $s(t; x)$  per  $x = 0$ , si ottiene

$$s(t; 0) = 0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

da cui si ricava la formula

$$(61) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Se ne deduce facilmente che

$$(62) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

si ha infatti, per la (61),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

da cui la (62).

**4.** Sia  $g$  la funzione  $2\pi$ -periodica che per  $x \in [-\pi, \pi]$  vale  $x^2$ ; è evidentemente continua, regolare a tratti e pari, quindi sviluppabile in *serie di coseni* per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . I coefficienti del suo sviluppo si calcolano facilmente: si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , (integrando per parti),

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left\{ \left[ -\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right\} = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}; \end{aligned}$$

quindi,

$$g(x) = s(g; x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

In particolare, per  $x = 0$  si ottiene

$$(63) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

mentre per  $x = \pi$  si ritrova la (62), dato che

$$g(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Indichiamo con  $h$  la funzione  $2\pi$ -periodica che per  $x \in [-\pi, \pi]$  vale  $|x|$ , anch'essa sviluppabile in *serie di coseni* per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Calcoliamo i coefficienti del suo sviluppo:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1],$$

di modo che

$$(64) \quad h(x) = s(h; x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x = 0$  si ritrova così la (61).

Anche l'identità di PARSEVAL può essere utilizzata per il calcolo della somma di serie numeriche, come ora mostriamo. Si faccia però attenzione ad utilizzare i coefficienti di FOURIER rispetto ad un sistema trigonometrico *normalizzato*, cioè costituito da vettori *di norma 1* (come ad esempio, nel caso di  $L^2(-\pi, \pi)$ , il sistema (36)).

6. In  $L^2(-1, 1)$ , è *ortonormale* il sistema  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos n\pi x; \sin n\pi x\}$ ; conviene allora scrivere lo sviluppo di FOURIER dell'onda quadra nella forma

$$s(q; x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)\pi x,$$

in modo da mettere in evidenza i *coefficienti* di FOURIER rispetto al sistema. Dall'identità di PARSEVAL si ottiene che

$$\|q\|_2^2 = 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2},$$

da cui si ritrova subito la (61).

7. Sempre in  $L^2(-1, 1)$ , scritta la serie di FOURIER dell'onda semitriangolare nella forma

$$s(t; x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x,$$

si ha, ricordando la (62),

$$\begin{aligned} \|t\|_2^2 &= \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^4(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

e ne viene che

$$(65) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Procedendo come nell'Esempio 3, si trova che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

da cui

$$(66) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

8. Lo stesso risultato si riottiene applicando l'identità di PARSEVAL alla funzione  $f$  considerata nell'Esempio 4. Si ha infatti

$$s(f; x) = \frac{\pi^2 \sqrt{2\pi}}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n \sqrt{\pi}}{n^2} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},$$

da cui

$$\|f\|_2^2 = 2 \int_0^\pi x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16\pi}{n^4},$$

quindi la (66); se ne deduce poi, procedendo analogamente a quanto visto sopra, anche la (65).

9. In alternativa, si può utilizzare lo sviluppo dell'Esempio 5: poiché

$$s(g; x) = \frac{\pi \sqrt{2\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n \sqrt{\pi}}{(2n+1)^2} \frac{\cos(2n+1)x}{\sqrt{\pi}},$$

ne viene che

$$\|g\|_2^2 = 2 \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16\pi}{(2n+1)^4};$$

si riottiene così la (65), e successivamente la (66).

## 6.2 L'equazione del calore unidimensionale.

Non possiamo non dare almeno un rapido cenno ad una delle più fruttuose applicazioni delle serie di FOURIER, quella alle equazioni a derivate parziali. Per semplicità, ci limiteremo all'esame degli aspetti più elementari di un caso particolare, che tra l'altro ha motivato FOURIER ad introdurre le serie che portano il suo nome.

Consideriamo un cilindro retto, di materiale omogeneo e conduttore del calore, di altezza  $L$ . Supponiamo che, in ogni sezione retta del cilindro, la temperatura  $U$  sia *costante* (come accade, ad esempio, se il raggio del cilindro è trascurabile rispetto ad  $L$ ), quindi dipenda solo dalla distanza  $x$  dalla base ( $0 \leq x \leq L$ ), oltre che, beninteso, dal tempo  $t$ . Se il cilindro ha la superficie laterale termicamente isolata, quindi può ricevere o cedere calore solo attraverso

la basi (cioè, solo se  $x = 0$  oppure  $x = L$ ), ad ogni istante  $t > 0$  la temperatura  $U$  deve verificare l'**equazione del calore**, o *equazione di FOURIER*

$$(67) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, \quad t > 0),$$

dove  $k$  è una costante positiva che dipende dalle caratteristiche fisiche del materiale, e che per semplicità nel seguito supporremo uguale ad 1. Sempre per semplicità, supponiamo che le basi del cilindro vengano mantenute a temperatura nulla; vanno allora aggiunte, come **condizioni ai limiti**, quelle *di DIRICHLET (omogenee)*<sup>12</sup>

$$(68) \quad U(0, t) = U(L, t) = 0 \quad (t > 0).$$

Infine, si deve supporre nota la distribuzione iniziale (cioè, per  $t = 0$ ) della temperatura nel corpo, il che equivale ad imporre la **condizione iniziale**

$$(69) \quad U(x, 0) = U_0(x) \quad (0 < x < L),$$

con  $U_0$  funzione assegnata. Siamo quindi ricondotti allo studio del sistema

$$(70) \quad \begin{cases} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, \quad t > 0, \\ U(0, t) = U(L, t) = 0 & \text{per } t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{per } 0 < x < L, \end{cases}$$

che si chiama **primo problema ai limiti**, o **problema ai limiti del tipo di CAUCHY-DIRICHLET** per l'equazione del calore (in una dimensione spaziale, con dati di DIRICHLET omogenei).

Per formulare in termini matematicamente corretti il problema, occorre intanto precisare la definizione di *soluzione*, specificando le condizioni di *regolarità* che si richiedono ad  $U$ , nonché *il senso* in cui vanno intese le (70). Una volta definita con esattezza la nozione di soluzione, ci proponiamo di arrivare ad un *teorema di esistenza ed unicità*, per il quale occorre stabilire un opportuno *quadro funzionale*. Vogliamo cioè individuare una coppia di spazi,  $\mathcal{U}_0$  (spazio dei dati iniziali) ed  $\mathcal{U}$  (spazio delle soluzioni), in modo che si possa dimostrare (almeno) il seguente risultato:

- per ogni  $U_0 \in \mathcal{U}_0$ , esiste un'unica  $U \in \mathcal{U}$  soluzione delle (70). •

Nel programma precedente c'è, come si vede, *una certa libertà* sia per quanto riguarda la definizione di soluzione, sia per quanto riguarda la scelta di  $\mathcal{U}_0$  e di  $\mathcal{U}$ . Naturalmente, ci sono però degli evidenti vincoli. Scegliere uno spazio  $\mathcal{U}$  molto "ampio", cioè dare una definizione di soluzione molto "debole", facilita la

<sup>12</sup> evidentemente, sono però possibili numerose varianti: ad esempio, le condizioni di DIRICHLET *non omogenee*  $U(0, t) = g_1(t)$ ,  $U(L, t) = g_2(t)$  traducono la situazione, più generale, in cui le basi del cilindro sono mantenute rispettivamente alle temperature (dipendenti dal tempo)  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ . Invece, il caso in cui anche le basi sono termicamente isolate si formula imponendo le *condizioni di NEUMANN (omogenee)*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (t > 0).$$

possibilità che una soluzione *esista*, ma rischia di farne cadere l'*unicità*. Viceversa, una scelta molto restrittiva di  $\mathcal{U}$  gioca a favore dell'*unicità*, ma rischia di compromettere l'*esistenza*. Analoghi problemi si presentano per la scelta dello spazio dei dati. Se  $\mathcal{U}_0$  è molto ampio, può succedere che per qualche  $U_0 \in \mathcal{U}_0$  non valga un risultato di esistenza; d'altra parte, più piccolo è lo spazio  $\mathcal{U}_0$ , minore è la generalità del risultato, quindi più ristretto è il suo campo di applicabilità.

È chiaro che, pur con le cautele dovute ai motivi ora esposti, si possono ipotizzare molte formulazioni del problema. Ci limiteremo a qualche cenno sulla formulazione in ambito classico. Una scelta abbastanza naturale e non troppo restrittiva per  $\mathcal{U}$  sembrerebbe quella delle funzioni

$$(71) \quad U : Q_\infty \rightarrow \mathbb{R}; \quad U, U_t, U_x, U_{xx} \in C^0(Q_\infty) \quad (Q_\infty := (0, L) \times (0, +\infty));$$

si intenderà allora come *soluzione* una funzione  $U \in \mathcal{U}$  che verifica la prima equazione nelle (70) per ogni  $(x, t) \in Q_\infty$ , e le altre due nel senso che

$$(72) \quad \begin{cases} U(0+, t) = U(L - 0, t) = 0 & \forall t > 0, \\ U(x, 0+) = U_0(x) & \forall x \in (0, L). \end{cases}$$

Però questa impostazione, anche se molto spontanea, presenta una difficoltà, forse inaspettata, ma seria al punto da compromettere l'intero programma:

esistono soluzioni (nel senso sopra esposto) *non identicamente nulle* del problema *completamente omogeneo* (cioè con  $U_0 = 0$ );

vedremo più avanti un esempio.

Ciò comporta la *manca* di *unicità* della soluzione del problema (70), che evidentemente non è accettabile dal punto vista fisico.

Questa difficoltà, come ora vedremo, *scompare* se si impone alla soluzione di essere *globalmente continua*: assumiamo allora la seguente formulazione, più restrittiva:

**Definizione 6.1** Una **soluzione** del problema (70) è una funzione  $U$  tale che

$$(73) \quad \begin{cases} U \in C^0(\overline{Q_\infty}); & U_t, U_x, U_{xx} \in C^0(Q_\infty); \\ U_t(x, t) = U_{xx}(x, t) & \forall (x, t) \in Q_\infty; \\ U(0, t) = U(L, t) = 0 & \forall t \geq 0; \\ U(x, 0) = U_0(x) & \forall x \in [0, L]. \blacksquare \end{cases}$$

Le proprietà di regolarità richieste alla soluzione rendono evidente il senso in cui sono verificate l'equazione, la condizione iniziale e le condizioni ai limiti omogenee di DIRICHLET.

A questo punto, si presenta però un altro problema, relativo questa volta all'*esistenza* di una soluzione, e che si riflette sulle condizioni da imporre al dato iniziale  $U_0$ . Infatti, perché una soluzione *esista* è evidentemente *necessario* che  $U_0$  sia in  $C^0([0, L])$ , e che risulti  $U_0(0) = U_0(L) = 0$ . *Assumiamo allora questa ipotesi*, e cerchiamo qualche indicazione su *come* risolvere il problema.

Prolunghiamo intanto la definizione di  $U_0$  a tutto  $\mathbb{R}$ : precisamente, indichiamo con  $u_0$  la funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$ , dispari e  $2L$ -periodica, che coincide con  $U_0$  su  $[0, L]$  (si ricordi l'**Osservazione 2.1**). Siamo così ricondotti allo studio del *problema ai valori iniziali*

$$(74) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supponiamo che il problema ammetta un'unica soluzione  $u$ , "sufficientemente regolare", dispari e  $2L$ -periodica nella variabile  $x$ ; sviluppandola, per ogni  $t > 0$  fissato, in serie di FOURIER

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin n\omega x \quad (\omega := \pi/L),$$

dalla prima delle (74) si ricava che deve essere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b'_n(t) + n^2\omega^2 b_n(t)) \sin n\omega x = 0.$$

Poiché tale uguaglianza deve valere per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , siamo così ricondotti a risolvere le equazioni differenziali *ordinarie*

$$(75) \quad b'_n(t) + n^2\omega^2 b_n(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N});$$

si calcola subito che  $b_n(t) = b_n e^{-n^2\omega^2 t}$ , quindi

$$(76) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\omega^2 t} \sin n\omega x,$$

dove le costanti  $b_n$  sono da determinare imponendo la condizione iniziale. Dato che  $u(x, 0) = \sum_n b_n \sin n\omega x$ , se ne deduce che  $b_n$  sono le *costanti di FOURIER* di  $U_0$  rispetto al sistema  $\{\sin n\omega x\}$ :

$$(77) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(y) \sin n\omega y \, dy.$$

Se  $U_0$  è *svilupicabile in serie di FOURIER* di soli seni, le considerazioni precedenti *suggeriscono* per la soluzione del problema di CAUCHY-DIRICHLET (70) l'espressione

$$(78) \quad U(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^L U_0(y) \sin n\omega y \, dy \right) e^{-n^2\omega^2 t} \sin n\omega x.$$

Naturalmente, si tratta ora però di *verificare* che, in opportune ipotesi su  $U_0$ , la formula precedente fornisce *effettivamente* una soluzione (anzi, si spera, **la** soluzione) del problema (70); un primo passo è costituito dal seguente

**Teorema 6.1** Per ogni fissata  $U_0$  continua e regolare a tratti in  $[0, L]$ , con  $U_0(0) = U_0(L) = 0$ , la funzione  $U$  data dalla (78)

i) è in  $C^0([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$ ;

ii) è una soluzione del problema di CAUCHY-DIRICHLET (70).

**Dim.:** la (78) si scrive nella forma

$$(79) \quad U(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin n\omega x,$$

dove

$$(80) \quad b_n(t) := b_n e^{-n^2\omega^2 t} = \frac{2}{L} \left( \int_0^L U_0(y) \sin n\omega y dy \right) e^{-n^2\omega^2 t}.$$

Fissiamo ad arbitrio  $\delta, T$  con  $T > \delta > 0$ ; per il Lemma di RIEMANN-LEBESGUE, la successione  $\{b_n\}$  è infinitesima, quindi limitata:  $\exists M : |b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Di conseguenza, il termine generale della serie a secondo membro della (79) è maggiorato in modulo, nel rettangolo  $[0, L] \times [\delta, T]$ , da  $M e^{-n^2\omega^2\delta}$ , termine generale di una serie numerica convergente. Per il criterio di WEIERSTRASS, la serie converge uniformemente, perciò  $U$  è continua, in  $[0, L] \times [\delta, T]$ , e, per l'arbitrarietà di  $\delta, T$ , in  $[0, L] \times (0, +\infty)$ . In modo analogo si dimostra, procedendo per induzione, che  $U \in C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$ ; basta osservare che in  $[0, L] \times [\delta, T]$  si ha, per ogni  $h, k \in \mathbb{N}$  fissati,

$$|D_t^h D_x^k (b_n(t) \sin n\omega x)| \leq M (n\omega)^{2h+k} e^{-n^2\omega^2\delta}.$$

Poiché il termine generale della serie in (79) verifica l'equazione del calore (si veda la (75)), ne viene che anche  $U$  è soluzione dell'equazione del calore (67) (con  $k = 1$ ).

Per completare la dimostrazione, basta mostrare che la serie che compare a secondo membro della (79) converge *uniformemente* nella semistriscia chiusa  $\overline{Q_\infty}$ . Ne verrà allora, infatti, che  $U$  è anche in  $C^0(\overline{Q_\infty})$ , soddisfa evidentemente la condizione ai valori iniziali (69), ed inoltre le condizioni di DIRICHLET (68), dato che, per ogni  $n$  fissato,

$$[b_n \sin n\omega x]_{x=0} = [b_n \sin n\omega x]_{x=L} = 0.$$

Indichiamo con  $u_n(x)$  la ridotta  $n$ -esima della serie di FOURIER di  $U_0$  ( $u_n = s_n(U_0)$ ), e poniamo  $\alpha_n(t) := e^{-n^2\omega^2 t}$ ; si ha allora che  $u_n$  tende ad  $U_0$  *uniformemente* in  $[0, L]$  (**Teorema 2.3**), e per ogni  $t \geq 0$  la successione  $\{\alpha_n(t)\}$  è *non crescente*. Se  $U_n$  è la ridotta  $n$ -esima della serie nella (79), si ha, per ogni  $n \in \mathbb{N}, r > 0$ ,

$$\begin{aligned} U_{n+r}(x, t) - U_n(x, t) &= \sum_{k=n+1}^{n+r} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \alpha_k(t) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+r} (u_k(x) - u_n(x)) \alpha_k(t) - \sum_{k=n+1}^{n+r} (u_{k-1}(x) - u_n(x)) \alpha_k(t) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+r} (u_k(x) - u_n(x)) \alpha_k(t) - \sum_{k=n}^{n+r-1} (u_k(x) - u_n(x)) \alpha_{k+1}(t) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+r-1} (u_k(x) - u_n(x)) (\alpha_k(t) - \alpha_{k+1}(t)) + \\ &+ (u_{n+r}(x) - u_n(x)) \alpha_{n+r}(t). \end{aligned}$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , per la convergenza uniforme di  $\{u_n\}$  esiste  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall(n > n_\varepsilon, r \in \mathbb{N})$  risulti

$$|u_k(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, L], \quad (k = n+1, \dots, n+r);$$

dato che  $\{\alpha_n\}$  è non crescente (e  $0 < \alpha_n(t) \leq 1$ ), si ha quindi,  $\forall(x \in [0, L], t \geq 0)$ ,

$$|U_{n+r}(x, t) - U_n(x, t)| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+r-1} (\alpha_k(t) - \alpha_{k+1}(t)) + \varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

che prova la convergenza uniforme della serie in  $[0, L] \times [0, +\infty)$ . ■

Una notevole proprietà dell'equazione del calore, di cui vedremo subito una conseguenza fondamentale, è espressa dal **principio (debole) del massimo**:

**Teorema 6.2** *Se  $V \in C^0(\overline{Q_\infty})$ ,  $V_t, V_x, V_{xx} \in C^0(Q_\infty)$ , e  $V$  verifica l'equazione del calore in  $Q_\infty$ , allora, per ogni  $T > 0$  fissato,*

$$(81) \quad \max_{\overline{Q_T}} V(x, t) = \max_{\Gamma_T} V(x, t),$$

dove  $Q_T$  è il rettangolo aperto  $Q_T := (0, L) \times (0, T)$ , e  $\Gamma_T$  è la sua **frontiera parabolica**:

$$(82) \quad \Gamma_T := \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\} \cup \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \cup \{(L, t) \mid 0 \leq t \leq T\}.$$

**Dim.:** fissato  $\varepsilon > 0$ , poniamo  $W(x, t) := V(x, t) + \varepsilon x^2$  ( $(x, t) \in \overline{Q_T}$ ). Cominciamo a mostrare che il massimo di  $W(x, t)$  in  $\overline{Q_T}$  è assunto in un punto  $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$ . Infatti, se per assurdo fosse  $(x_0, t_0) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma_T$ , grazie alla regolarità di  $W$  si dovrebbe avere

$$W_t(x_0, t_0) \geq 0; \quad W_{xx}(x_0, t_0) \leq 0;$$

ma allora si avrebbe

$$0 \leq W_t(x_0, t_0) - W_{xx}(x_0, t_0) = V_t(x_0, t_0) - V_{xx}(x_0, t_0) - 2\varepsilon = -2\varepsilon < 0,$$

assurdo. Per concludere la dimostrazione, basta osservare che per ogni  $(x, t)$  in  $\overline{Q_T}$  si ha  $V(x, t) \leq W(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} W(x, t)$ , da cui

$$\max_{\overline{Q_T}} V(x, t) \leq \max_{\overline{Q_T}} W(x, t) = \max_{\Gamma_T} W(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} V(x, t) + \varepsilon L^2;$$

data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la tesi è dimostrata, ■

Applicando il Teorema precedente alla funzione  $-V$ , si ottiene l'analogo **principio (debole) del minimo**:

$$\min_{\overline{Q_T}} V(x, t) = \min_{\Gamma_T} V(x, t).$$

Possiamo così concludere che:

**Teorema 6.3** *Ogni soluzione del problema (70) verifica*

$$(83) \quad \forall(x, t) \in \overline{Q_\infty}, \quad \min_x U_0(x) \leq U(x, t) \leq \max_x U_0(x);$$

in particolare, la (78) è l'unica soluzione del problema (70).



**Dim.:** data l'arbitrarietà di  $T$ , la (83) è conseguenza immediata di quanto appena dimostrato. Ne discende subito l'unicità: se  $U_1, U_2$  sono soluzioni del problema (70) relative allo stesso dato iniziale  $U_0$ , la loro differenza  $U = U_1 - U_2$  deve verificare la (83) con  $U_0 = 0$ ; dunque  $U = 0$ , cioè  $U_1 = U_2$  in  $\overline{Q_\infty}$ . ■

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente

**Teorema 6.4** Fissata  $U_0$  continua e regolare a tratti in  $[0, L]$ , tale che  $U_0(0) = U_0(L) = 0$ , il problema di CAUCHY-DIRICHLET (70) ammette una ed una sola soluzione  $U$  nel senso della **Definizione 6.1**. La soluzione  $U$  è data dalla (78), e verifica l'ulteriore proprietà di regolarità  $U \in C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$ . ■

La (83) implica non soltanto l'unicità della soluzione, ma anche una *continuità* della sua dipendenza dal dato iniziale: intuitivamente, esprime la circostanza che una "piccola perturbazione" del dato causa un "piccolo cambiamento" nella soluzione. Non ci soffermiamo sull'importanza dal punto di vista teorico della nozione di **dipendenza continua** (che dà origine alla nozione di problema **ben posto**), e che è fondamentale, ad esempio, nello studio di problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali. Ci limitiamo ad indicare due conseguenze deleterie della *manca* di dipendenza continua: ogni (inevitabile) errore sperimentale nella misurazione dei dati porterebbe a gravi discrepanze, anche *qualitative*, tra la soluzione "attesa" e quella effettiva; risulterebbe poi estremamente complicato formulare un metodo di approssimazione numerica del problema.

**Osservazione 6.1** Vogliamo sottolineare alcune proprietà rilevanti del problema ora esaminato.

**Effetto regolarizzante.** Ad ogni fissato istante  $t > 0$ , la soluzione del problema (70) è sempre in  $C^\infty([0, L])$ , indipendentemente dalla regolarità del dato  $U_0$  iniziale: nel processo di diffusione del calore, il dato iniziale viene **regolarizzato**.

**Irreversibilità.** Fissiamo  $T > 0$ , ed indichiamo con  $U_T$  la soluzione all'istante  $T$  del problema (70) con dato iniziale  $U_0$ . La funzione  $t \mapsto U(\cdot, t)$  descrive, istante per istante, l'evoluzione della distribuzione di temperatura nel corpo, dallo "stato iniziale"  $U_0(x)$  allo "stato finale"  $U_T(x)$ . Nel caso banale in cui  $U_0$  è identicamente nullo, lo è anche la soluzione, ed in particolare  $U_T = U_0 = 0$ . Se invece  $U_0$  non è identicamente nullo, la funzione  $t \mapsto V(\cdot, t) := U(\cdot, T-t)$  descrive il processo inverso, che porta dallo stato  $U_T(x)$  allo stato  $U_0(x)$ . Orbene, questa funzione non risolve mai l'equazione del calore: il che è la traduzione matematica del fatto che la diffusione del calore è un **fenomeno irreversibile**. Per l'"effetto regolarizzante" appena descritto, ciò è del tutto evidente se  $U_0$  non è in  $C^\infty([0, L])$ ; ma vale in generale. Si ha infatti

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial U}{\partial t}(x, T-t) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, T-t) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t).$$

Se  $V$  risolvesse l'equazione del calore, la derivata parziale rispetto a  $t$  e la derivata parziale seconda rispetto ad  $x$  di  $V(x, t)$  dovrebbero essere nulle, quindi si

avrebbe  $V(x, t) = ax + b$ . Ma ciò non risulta compatibile con le condizioni di DIRICHLET, a meno che si abbia  $a = b = 0$ , che però implica  $U_0(x) = 0$  in  $[0, L]$ , caso che abbiamo escluso.

**Comportamento asintotico.** Se  $M$  è tale che  $|b_n| \leq M$  (dove  $b_n$  è dato dalla (77); si veda la dimostrazione del **Teorema 6.1**), ad ogni  $t > 0$  la soluzione  $U$  verifica la maggiorazione

$$|U(x, t)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \omega^2 t} \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n \omega^2 t} = \frac{M e^{-\omega^2 t}}{1 - e^{-\omega^2 t}},$$

quindi tende a zero—con rapidità esponenziale—per  $t \rightarrow +\infty$ . ■

Per illustrare quanto abbiamo esposto, esaminiamo un semplice esempio. Risolviamo il problema di CAUCHY-DIRICHLET per l'equazione del calore nell'intervallo  $[0, \pi]$ , con dati di DIRICHLET nulli e con il dato iniziale

$$U_0 := 2(1 - 10|1 - x|)^+ - (1 - 5|2 - x|)^+$$

(il grafico di  $U_0$  è la spezzata che unisce i punti  $(0, 0)$ ,  $(.9, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1.1, 0)$ ,  $(1.8, 0)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2.2, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ). La soluzione  $U$  è data dalla (78), con  $L = \pi$ ,  $\omega = 1$ ; restano da calcolare i coefficienti  $b_n$  della (77). Osserviamo che, se si pone  $\varphi(x) := (1 - 10|1 - x|)^+$ , risulta intanto che  $U_0(x) = 2\varphi(x) - \varphi(\frac{x}{2})$ ; di conseguenza,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{.9}^{1.1} \varphi(x) \sin nx \, dx - \frac{4}{\pi} \int_{.9}^{1.1} \varphi(x) \sin 2nx \, dx. \end{aligned}$$

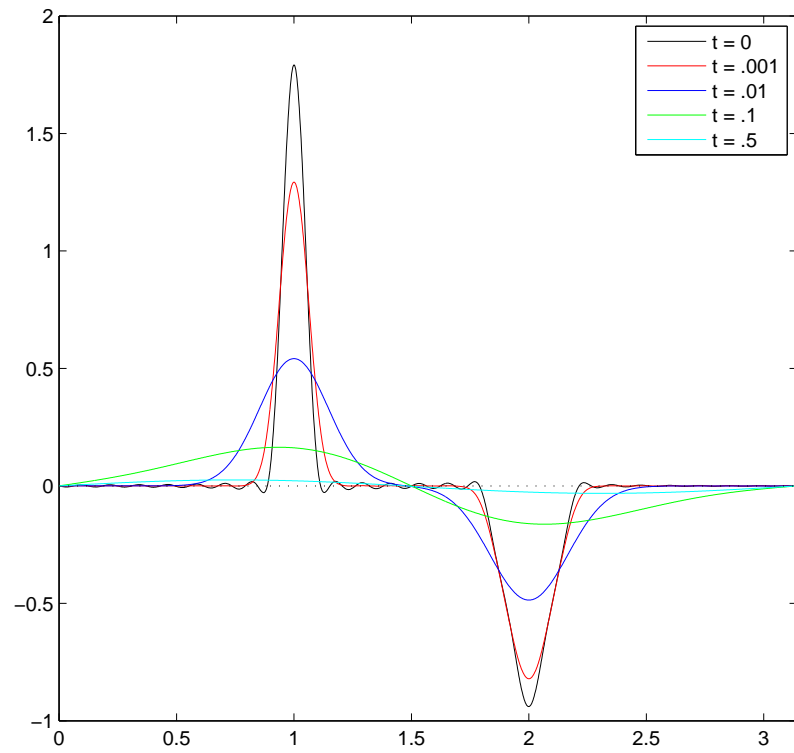
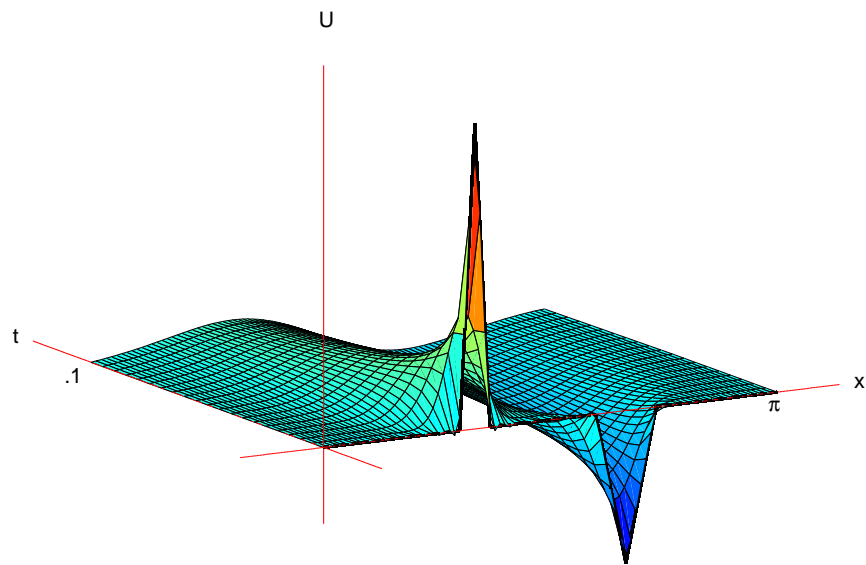
Ora, si calcola facilmente che,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{.9}^{1.1} \varphi(x) \sin nx \, dx &= \int_{.9}^{1.1} (1 - 10|x - 1|) \sin nx \, dx = \\ &= \int_{-.1}^{.1} (1 - 10|y|) (\sin ny \cos n + \cos ny \sin n) \, dy = \\ &= 2 \sin n \int_0^{.1} \cos ny \, dy - 20 \sin n \int_0^{.1} y \cos ny \, dy = \\ &= \frac{20}{n^2} \sin n \left(1 - \cos \frac{n}{10}\right) = \frac{40}{n^2} \sin n \sin^2 \frac{n}{20}. \end{aligned}$$

Pertanto, risulta

$$b_n = \frac{160}{\pi n^2} \sin n \sin^2 \frac{n}{20} - \frac{40}{\pi n^2} \sin 2n \sin^2 \frac{n}{10}.$$

Le figure che seguono sono relative alle ridotte  $s_{50}(U)$  della soluzione  $U$  del problema di CAUCHY-DIRICHLET con dato  $U_0$ . La prima, che dà una visione d'insieme, è ottenuta raccordando linearmente le sezioni  $s_{50}(U; x, t_n)$  con  $t_n = n/200$  ( $n = 0, \dots, 20$ ); la seconda fornisce, sovrapposti, i grafici di  $s_{50}(U; x, t_n)$  con  $t_n = 0, .001, .01, .1, .5$ :



Risultano evidenti sia la propagazione nello spazio della soluzione, sia la rapida decrescenza della funzione  $t \mapsto \max_{0 \leq x \leq \pi} |U(x, t)|$ .

Veniamo ora all'esempio annunciato prima della **Definizione 6.1**. Premettiamo che si chiama **soluzione fondamentale**  $K$  dell'equazione del calore la funzione da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$  definita da:

$$(84) \quad K(x, t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

(il termine usato è giustificato dalla successiva formula (94)). Per dimostrarne alcune proprietà basilari, utilizzeremo il seguente

**Lemma 6.1** Per ogni  $t > 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $\lambda > -\frac{1}{2}$ , vale la maggiorazione

$$(85) \quad \frac{e^{-x^2/(4t)}}{t^{\lambda+\frac{1}{2}}} \leq \frac{\tilde{c}(\lambda)}{|x|^{2\lambda+1}}, \quad \text{dove } \tilde{c}(\lambda) := \left( \frac{4\lambda+2}{e} \right)^{\lambda+\frac{1}{2}}.$$

**Dim.:** fissati  $x \neq 0$  e  $\mu > 0$ , poniamo

$$(86) \quad f_\mu(\tau) := \tau^\mu e^{-x^2\tau/4} \quad (\tau \geq 0).$$

È evidente che  $f_\mu$  è in  $C^0([0, +\infty)) \cap C^\infty((0, +\infty))$ , ed inoltre verifica  $f_\mu(0) = 0$ ,  $f_\mu(\tau) > 0 \quad \forall \tau > 0$ , e  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_\mu(\tau) = 0$ ; dunque ammette massimo positivo in un punto  $\tau_0 > 0$ . Per  $\tau > 0$ ,  $f'_\mu(\tau)$  si annulla se e solo se  $\tau = \tau_0 = 4\mu/x^2$ , quindi il massimo vale  $f_\mu(\tau_0) = (4\mu/(e x^2))^\mu$ . Posto  $t := 1/\tau$ ,  $\lambda := \mu - \frac{1}{2}$ , si ha la (85). ■

Possiamo ora dimostrare il seguente

**Teorema 6.5** La soluzione fondamentale  $K$  ha le seguenti proprietà:

i) nel semipiano  $\{(x, t) \mid t > 0\}$ ,  $K$  è di classe  $C^\infty$  e strettamente positiva; inoltre,

$$(87) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} K(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

$$(88) \quad K_x(x, t) = -\frac{x}{2t} K(x, t); \quad K_{xx}(x, t) = K_t(x, t) = \frac{x^2 - 2t}{4t^2} K(x, t);$$

ii) per ogni  $\lambda > -\frac{1}{2}$ ,  $x \neq 0$ ,  $t > 0$ , posto  $c(\lambda) := \tilde{c}(\lambda)/(2\sqrt{\pi})$ , valgono le maggiorazioni

$$(89) \quad \begin{cases} K(x, t) \leq c(\lambda) t^\lambda |x|^{-2\lambda-1}; & |K_x(x, t)| \leq \frac{1}{2} c(\lambda+1) t^\lambda |x|^{-2\lambda-2}; \\ |K_{xx}(x, t)| \leq \left( \frac{1}{4} c(\lambda+2) + \frac{1}{2} c(\lambda+1) \right) t^\lambda |x|^{-2\lambda-3}; \end{cases}$$

iii) in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $K$ ,  $K_x$ ,  $K_t$ ,  $K_{xx}$  sono continue, e  $K_t(x, t) = K_{xx}(x, t)$ ;

iv)  $\forall t > 0$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) dx = 1$ ;  $\forall \delta > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} K(x, t) dx = 1$ .

**Dim.:** *i*): le proprietà enunciate sono di verifica immediata.

*ii*): la prima delle (89) è conseguenza ovvia della (85) e della definizione di  $K$ ; grazie alla prima delle (88) ed alla prima delle (89), scritta con  $\lambda + 1$  al posto di  $\lambda$ , si ottiene subito la seconda delle (89). Infine, per dimostrare la terza delle (89) basta osservare che, per la seconda delle (88) e grazie alla prima delle (89) (con  $\lambda$  sostituito prima da  $\lambda + 2$ , poi da  $\lambda + 1$ ), si ha

$$|K_{xx}(x, t)| \leq \frac{x^2}{4t^2} c(\lambda + 2) t^{\lambda+2} |x|^{-2\lambda-5} + \frac{1}{2t} c(\lambda + 1) t^{\lambda+1} |x|^{-2\lambda-3}.$$

Verifichiamo le *iii*). Sappiamo che  $K$  è di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^2$  privato della retta  $\{t = 0\}$ ; resta quindi da mostrare che  $K$ ,  $K_x$ ,  $K_t$  sono continue, come funzioni delle due variabili  $x, t$ , in ogni punto  $(x_0, 0)$  con  $x_0 \neq 0$ ; dato che  $K(-x, t) = K(x, t)$ , possiamo anzi supporre  $x_0 > 0$ . Cominciamo dalla continuità di  $K$ . Dobbiamo mostrare che, fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, esiste  $\delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| \leq \delta$  e  $|t| \leq \delta$  risulta  $K(x, t) \leq \varepsilon$  (anzi, basta mostrarlo per  $0 < t \leq \delta$ ). Imponiamo intanto a  $\delta$  di essere  $\leq x_0/2$ , cosicchè se  $|x - x_0| \leq \delta$  si ha  $0 < \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq \frac{3}{2}x_0$ . Dalla prima delle (89) con  $\lambda = 1$  si ha allora che se  $|x - x_0| \leq \delta$  e  $0 < t \leq \delta$  si ha

$$K(x, t) \leq c(1) \frac{t}{x^3} \leq \frac{8c(1)}{x_0^3} \delta,$$

quantità  $\leq \varepsilon$  se si impone a  $\delta$  l'ulteriore condizione di essere  $\leq (x_0^3 \varepsilon)/(8c(1))$ .

Analogamente, dalla seconda delle (89) con  $\lambda = 1$ , si ha che (sempre per  $|x - x_0| \leq \delta \leq (x_0/2)$  e  $0 < t \leq \delta$ )

$$|K_x(x, t)| \leq \frac{1}{2} c(2) \frac{t}{x^4} \leq \frac{8c(2)}{x_0^4} \delta,$$

che è  $\leq \varepsilon$  se  $\delta$  è inoltre  $\leq (x_0^4 \varepsilon)/(8c(2))$ .

Resta da dimostrare la continuità nel punto  $(x_0, 0)$  di  $K_t$ . Dato che per  $t \neq 0$  si ha  $K_t(x, t) = K_{xx}(x, t)$ , basta verificare che per  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$  si ha  $K_{xx}(x, t) \rightarrow 0$  (in tal caso si ha infatti che per  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$  anche  $K_t(x, t) \rightarrow 0$ , dunque, in particolare,  $\lim_{t \rightarrow 0} K_t(x_0, t) = 0$ , il che implica l'esistenza di  $K_t(x_0, 0)$  e l'uguaglianza  $K_t(x_0, 0) = 0$ ). Ancora, grazie alla terza delle (89) con  $\lambda = 1$  si ha che (nelle ormai solite ipotesi su  $x, t$ )

$$|K_{xx}(x, t)| \leq \left( \frac{1}{4} c(3) + \frac{1}{2} c(2) \right) \frac{t}{|x|^5} \leq \left( \frac{1}{4} c(3) + \frac{1}{2} c(2) \right) \left( \frac{2}{x_0} \right)^5 \delta,$$

quantità  $\leq \varepsilon$  pur di prendere  $\delta$  sufficientemente piccolo.

*iv*): con il cambiamento di variabile  $\tau := x/2\sqrt{t}$  si ha che

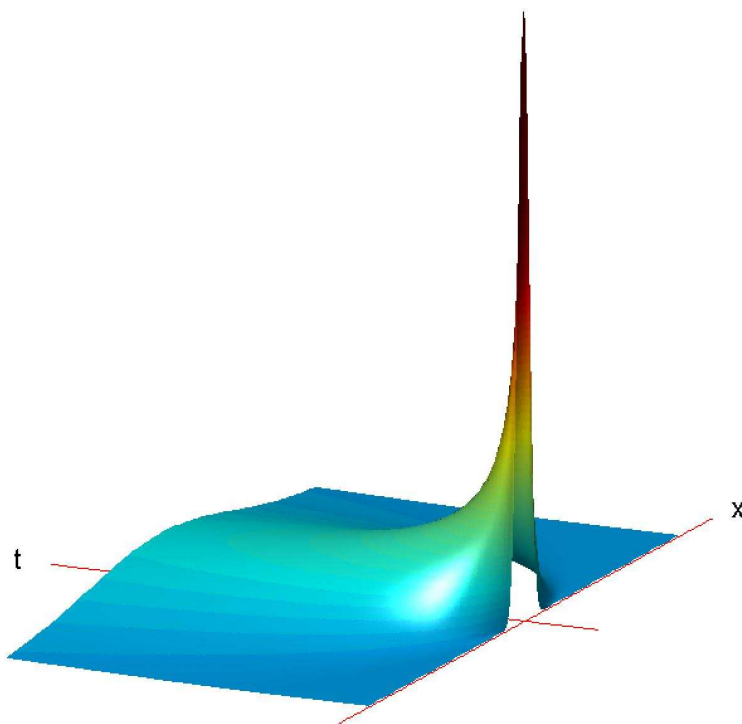
$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/(4t)} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 1.$$

Analogamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} K(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\delta/(2\sqrt{t})}^{\delta/(2\sqrt{t})} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 1,$$

il che conclude la dimostrazione. ■

L'andamento di  $K(x, t)$  nel rettangolo  $[-3, 3] \times [.005, 1]$  è riportato nella pagina seguente:



La soluzione fondamentale del calore.

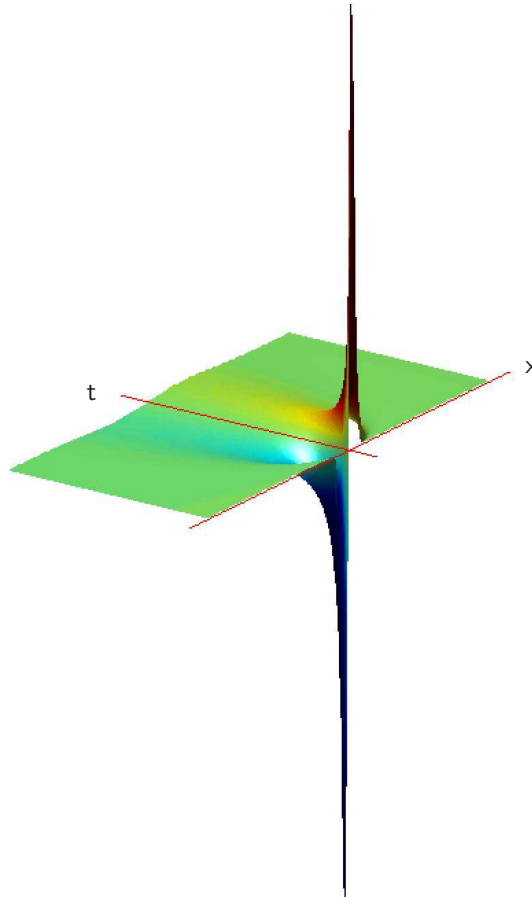
Dai risultati ora visti discende che  $K(x, t)$  è una *soluzione positiva* dell'equazione del calore nel semipiano  $\{t > 0\}$ . In termini intuitivi, alla luce della (87) e delle proprietà espresse nella *iv*), rappresenta la temperatura nel punto  $(x, t)$  di un conduttore unidimensionale di lunghezza indefinita, mantenuto a temperatura nulla per  $t < 0$ , al quale *istantaneamente* (per  $t = 0$ ) viene somministrata una quantità unitaria di calore, *concentrata* nel punto  $x = 0$ .<sup>13</sup>

Introduciamo a questo punto la **soluzione fondamentale derivata**

$$(90) \quad H(x, t) := \frac{x}{t} K(x, t) = -2K_x(x, t),$$

<sup>13</sup> In termini un po' meno vaghi, ma il cui significato verrà chiarito in altri Corsi, il *limite nel senso delle distribuzioni* di  $K$  per  $t \rightarrow 0+$  coincide con la delta di DIRAC concentrata nell'origine.

della quale riportiamo l'andamento nel rettangolo  $[-3, 3] \times [.005, .3]$  del piano  $(x, t)$ :



La soluzione fondamentale derivata.

**Teorema 6.6** *La soluzione fondamentale derivata  $H$  ha le proprietà seguenti:*

*i) nel semipiano  $\{(x, t) \mid t > 0\}$ ,  $H$  è di classe  $C^\infty$ ; è dispari nella variabile  $x$  ( $H(-x, t) = -H(x, t)$ );  $H(x, t) > 0$  nel quadrante  $\{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$ ; inoltre,*

$$(91) \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

*ii) in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $H$ ,  $H_x$ ,  $H_t$ ,  $H_{xx}$  sono continue, e  $H_t(x, t) = H_{xx}(x, t)$ .*

**Dim.:** *i)* le proprietà enunciate sono evidenti.

*ii)* dato che, in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $H = -2K_x$  e  $H_x = -2K_{xx}$ , sappiamo già che  $H$ ,  $H_x$  sono continue. Si osservi poi che per  $t \neq 0$  si ha  $H_t = -2K_{xt} = -2K_{xxx} = H_{xx}$ ; per concludere, basta quindi mostrare (si confronti con la dimostrazione del Teorema precedente, *iii*) che per

ogni  $x_0 > 0$  la funzione  $(x, t) \mapsto H_{xx}(x, t)$  tende a zero quando  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ . Per questo, si osservi che (calcolo immediato) per  $x \neq 0$ ,  $t > 0$  si ha

$$K_{xxx}(x, t) = \frac{6tx - x^3}{8t^3} K(x, t).$$

Dalla prima delle (89) si deduce la maggiorazione, valida  $\forall(x \neq 0, t > 0, \lambda > -\frac{1}{2})$

$$(92) \quad |K_{xxx}(x, t)| \leq \left( \frac{3}{4} c(\lambda + 2) + \frac{1}{8} c(\lambda + 3) \right) t^\lambda |x|^{-2\lambda - 4}.$$

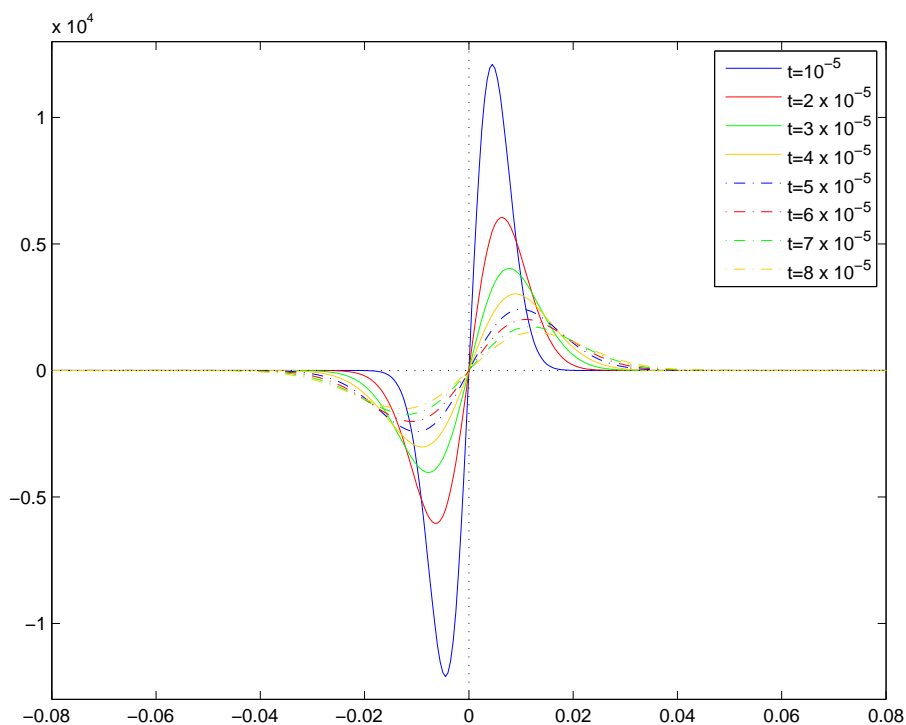
Da questa (con  $\lambda = 1$ ) si ricava che, fissati  $x_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tale che  $\delta < x_0/2$ , se  $|x - x_0| < \delta$  e  $0 < t < \delta$  risulta

$$|H_{xx}(x, t)| = 2|K_{xxx}(x, t)| \leq 16(6c(3) + c(4)) \frac{1}{x_0^6} \delta,$$

quantità  $< \varepsilon$  se  $\delta$  è sufficientemente piccolo, il che conclude la dimostrazione. ■

Sottolineiamo che, *nonostante valga la (91)*, tuttavia  $H$  non è continua per  $(x, t) = (0, 0)$ : basta ad esempio osservare che per  $x \neq 0$  si ha  $H(x, x^2) = (2 \sqrt[4]{e} \sqrt{\pi} x |x|)^{-1}$ .

Il grafico precedente è tuttavia puramente *qualitativo*. Per avere qualche informazione di natura quantitativa, riportiamo qui sotto i grafici delle sezioni  $x \mapsto H(x, t_n)$ , nell'intervallo  $-.08 \leq x \leq .08$  e per  $t_n = n 10^{-5}$ , con  $n = 1, \dots, 8$  (ma si tenga ben presente che le unità di misura sugli assi differiscono *addirittura per un fattore dell'ordine di  $10^5$* !):



Si osservi che al diminuire di  $t$  l'ascissa del massimo si avvicina sempre più a zero, mentre l'ordinata cresce (in effetti, tende a  $+\infty$ ); considerazioni analoghe per il punto di minimo.



Poniamo ora, per  $(x, t) \in A := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{(2n\pi, 0)\}$ ,

$$(93) \quad v(x, t) := H(x, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} [H(x + 2n\pi, t) + H(x - 2n\pi, t)];$$

vogliamo mostrare che

**Teorema 6.7** *La restrizione  $U$  di  $v$  alla striscia  $(0, 2\pi) \times (0, +\infty)$  è una soluzione non identicamente nulla dell'equazione del calore, che verifica le (72) con  $U_0 = 0$  ed  $L = 2\pi$ .*

**Dim.:** dimostriamo intanto che, fissati ad arbitrio  $t_0 > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , la serie nella (93) converge uniformemente in  $[-2N\pi, 2N\pi] \times [t_0, +\infty)$ . Infatti, in tale striscia risulta, per ogni  $n > N$ ,

$$|x + 2n\pi| = x + 2n\pi \geq 2(n - N)\pi; \quad |x - 2n\pi| = 2n\pi - x \geq 2(n - N)\pi,$$

quindi, dato che  $H = -2K_x$  e grazie alla seconda delle (89) con  $\lambda = 0$ ,

$$|H(x + 2n\pi, t) + H(x - 2n\pi, t)| \leq \frac{c(0)}{2(n - N)^2\pi^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La stima precedente, grazie al criterio di WEIERSTRASS, assicura la convergenza uniforme della serie; dato che le funzioni  $(x, t) \mapsto H(x \mp 2n\pi, t)$  sono continue in  $[-2n\pi, 2n\pi] \times [t_0, +\infty)$ , ne discende la continuità di  $v$ . Per l'arbitrarietà di  $N$ ,  $t_0$ , si può concludere che  $v$  è continua nel semipiano  $\{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ .

Utilizzando la terza delle (89) con  $\lambda = 0$ , si ottiene poi che per  $|x| \leq 2N\pi$ ,  $t \geq t_0$ ,  $n > N$

$$|H_x(x + 2n\pi, t) + H_x(x - 2n\pi, t)| \leq (c(2) + 2c(3)) \frac{1}{8(n - N)^3\pi^3} = O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

quindi anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (H_x(x + 2n\pi, t) + H_x(x - 2n\pi, t))$  converge uniformemente, e grazie al Teorema di derivazione per serie si deduce che  $v_x$  è continua per  $t > 0$ .

In modo analogo, ma utilizzando la (92) con  $\lambda = 0$ , si vede che si ha, sempre per  $|x| \leq 2N\pi$ ,  $t \geq t_0$  e  $n > N$ ,

$$|H_{xx}(x + 2n\pi, t) + H_{xx}(x - 2n\pi, t)| = |H_t(x + 2n\pi, t) + H_t(x - 2n\pi, t)| = O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

il che permette di concludere che per  $t > 0$  le funzioni  $v_t$  e  $v_{xx}$  sono continue, e  $v_t = v_{xx}$ .

Poiché  $v$ , per  $t < 0$ , è identicamente nulla, resta da studiare il comportamento della serie sulla retta  $\{t = 0\}$  privata dei punti  $\{(2m\pi, 0) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .

Fissati  $\varepsilon > 0$  (e, come non è limitativo,  $< \pi$ ),  $N \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  con  $|m| < N$ , osserviamo intanto che se  $x \in [2m\pi + \varepsilon, 2(m + 1)\pi - \varepsilon]$  si ha,  $\forall n > N$ ,

$$|x + 2n\pi| \geq 2(n - N)\pi + \varepsilon; \quad |x - 2n\pi| \geq 2(n - N - 1)\pi + \varepsilon;$$

ancora per la seconda delle (89) con  $\lambda = 0$ , nell'insieme

$$B_N := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}, |m| < N} ([2m\pi + \varepsilon, 2(m + 1)\pi - \varepsilon] \times \mathbb{R})$$

vale la maggiorazione, per ogni  $n > N + 1$ ,

$$|H(x + 2n\pi, t) + H(x - 2n\pi, t)| \leq \frac{c(1)}{(2(n - N - 1)\pi + \varepsilon)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Sempre per il criterio di WEIERSTRASS, la serie converge uniformemente in  $B_N$ , quindi  $v$  è continua in  $B_N$ . Per l'arbitrarietà di  $N$  e per quanto visto in precedenza, la continuità di  $v$  in  $A$  è dimostrata.

È poi immediato verificare che in  $A$  la funzione  $v$  è dispari e  $2\pi$ -periodica nella variabile  $x$  per ogni  $t$  fissato; inoltre, per  $t \neq 0$  si ha evidentemente  $v(2m\pi, t) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ , il che conclude la dimostrazione. ■

Per completezza, diamo un rapido cenno al problema ai valori iniziali (74).

Ci chiediamo anzitutto se sia possibile trovare una formula esplicita che permetta di calcolare la “soluzione” (in un senso da precisare)  $u(x, t)$  a partire dal dato  $u_0(x)$ . Anche in questo caso, procediamo dapprima *in modo puramente formale*.

Supponiamo  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ; dato l'effetto regolarizzante dell'equazione del calore, è lecito attendersi che, per ogni  $t > 0$  fissato, anche la funzione  $x \mapsto u(x, t)$  sia in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Possiamo allora introdurre la trasformata di FOURIER  $\hat{u}(\xi, t)$  (rispetto alla variabile  $x$ ; si noti che  $t$  viene trattato come un parametro)

$$\hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx.$$

Dalla *iii*) del **Teorema 5.9** si ricava che la funzione  $t \mapsto \hat{u}(\xi, t)$  verifica l'equazione (si noti che ora consideriamo  $\xi$  come parametro)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t) \quad (t > 0),$$

la cui soluzione generale ha la forma  $\hat{u}(\xi, t) = c(\xi) e^{-\xi^2 t}$ . Imponendo (sempre in modo formale) la condizione iniziale, si ha  $c(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi)$ , cosicchè  $\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-\xi^2 t}$ . Resta quindi da calcolare l'antitrasformata di FOURIER (rispetto a  $\xi$ ) di quest'ultima funzione; tuttavia, poichè, come vedremo tra poco, è molto più semplice calcolare l'antitrasformata del prodotto di due trasformate, conviene scrivere  $\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-\xi^2 t}$  nella forma  $\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi) \hat{h}(\xi, t)$ , dove  $h(x, t) = (e^{-\xi^2 t})^\vee(x)$ . Per questo, utilizzeremo il seguente

**Lemma 6.2** Dato  $\alpha > 0$ , e posto  $g_\alpha(x) := e^{-\alpha x^2}$ , si ha  $\widehat{g_\alpha}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\xi^2/(4\alpha)}$ .

**Dim.:** si ha intanto  $g'_\alpha(x) = -2\alpha x g_\alpha(x)$ ; per le *iii*), *iv*) del **Teorema 5.9**, ne segue che  $i\xi \widehat{g_\alpha}(\xi) = -2\alpha i D_\xi \widehat{g_\alpha}(\xi)$ . Di conseguenza,  $\widehat{g_\alpha}(\xi) = c e^{-\xi^2/(4\alpha)}$ ; dato che

$$c = \widehat{g_\alpha}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}},$$

si conclude che  $\widehat{g_\alpha}(\xi) = (2\alpha)^{-1/2} e^{-\xi^2/(4\alpha)}$ . ■

In particolare, per  $\alpha = 1/(4t)$  si ha  $e^{-\xi^2 t} = \hat{h}(\xi, t) = (2t)^{-1/2} \hat{g}_{1/(4t)}(\xi)$ , cioè  $h(x, t) = (2t)^{-1/2} g_{1/(4t)}(x) = (2t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$ .

Di conseguenza, per ogni  $t > 0$  si ha  $h(x, t) = \sqrt{2\pi} K(x, t)$ , dove  $K$  è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore, definita nella (84).

Siamo così ricondotti a cercare l'antitrasformata del prodotto di due trasformate. Per questo, introduciamo intanto la

**Definizione 6.2** Date  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si dice **prodotto di convoluzione** (o, semplicemente, **convoluzione**) di  $f$  e  $g$  la funzione  $f * g$  definita da

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy. \quad \blacksquare$$

Non è difficile dimostrare che la trasformata di FOURIER muta il prodotto di convoluzione nel prodotto ordinario (a meno di una costante moltiplicativa):

**Proposizione 6.1** Per ogni  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si ha

$$(f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}, \quad \text{quindi} \quad (\hat{f} \hat{g})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g.$$

**Dim.:** posto  $F := f * g$ , utilizzando il Teorema di FUBINI si ottiene che

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-i\xi x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) e^{-i\xi x} dx \right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{-i\xi\eta} e^{-i\xi y} d\eta \right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi y} dy \right) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \blacksquare \end{aligned}$$

Dalla relazione

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= \widehat{u_0}(\xi) \hat{h}(\xi, t) = (2\pi)^{-1/2} ((u_0(\cdot) * h(\cdot, t)(x))^\wedge(\xi) = \\ &= ((u_0(\cdot) * K(\cdot, t)(x))^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

segue allora che  $u(x, t) = (u_0(\cdot) * K(\cdot, t))(x)$ , da cui la **formula di Poisson**

$$(94) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) K(x-y, t) dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy. \end{aligned}$$

È chiaro tuttavia che, anche quando  $u_0$  è, ad esempio, soltanto *sommabile* in  $\mathbb{R}$ , si può *definire*  $u$  tramite la relazione precedente; si controlla facilmente che  $u$  è in  $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ , e verifica l'equazione del calore in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Se poi, *ad esempio*,  $u_0$  è *continua* e *limitata*, si dimostra che  $u$  verifica la relazione

$$(95) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x);$$

è quindi *una* soluzione del problema ai valori iniziali, se si richiede alla “soluzione” di verificare la condizione iniziale nel senso “debole” dato dalla (95). In questo caso, tuttavia, sappiamo già che *non c'è unicità*: la funzione  $H(x, t)$  verifica infatti, nel senso debole ora introdotto, il problema ai valori iniziali con dato iniziale nullo. Per analogia con il problema di CAUCHY-DIRICHLET appena trattato, si può pensare di eliminare questa difficoltà imponendo alla soluzione di essere continua nel semipiano *chiuso*  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  (si confronti con la **Definizione 6.1**). Tuttavia, neanche questo risolve il problema dell'unicità, come mostra il seguente controesempio, dovuto a TIKHONOV: fissato  $p > 1$ , e posto (per  $t > 0$ )  $\varphi_p(t) := e^{-1/t^p}$ , si dimostra che la funzione

$$u_p(x, t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \varphi_p^{(n)}(t) x^{2n}$$

è ben definita e regolare in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , dove è soluzione dell'equazione del calore. Inoltre, se si prolunga la definizione di  $u_p$  ponendola uguale a zero per  $t = 0$ , si ha che tale prolungamento è *continuo in*  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ ; è quindi una soluzione continua in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  e *non identicamente nulla* del problema ai valori iniziali nel semipiano, con dato  $u_0$  *identicamente nullo*.

Per avere unicità, occorre quindi dare una definizione *ancora più restrittiva* di soluzione: si dimostra infatti (Teorema di WIDDER) che c'è unicità se si impone alla soluzione l'ulteriore condizione di essere *inferiormente limitata*,<sup>14</sup> come d'altra parte deve necessariamente essere una soluzione che abbia significato fisico.

Vogliamo infine sottolineare come la formula di rappresentazione di POISSON metta in evidenza una circostanza: l'equazione del calore modella un fenomeno di diffusione che si propaga con **velocità infinita** (quindi il modello è **non-relativistico**). Ciò è conseguenza immediata della *stretta positività* della soluzione fondamentale per  $t > 0$ : se il dato iniziale  $u_0(x)$  è ad esempio nullo fuori da un intervallo  $(a, b)$ , nel quale è *strettamente positivo*, allora in *ogni* istante  $t > 0$  la soluzione è *strettamente positiva* in *tutti* i punti  $x$ : il che corrisponde appunto ad una velocità *infinita* di propagazione del calore.

**Osservazione 6.2** *Per concludere, rileviamo che, pur restando in questa impostazione, si possono dare altre definizioni di soluzione, più deboli ma applicabili a dati iniziali  $u_0$  meno regolari. Abbiamo infatti enunciato che la (94) definisce una soluzione  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$  dell'equazione del calore (in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ) anche nella sola ipotesi che (ad esempio)  $u_0$  sia sommabile in  $\mathbb{R}$ ; <sup>15</sup> è spontaneo chiedersi se, o sotto quali ulteriori ipotesi sul dato, si abbia che, per  $t \rightarrow 0+$ , la funzione  $t \mapsto u(\cdot, t)$  converge ad  $u_0$  in media integrale, cioè*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u_0(x)| dx = 0.$$

*Questioni analoghe si possono porre, per un dato iniziale in  $L^2(\mathbb{R})$ , sostituendo la convergenza in media integrale con la convergenza in media quadratica.*

*Il problema (74) può però essere affrontato in altre impostazioni, estremamente generali ma di natura completamente diversa (soluzioni variazionali; soluzioni ultradeboli; ...), il cui esame tuttavia esula dallo scopo di queste note. ■*

<sup>14</sup> oppure, *superiormente limitata*

<sup>15</sup> anzi, è facile mostrare che  $\forall t > 0$  risulta  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)| dx$

## Indice analitico

- $\sim$ , 12
- $(C, 1)$ -lim, 33
- $L^1$ -lim, 52
- $L^1(a, b)$ , 52
- $L^1_{\#}$ , 12
- $L^2$ -lim, 46
- $L^2(a, b)$ , 44
- $[x]$ , 1
- $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ , 58
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 56
- $\delta_{n,m}$ , 1
- $\hat{f}, f^\wedge$ , 53
- $f^\vee$ , 57
- v.p.**, 3, 55
- $\sigma(f), \sigma_n(f), \sigma_n(f; x)$ , 33
- $f_n \xrightarrow{L^1} f$ , 52
- $f_n \xrightarrow{L^2} f$ , 46
- $s(f), s_n(f), s_n(f; x)$ , 14
- condizione
  - del DINI bilatera, 53
  - del DINI generalizzata, 15
  - iniziale, 64
- condizioni
  - ai limiti
    - di DIRICHLET, 64
    - di NEUMANN, 64
- costante di WILBRAHAM-GIBBS, 30
- dipendenza continua dai dati, 69
- disuguaglianza
  - di BESSEL, 48
  - di SCHWARZ, 45
- equazione del calore, 64
  - comportamento asintotico, 70
  - effetto regolarizzante, 69
  - irreversibilità, 69
  - velocità di propagazione, 80
- fenomeno di GIBBS, 23, 26, 31
- formula
  - di inversione, 53, 57
  - di PARSEVAL, 57
- FOURIER
  - antitrasformata di, 57
  - coefficienti di, 47
  - costanti di, 12
  - equazione di, 64
  - trasformata di, 53
- funzione
  - a decrescenza rapida, 56
  - regolare a tratti, 17
  - svilupabile in serie di FOURIER, 12
- identità
  - di ABEL, 6
  - di PARSEVAL, 49
- lemma
  - di RIEMANN-LEBESGUE, 10
- limite
  - in  $L^1(a, b)$ , 52
  - in  $L^2(a, b)$ , 46
  - in media  $(C, 1)$ , 33
  - in media integrale, 44, 52
  - in media quadratica, 46
  - secondo CESÀRO, 33
- norma
  - in  $L^1(a, b)$ , 52
  - in  $L^2(a, b)$ , 45
- nucleo
  - di DIRICHLET, 14
  - di FEJÉR, 33
- onda
  - quadra, 22
  - semitriangolare, 25
- parte intera, 1
- polinomio trigonometrico, 1
  - coefficienti, 1
  - grado, 1
- principio
  - (debole) del massimo, 68
  - (debole) del minimo, 68
- problema
  - ai valori iniziali, 66
  - di CAUCHY-DIRICHLET, 64
- prodotto scalare, 45
- relazioni di ortogonalità, 1

- serie
  - di FOURIER
    - associata ad  $f$ , 12
    - generalizzata, 49
    - in  $L^2(-\pi, \pi)$ , 44
    - trigonometrica, 3
- simbolo di KRONECKER, 1
- sistema ortonormale, 47
  - completo, 49
- soluzione fondamentale, 72
  - derivata, 74
- somme di FEJÉR, 33
- spazio
  - di SCHWARTZ, 56
  - metrico completo, 46
- successione
  - a variazione limitata, 5
  - delle medie aritmetiche, 33
- teorema
  - del DINI, 15
  - di PLANCHEREL, 58
- valore principale, 3, 55

## 7 Altri risultati notevoli.

### 7.1 Esistenza di una funzione continua $2\pi$ -periodica la cui serie di FOURIER non converge per $x = 0$ .

Dimostriamo l'affermazione, fatta nell'**Osservazione 2.2**, che la sola continuità di una funzione  $2\pi$ -periodica non garantisce, in generale, la convergenza della sua serie di FOURIER su tutto  $\mathbb{R}$ .

Indichiamo con  $C_{\#}^0 := C_{\#}^0(-\pi, \pi)$  il sottospazio chiuso di  $C^0 := C^0([-\pi, \pi])$  delle funzioni  $f$  continue su  $[-\pi, \pi]$  e tali che  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Posto,  $\forall f$  in  $C_{\#}^0$ ,  $F_n(f) := s_n(f; 0)$ , si ha  $|F_n(f)| \leq (2n+1)\|f\|_{C^0}$ , quindi  $F_n$  è in  $(C_{\#}^0)'$ . Se  $\forall f \in C_{\#}^0$  esistesse il  $\lim_n s_n(f; 0)$ , la successione  $\{F_n\}$  sarebbe \*-debolmente convergente, quindi, per il Teorema di BANACH-STEINHAUS, *limitata in norma*. Mostriamo che invece  $\sup_n \|F_n\|_{(C_{\#}^0)'} = +\infty$ .

Per definizione, si ha intanto che  $\|F_n\|_{(C_{\#}^0)'} \geq |F_n(f)| \forall f \in C_{\#}^0$  tale che  $\|f\|_{C^0} = 1$ . Mostreremo tra poco che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato, è possibile costruire una successione  $\{g_{n,N}\}_{N>n} \subset C_{\#}^0$  che tende in  $L^1(-\pi, \pi)$  alla funzione  $\text{sign } D_n$ , ed è tale che  $\|g_{n,N}\|_{C^0} = 1 \quad \forall N > n$ . Ne viene allora che

$$\|F_n\|_{(C_{\#}^0)'} \geq |F_n(g_{n,N})| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_N^{(n)}(x) D_n(x) dx \right|,$$

quindi, per  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$\|F_n\|_{(C_{\#}^0)'} \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx,$$

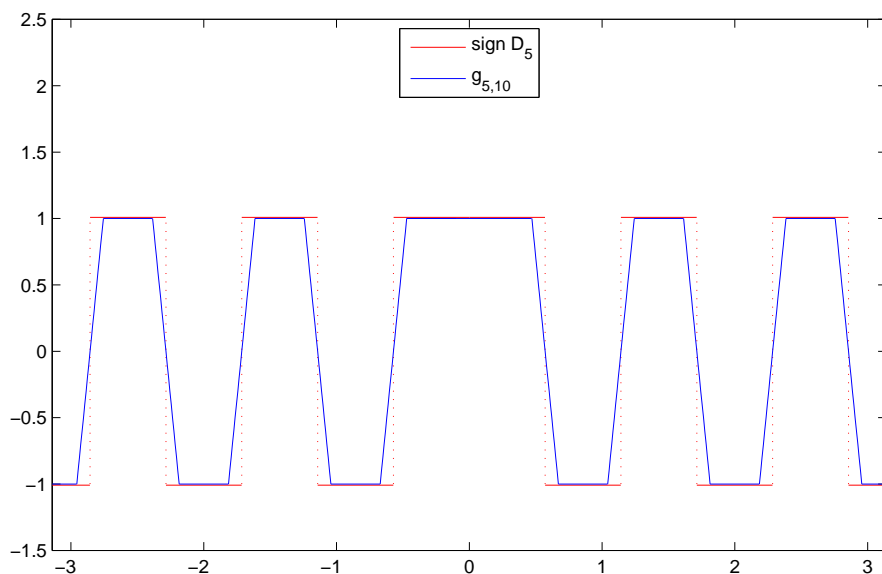
e la conclusione segue dal fatto che  $\lim_n \|D_n\|_{L^1(-\pi, \pi)} = +\infty$ .

La costruzione di  $g_{n,N}$  consiste nel modificare il grafico di  $\text{sign } D_n$  sostituendo i tratti verticali in corrispondenza ai salti di  $\text{sign } D_n$  (che in  $[-\pi, \pi]$  sono nei punti  $x_k^{(n)} := 2k\pi/(2n+1)$ , con  $|k| = 1, \dots, n$ ) con segmenti di pendenza  $\mp N$ . Ad esempio, se  $D_n(x) > 0$  per  $x \in (x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}) \cup (x_{k+2}^{(n)}, x_{k+3}^{(n)})$ , mentre  $D_n(x) < 0$  per  $x \in (x_{k+1}^{(n)}, x_{k+2}^{(n)})$ , il grafico di  $g_{n,N}$  per  $x \in (x_k^{(n)} + \frac{1}{N}, x_{k+3}^{(n)} - \frac{1}{N})$  è la spezzata che unisce i punti

$$\left(x_k^{(n)} + \frac{1}{N}, 1\right), \left(x_{k+1}^{(n)} - \frac{1}{N}, 1\right), \left(x_{k+1}^{(n)} + \frac{1}{N}, -1\right),$$

$$\left(x_{k+2}^{(n)} - \frac{1}{N}, -1\right), \left(x_{k+2}^{(n)} + \frac{1}{N}, 1\right), \left(x_{k+3}^{(n)} - \frac{1}{N}, 1\right).$$

Nella figura che segue riportiamo i grafici di  $\text{sign } D_n$  e di  $g_{5,10}$ :



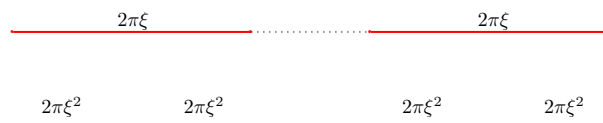
## 7.2 Il teorema di MENŠOV.

Nel **Paragrafo 1** abbiamo enunciato il seguente risultato:

**Teorema 7.1 (Menšov)** *Esiste una serie trigonometrica che converge quasi ovunque a zero, ma i cui coefficienti non sono tutti nulli.*

Diamo un rapido cenno alla dimostrazione, senza entrare nei dettagli.

Fissato  $\xi \in (0, 1/2)$ , definiamo l'insieme  $E = E(\xi)$  (che generalizza l'insieme di Cantor) come segue. Dall'intervallo  $[0, 2\pi]$  togliamo l'intervallo aperto  $(2\pi\xi, 2\pi(1-\xi))$ : restano due intervalli chiusi, la cui unione indichiamo con  $E_1$ , entrambi di lunghezza  $2\pi\xi$ . Da ciascuno di questi ultimi togliamo un intervallo centrale aperto, in modo che rimangano quattro intervalli chiusi, ognuno di lunghezza uguale a  $2\pi\xi^2$ ; indichiamo con  $E_2$  la loro unione.



Iteriamo il procedimento: al  $k$ -esimo passo rimangono  $2^k$  intervalli chiusi  $\{I_{k,n}\}$  ( $n = 1, \dots, 2^k$ ), ciascuno di lunghezza  $2\pi\xi^k$ ; poniamo  $E_k := \bigcup_n I_{k,n}$ . Definiamo su  $[0, 2\pi]$  una misura  $\mu_k$  ponendo, per ogni sottoinsieme  $A$  di  $[0, 2\pi]$  misurabile secondo Lebesgue,

$$\mu_k(A) := \frac{1}{2\pi} \frac{m(A \cap E_k)}{2^k \xi^k},$$

dove  $m$  è l'ordinaria misura di Lebesgue. In altri termini, su ciascuno degli intervalli  $I_{k,n}$  si definisce  $\mu_k$  come un multiplo  $\lambda m$  della misura di Lebesgue,



con la costante  $\lambda$  scelta in modo che  $\mu_k(I_{k,n}) = 2^{-k} \quad \forall n = 1, \dots, 2^k$  (quindi  $\mu_k(E_k) = 1$ ); mentre  $A \cap E_k = \emptyset \implies \mu_k(A) = 0$ .

Definiamo  $E(\xi) := \lim_k E_k$  (per  $\xi = 1/3$  si ritrova l'usuale insieme di CANTOR): è facile vedere che  $E(\xi)$  è un *chiuso* di *misura nulla secondo Lebesgue*; infine, indichiamo con  $\mu_\xi$  il limite debole\* delle misure  $\mu_k$  (è evidentemente una misura *singolare* rispetto a quella di Lebesgue, dato che il suo supporto è contenuto in  $E(\xi)$ ).

A questo punto, l'idea è di introdurre la serie di FOURIER *associata* a  $\mu_\xi$ , cioè la serie trigonometrica di costanti

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, d\mu_\xi(x); \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, d\mu_\xi(x);$$

si noti che i coefficienti della serie non sono tutti nulli: ad esempio,  $a_0 = 1$ .

Se questa serie "riproduce" (in qualche senso) la misura  $\mu_\xi$ , la sua somma deve essere nulla in  $E(\xi)$ , dunque la dimostrazione è conclusa.

A questo punto, occorre però ricordare che, per il Teorema di CANTOR-LEBESGUE, condizione *necessaria* perchè la serie converga almeno su un insieme di misura positiva è che i coefficienti  $a_n, b_n$  siano infinitesimi; d'altra parte, si può dimostrare che se tali coefficienti sono infinitesimi, allora la serie converge a zero sul complementare del supporto di  $\mu_\xi$ . Il problema è così ricondotto al seguente:

*per quali  $\xi \in (0, 1/2)$  i coefficienti della serie di FOURIER associata a  $\mu_\xi$  tendono a zero?*

La risposta è piuttosto complicata, e, un po' inaspettatamente, fa intervenire proprietà *algebriche* di  $\xi$ . Un primo risultato, parziale ma... semplice (da enunciare!) è il seguente:

*se  $\xi$  è razionale, scritto  $\xi$  nella forma  $\xi = p/q$  con  $p, q$  primi tra loro, i coefficienti di FOURIER di  $\mu_\xi$  tendono a zero se e solo se  $p \neq 1$ .*

Il risultato generale è il seguente:

*i coefficienti di FOURIER di  $\mu_\xi$  tendono a zero se e solo se  $1/\xi$  non è un numero di PISOT,*

dove

**Definizione 7.1** *Un numero  $\vartheta > 1$  si dice **numero di PISOT** se è un intero algebrico (cioè, è radice di un'equazione della forma  $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$ , dove i coefficienti  $c_0, \dots, c_{n-1}$  sono numeri interi), e tutte le altre radici della stessa equazione hanno modulo  $< 1$ . ■*