Vogliamo arrivare a giustificare la definizione data di integrale. Prepariamo qualche lemma

<u>Lemma 1</u>. $(A, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura, $\{B_n\}$ succ. sottoinsiemi di A, $B \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$. Allora

1) se $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n)$ conv. $\Rightarrow$ B è m-trascurabile

2) se $x \notin B$, allora $\exists\, n_0 : x \notin B_n \quad \forall\, n \geq n_0$.

<u>Lemma 2</u> Se $s: A \to \mathbb{R}$ è a scala ed $\varepsilon > 0$, e vale

$$\int_A |s|\, dm < \varepsilon^2,$$

allora $$m\left(\{x \in A : |s(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$

<u>Dim</u>. per assurdo: se $m\left(\{|s| \geq \varepsilon\}\right) \geq \varepsilon$, allora

$$\int_A |s|\, dm \geq \int_{\{|s| \geq \varepsilon\}} |s|\, dm \geq \varepsilon^2$$ in contrasto con

<u>Lemma 3</u>. Se $\{s_n\}$ verifica la condizione di Cauchy nella definizione $\lim_{n',n'' \to \infty} \int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm = 0$, allora $\exists$ sottosucc. $\{s_{n_k}\}$ e funzione g tali che

1) $s_{n_k} \to g$ m-q.o.;

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ insieme $A_\varepsilon \subseteq A$ con $m^*(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $s_{n_k} \to g$ uniform. in $A \setminus A_\varepsilon$

Dim. Lemma 3. Fisso n_1 tale che

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm < \frac{1}{4} \quad \forall n', n'' \geq n_1.$$

Poi fisso $n_2 > n_1$ tale che

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm < \frac{1}{4^2} \quad \forall n', n'' \geq n_2$$

... e così via: $n_k > n_{k-1}$ t. che $\int_A |s_{n'} - s_{n''}| < \frac{1}{4^k}$ $\forall n', n'' \geq n_k$

Abbiamo, in part. $\int_A |s_{n_k} - s_{n_{k+1}}|\, dm < \frac{1}{4^k}$ $\forall k$.

Considero gli insiemi

$$P_k = \left\{ x \in A : |s_{n_k}(x) - s_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\}, \quad Q_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} P_i.$$

Se $x \notin Q_k$, $|s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}$ $\forall i \geq k$ e

dunque per C. Weierstrass

$$\sum_{i=k}^{\infty} \left(s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x) \right) \text{ conv. unif. in } A \setminus Q_k$$

$\Rightarrow \{s_{n_i}\}$ succ. converge uniform. a una funzione $g_k : A \setminus Q_k \to \mathbb{R}$.

Noto che siccome $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ succede che

$A \setminus Q_k \subseteq A \setminus Q_{k+1}$ e $g_{k+1} = g_k$ su $A \setminus Q_k$.

Posto $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, esiste $g : A \setminus Q \to \mathbb{R}$

con $g = g_k$ su $A \setminus Q_k$.

· Lemma 2 $\Rightarrow$ $m(P_k) < 2^{-k}$

Lemma 1 $\Rightarrow$ $m^*(Q) = 0$ perchè $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(P_k)$ conv.

$\Rightarrow$ $s_{n_k} \to g$ in $A \setminus Q$ punt., dunque m-q.o. in A

· Pertanto 1) è provata. Per mostrare 2) basta prendere $A_\varepsilon = Q_k$ con $\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$.

Proposizione. Se f è una funzione integrabile in A, il $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n(x)dm$ esiste finito ed è indipendente dalla successione $\{s_n\}$ considerata (naturalmente fra le $\{s_n\}$ a scala tali che $s_n \to f$ m-q.o., $\lim_{n',n''\to\infty} \int_A |s_{n'} - s_{n''}| dm = 0$).

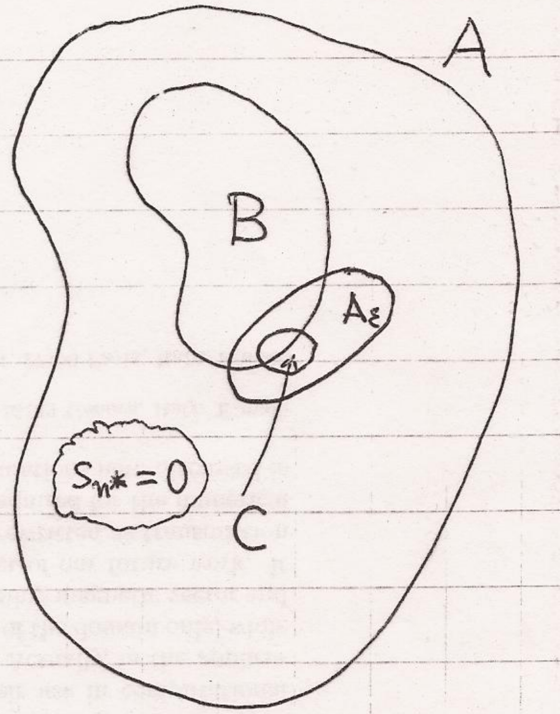
Dim.

- che il $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n(x)\,dm$ esista finito è conseguenza della condizione di Cauchy.
- Siano ora $\{s_{1,n}\}$ e $\{s_{2,n}\}$ due succ. di funzioni a scala nelle condizioni della prop.: posto $s_n = s_{1,n} - s_{2,n}$, ho che $\{s_n\}$ è succ. funzioni a scala, con $s_n \to 0$ m-q.o. e $\{s_n\}$ verifica ancora cond. di Cauchy. Basta allora provare che $\int_A s_n\,dm \to 0$ per $n \to \infty$.
- Possiamo senz'altro supporre che gli insiemi
$$\{x \in A : s_n(x) \neq 0\}$$
non abbiano tutti misura nulla da un certo indice in poi (altrimenti $\int_A s_n(x)dm = 0$ ... e abbiamo già concluso).

Fisso $\varepsilon > 0$.

Esiste $n^* : \forall\, n', n'' \geq n^*$

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm \leq \varepsilon$$



e posso supporre che

$$B = \{x \in A : s_{n^*}(x) \neq 0\}$$

abbia misura positiva (alla peggio aumento n^*).

Sia $M > 0$: $|s_{n^*}(x)| \leq M$ per q.o. $x \in A$.

Lemma 3 $\Longrightarrow \exists\, s_{n_k} \to g$ m-q.o. (g dovrà essere $= 0$)

$\exists\, A_\varepsilon$ con $m^*(A_\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ e

$\exists\, \bar{k} : \forall\, k \geq \bar{k} \quad |s_{n_k}(x) - 0| \leq \dfrac{\varepsilon}{m(B)} \quad \forall x \in A \setminus A_\varepsilon$

Fisso $k \geq \bar{k}$ tale che $n_k \geq n^*$

$$\int_A |s_n - s_{n_k}|\, dm \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n^*.$$

Se $C = \{x \in A : |s_{n_k}(x)| > \dfrac{\varepsilon}{m(B)}\}$, ho $C \subseteq A_\varepsilon$ e $m(C) \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Ora, se $n \geq n^*$

$$\left|\int_A s_n\, dm\right| \leq \int_A |s_n - s_{n_k}| + \int_A |s_{n_k}| \leq \varepsilon + \int_{A\setminus B} |s_{n_k}| + \int_B |s_{n_k}|$$

$$\leq \varepsilon + \int_{A\setminus B} |s_{n_k} - s_{n^*}| + \int_{B\setminus C} |s_{n_k}| + \int_C |s_{n_k}|$$

$$\leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{m(B)}\, m(B\setminus C) + \int_C |s_{n_k} - s_{n^*}| + \int_C |s_{n^*}|$$

$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + m(C) M \leq 5\varepsilon.$$

<u>Teoremone</u>. Sia $\{f_n\}$ succ. funzioni integrabili che verifica condizione Cauchy

$$\lim_{n,k\to\infty} \int_A |f_n - f_k| \, dm = 0$$

Allora esistono sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e funzione integrabile f tali che

$$f_{n_k} \to f \quad \text{q.o.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, dm = 0 \quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{N.B. tutta la successione } f_n \text{ (non l'estratta)}}$$

Prima di dimostrare, c'è un

<u>Lemma 4</u>. Nelle condiz. della def. di integrale

$$\int_A |s_n - f| \, dm \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

<u>Dim</u>. Fisso indice k e osservo che

$$t_n = |s_n - s_k| \longrightarrow \varphi = |f - s_k| \quad \text{q.o.}$$

$\{t_n\}$ è succ. di funz. a scala e verifica cond. Cauchy

$$|t_{n'} - t_{n''}| \leq |s_{n'} - s_{n''}|$$

Allora, per definizione di integrale,

$$\int_A |f - s_k| \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A |s_n - s_k| \, dm \leq \varepsilon$$

perché $\int_A |s_n - s_k| \, dm \leq \varepsilon$ per n e k suff. grandi $\square$

Dim. teoremone.

Ognuna delle f_n è integrabile e avrà la sua succ. di funzioni a scala $s_k^n \longrightarrow f_n$ q.o., $\int_A |s_{k'}^n - s_{k''}^n| \, dm \xrightarrow[k',k'' \to \infty]{} 0$

Uso cond. Cauchy, Lemma 3, Lemma 4 per determinare una funzione $t_n = s_{k_n}^n$ e un insieme A_n tali che

$$m^*(A_n) \leq 2^{-n}, \quad |f_n(x) - t_n(x)| \leq 2^{-n} \ \forall x \in A \setminus A_n,$$

$$\int_A |t_n - f_n| \, dm \leq 2^{-n}$$

Studio $\{t_n\}$: verifica cond. Cauchy per cui

Lemma 3 $\Longrightarrow \exists \, t_{n_k}$ conv. q.o. a una f

f è integrabile (t_{n_k} sono a scala).

$$\int_A |f - f_n| \, dm \leq \underbrace{\int_A |f - t_{n_k}| \, dm}_{\leq \varepsilon \text{ per } k \text{ grande}} + \underbrace{\int_A |t_{n_k} - f_{n_k}| \, dm}_{\leq 2^{-n_k}} + \underbrace{\int_A |f_{n_k} - f_n| \, dm}_{\substack{\leq \varepsilon \text{ per } k \\ \text{ed } n \text{ grandi}}}$$

Ora provo $f_{n_k} \to f$ q.o.

Considero $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_{n_k}$ e sia $x \notin B$

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \underbrace{|f(x) - t_{n_k}(x)|}_{\text{tende a } 0 \text{ q.o.}} + \underbrace{|t_{n_k}(x) - f_{n_k}(x)|}_{\leq 2^{-n_k}}$$

e B è m-trascurabile perché $\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_{n_i})$ converge

(Lemma 1). □