Estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale

Vogliamo qui approfondire alcune questioni legate alla validità della formula fondamentale del calcolo integrale nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue per funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di variabile reale. Riferendoci sempre alla misura geometrica di Lebesgue in $\mathbb{R}$, ci chiediamo per quali f vale la formula

(A) $$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Detta $\mathcal{F}$ la classe di queste funzioni f, si dovrà innanzitutto avere che

(B) $\forall\, f \in \mathcal{F}$ la derivata f' esiste per q.o. $x \in [a,b]$ e inoltre f' è integrabile in $[a,b]$.

H. Lebesgue ha esaminato il problema posto in (B) e ha introdotto la classe delle funzioni a variazione limitata in $[a,b]$.

<u>Definizione A</u> – La funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice a <u>variazione limitata</u> se considerata una qualunque suddivisione $S = \{x_0 \equiv a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv b\}$ dell'intervallo $[a,b]$ e la relativa quantità $v_S = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$,

l'insieme dei numeri v_S così individuato ammette estremo superiore finito. Denotiamo tale estremo superiore con $V_f([a,b])$ e questo numero viene detto variazione totale di f in $[a,b]$.

Ad esempio, sono a variazione limitata le funzioni monotone e quelle lipschitziane in $[a,b]$, mentre vi sono funzioni continue che non sono a variazione limitata ($f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ se $x \in]0, 2/\pi]$, $f(x) = 0$ se $x = 0$).

Di massima importanza (e di dimostrazione non difficile) è poi il seguente teorema che caratterizza le funzioni a variazione limitata.

<u>Teorema A</u> – Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata se e solo se si può esprimere come differenza di due funzioni monotone non decrescenti.

Il risultato fondamentale sulle funzioni a variazione limitata è il seguente altro teorema di Lebesgue (questa volta di dimostrazione assai delicata).

<u>Teorema B</u> – Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata, la derivata f' esiste q.o. in $[a,b]$ ed è sommabile in $[a,b]$.

Il punto delicato della dimostrazione è quello dell'esistenza del limite finito del rapporto incrementale di f, cioè della derivata, per quasi tutti gli x di $[a,b]$. Una volta ottenuta questa esistenza, tenuto conto che in virtù del Teorema A ci si può ricondurre al caso in cui f è non decrescente, la

sommabilità di f' si ottiene facilmente utilizzando il lemma di Fatou.

Tuttavia, il Teorema B non ci permette di concludere che una funzione a variazione limitata verifica la (A), pur avendo senso entrambi i membri di (A). Per esempio, se $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $f'(x)$ esiste ed è uguale a 0 per ogni $x \neq 0$, ma la (A) non vale per gli $x > 0$. Si possono addirittura costruire funzioni continue e non decrescenti per le quali non vale la (A). Un esempio importante è la <u>funzione di Vitali</u>, che si costruisce utilizzando l'insieme di Cantor $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ dove gli insiemi chiusi C_n sono ottenuti con la costruzione

$$C_0 = [0,1],$$

$$C_1 = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right],$$

$$C_2 = \left[0, \tfrac{1}{3^2}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3^2}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{3^2}\right] \cup \left[\tfrac{8}{3^2}, 1\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

per cui $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$, C_n è costituito da 2^n intervalli chiusi ciascuno di lunghezza 3^{-n} e dunque $\mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Osserviamo che C è chiuso, perchè intersezione di una successione di chiusi, e di misura nulla dal momento che $\mu(C) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n)$. Nello stesso tempo, C ha la potenza del continuo e quindi fornisce un esempio di insieme non numerabile e di misura nulla.

Indicata con χ_n la funzione caratteristica di C_n e posto

$$f_n(x) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi_n(t)\,dt,$$

la funzione di Vitali $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si definisce allora come segue

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Si noti che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \cdot \mu(C_n) = 1$, f_n è non decrescente e costante a tratti su $[0,1] \setminus C_n$. Se I è uno dei 2^n intervalli la cui unione è C_n, si ha

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^n \int_I \chi_n(t)\,dt = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \chi_{n+1}(t)\,dt = 2^{-n}$$

per cui $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ $\forall\, x \notin C_n$ e inoltre

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \le \int_I \left|\left(\tfrac{3}{2}\right)^n \chi_n(t) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{n+1}(t)\right| dt < 2^{-n+1} \quad \forall x \in I,$$

per ogni $I \subseteq C_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dunque f_n converge uniformemente alla funzione f, che risulta pertanto continua, non decrescente e tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) = 0$ $\forall\, x \notin C$. Si ha così un esempio di funzione f continua e non costante per cui $f' = 0$ q.o. in $[0,1]$.

Un suggerimento per individuare la classe $\mathcal{F}$ viene dalla nozione di misura assolutamente continua, più precisamente dalla Prop. 2.23 in [dispense Maschio] per le misure a.c. - Infatti, osservato ancora che per Teorema A possiamo limitarci a considerare funzioni f non decrescenti, grazie al Teorema B possiamo definire la misura

$$\nu(A) = \int_A f'\,d\mu \qquad \forall\, A \subseteq [a,b] \text{ misurabile},$$

che risulta assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$. In particolare, prendendo $A = [a,x[$ si ha

$$\nu([a,x[) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b],$$

cioè la funzione $x \longmapsto \nu([a,x[)$ coincide con la funzione integrale di f' con primo estremo a. Posto $g(x) = \nu([a,x[)$ $\forall x \in [a,b]$, si ricava facilmente dall'ass. continuità dell'integrale la seguente proprietà (relativa alla funzione g)

(C) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni gruppo di intervalli $[a_1,b_1], \dots, [a_n,b_n]$ in numero finito n qualunque, non sovrapponentisi e tali che $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta_\varepsilon$, allora si ha $\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon$.

Tutte le funzioni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ che verificano (C) si dicono <u>assolutamente continue</u> in $[a,b]$. È facile vedere che le funzioni assolutamente continue sono sia a variazione limitata che uniformemente continue, mentre non è vero il viceversa (funzione di Vitali). Una condizione sufficiente per l'assoluta continuità è, ad esempio, la lipschitzianità. Ebbene, le funzioni assolutamente continue costituiscono precisamente la famiglia $\mathcal{F}$ per cui vale la (A), cioè

<u>Teorema C</u>. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente perché valga la (A) è che f sia assolutamente continua.

Questo teorema è detto teorema fondamentale del calcolo integrale.

Ne diamo uno schema di dimostrazione.

Se f, a variazione limitata su $[a,b]$, verifica: $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$, per l'assoluta continuità dell'integrale è immediato verificare che f è assolutamente continua.

Viceversa sia f assolutamente continua. Allora si può introdurre la misura μ_f definita come la differenza di due misure di Lebesgue-Stieltjes associate a funzioni non decrescenti e assolutamente continue.

Poiché f è assolutamente continua, si dimostra che μ_f è a.c. rispetto alla misura di Lebesgue. Dal teorema di Radon-Nikodym segue che $\exists\, h \in L_1(a,b)$ tale che per ogni boreliano B vale: $\mu_f(B) = \int_B h(t)\,dt$.

Scegliamo $B = [a,x[$; otteniamo così $f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)\,dt$. Ora si dimostra che $h = f'$ q.o., arrivando così al risultato.

Per le funzioni a variazione limitata vale infine il seguente risultato di decomposizione.

Supponiamo dapprima f continua. Allora f può essere decomposta nella somma di due funzioni g e h, cioè $f(x) = g(x) + h(x)$, dove $g(x)$ è assolutamente continua (per esempio si può scegliere $g(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$) e $h(x)$ è costante oppure <u>singolare</u> (cioè non costante e tale che $h' = 0$ q.o. in $[a,b]$, come la funzione di Vitali). In generale, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata, essa si può decomporre nella somma di tre funzioni

$$f(x) = g(x) + h(x) + s(x),$$

con g assolutamente continua, h costante oppure singolare e s identicamente nulla oppure costante a tratti (ogni funzione a variazione limitata ammette al più un infinità numerabile di punti di discontinuità) per un insieme di tratti al più numerabile. Usualmente la funzione s viene detta <u>funzione dei salti</u>.

Concludiamo ricordando che tra le conseguenze del teorema fondamentale del calcolo integrale, c'è anche la validità delle formule di integrazione per

parti per le funzioni assolutamente continue. Più precisamente, se f e g sono assolutamente continue in $[a,b]$ si ha che

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

le funzioni fg' e $f'g$ essendo sommabili in $[a,b]$ perchè prodotto di funzione sommabile per funzione assolutamente continua. Inoltre, è pure possibile dimostrare la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

dove $a=\varphi(\alpha)$ e $b=\varphi(\beta)$, in condizioni di ampia generalità su f (ad esempio, misurabile e limitata in $[a,b]$) e φ (assolutamente continua in $[\alpha,\beta]$ e tale che $a \leq \varphi(t) \leq b \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta]$): si noti in particolare che le ipotesi su f e φ devono essere tali da assicurare l'integrabilità del prodotto $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$.