Didattica di supporto
Corso di Analisi C

Antonio Marigonda*

24 gennaio 2007

1 Complementi sugli spazi ℓ^p

Richiamiamo la definizione dello spazio ℓ^2.

Definizione 1 *Definiamo il seguente insieme:*

$$\ell^2 := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \textit{ per ogni } i \in \mathbb{N} \textit{ e } \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 < +\infty\}.$$

Su ℓ^2 definiamo le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_j)_{j\in\mathbb{N}} &= (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} && \textit{(Somma)} \\ c(x_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (cx_i)_{i\in\mathbb{N}} && \textit{(Prodotto con scalari } c \in \mathbb{R}\textit{)} \\ \langle (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \rangle_{\ell^2} &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i && \textit{(Prodotto scalare)} \end{aligned}$$

Si verifica che somma e prodotto con scalari rendono ℓ^2 uno spazio vettoriale. Inoltre l'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2}$ definisce un prodotto scalare la cui norma associata è:

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2}.$$

Si prova che $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ è di Banach, pertanto ℓ^2 è uno spazio di Hilbert.

È possibile dare una definizione più generale di spazio ℓ^p, $1 \le p \le +\infty$ e di norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$. Tali spazi risultano essere di Banach ma, in generale, non sono spazi di Hilbert se $p \neq 2$. Questo fa sì che il caso $p = 2$ rivesta un ruolo *speciale* all'interno della teoria. Diamo la definizione di spazio ℓ^p:

Definizione 2 *Sia $1 \le p < +\infty$. Definiamo i seguenti insiemi:*

$$\ell^p := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \textit{ per ogni } i \in \mathbb{N} \textit{ e } \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty\}.$$

$$\ell^\infty := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \textit{ per ogni } i \in \mathbb{N} \textit{ e } \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} < +\infty\}.$$

*Dipartimento di Matematica Università di Pavia, via Ferrata 1 - 27100 Pavia. Ufficio C23. E-mail: antonio.marigonda@unipv.it

Su ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$ definiamo le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_j)_{j\in\mathbb{N}} &= (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \textit{(Somma)} \\ c(x_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (cx_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \textit{(Prodotto con scalari } c \in \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

Si verifica che somma e prodotto con scalari rendono ℓ^p uno spazio vettoriale per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. Definiamo le seguenti funzioni:

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}, \ p < +\infty,$$

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$

Si prova che tali funzioni sono norme rispettivamente su ℓ^p e ℓ^∞ che rendono tali spazi di Banach.

Siamo ora interessati allo studio di alcuni importanti sottospazi di ℓ^p.

Definizione 3 *Definiamo lo spazio delle successioni definitivamente nulle:*

$c_{00} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}$ *per ogni* $i \in \mathbb{N}$ *ed esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $x_i = 0 \, \forall i > N\}$

Si ha che c_{00} è un sottospazio vettoriale di ℓ^p per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. Inoltre per ogni $1 \leq p < +\infty$ si ha che c_{00} è denso *in ℓ^p.*

Dimostrazione: Che c_{00} sia un sottospazio vettoriale di ℓ^p per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ è evidente. Sia ora $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ con $1 \leq p < +\infty$. Cerchiamo una successione $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \left((y_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di c_{00} che converga a x nella norma ℓ^p. In altre parole, tale che si abbia $\|y^{(n)} - x\|_{\ell^p} \to 0$ per $n \to \infty$. Definiamo l'elemento $y^{(n)}$ troncando la successione x all'indice n, ovvero ponendo

$$y_i^{(n)} = x_i \text{ se } i \leq n, \qquad\qquad y_i^{(n)} = 0 \text{ se } i > n.$$

Osserviamo che le successioni $y^{(n)}$ così definite hanno solo un numero finito di elementi non nulli (ne hanno al più n), quindi sono elementi di c_{00} Rimane da provare la convergenza. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ipotesi si ha che la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p$ è convergente, pertanto esiste $\bar{n}$ tale che $\sum_{i=\bar{n}+1}^{+\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p$. Ma allora per ogni $n > \bar{n}$ si ha (ricordando che $y^{(n)}$ coincide con x sui primi n elementi):

$$\|y^{(n)} - x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=\bar{n}+1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

come desiderato.

Osservazione: Abbiamo detto che c_{00} è denso in ℓ^p rispetto alla norma di ℓ^p per $1 \leq p < +\infty$. Non è invece vero che c_{00} sia denso in ℓ^∞ rispetto alla norma di ℓ^∞. I prossimi risultati ci permetteranno di chiarire questa questione.

Definizione 4 *Definiamo il seguente insieme:*

$$c_0 := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{i\to\infty} |x_i| = 0\}.$$

c_0 è l'insieme delle successioni infinitesime. *Si ha che c_0 è un sottospazio vettoriale proprio di ℓ^∞ che contiene propriamente ogni spazio ℓ^p, $1 \le p < \infty$. Inoltre c_0 è la chiusura di c_{00} rispetto alla norma ℓ^∞*

Dimostrazione: Proviamo l'inclusione: se $x \in \ell^p$, allora si deve avere che la serie $\sum |x_i|^p$ è convergente, pertanto $|x_i|^p$ è infinitesimo ed essendo $p > 1$ si conclude che $|x_i|$ è infinitesimo per $i \to \infty$. Tale inclusione è propria osservando che l'elemento $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definito da $x_0 = x_1 = 0$, $x_n = 1/\log i$ se $i \ge 2$, appartiene a c_0 ma non appartiene a ℓ^p per nessun $1 \le p < \infty$. Infatti:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\log^p i} > \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i}$$

che diverge (infatti per $y \ge 2$ si ha $y > \log^p y$ per ogni $p \ge 1$).
Sia $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ e, come prima, definiamo l'elemento $y^{(n)} \in c_{00}$ troncando la successione x all'indice n, ovvero ponendo

$$y_i^{(n)} = x_i \text{ se } i \le n, \qquad\qquad y_i^{(n)} = 0 \text{ se } i > n.$$

Per definizione, si ha che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} > 0$ tale che $|x_i| < \varepsilon$ se $i > \bar{n}$, pertanto per ogni $n > \bar{n}$ si ha:

$$\|y^{(n)} - x\|_{\ell^\infty} = \sup\{|x_i| : i > n\} < \varepsilon.$$

Quindi c_{00} è denso in c_0 dotato della norma ℓ^∞. Proviamo ora che c_0 è chiuso per la norma di ℓ^∞, e questo ci permetterà di concludere che la chiusura di c_{00} rispetto alla norma ℓ^∞ è c_0. Sia x nella chiusura di c_0 e sia $\varepsilon > 0$. Allora, definito l'elemento $y^{(n)} \in c_{00}$ troncando la successione x all'indice n, ovvero ponendo

$$y_i^{(n)} = x_i \text{ se } i \le n, \qquad\qquad y_i^{(n)} = 0 \text{ se } i > n,$$

si ha che esiste $\bar{n}$ tale che $\|y^{(n)} - x\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$ se $n > \bar{n}$, pertanto

$$|x_i| < \|y^{(\bar{n})} - x\|_{\ell^\infty} < \varepsilon \text{ per ogni } i > \bar{n},$$

da cui $x \in c_0$.

Vogliamo ora precisare ulteriormente le inclusioni tra gli spazi ℓ^p con la proposizione seguente:

Proposizione 1 *Sia $1 \le p < r < \infty$. Allora $c_{00} \subset \ell^p \subset \ell^r \subset c_0 \subset \ell^\infty$ con inclusione propria, inoltre $\|x\|_{\ell^\infty} \le \|x\|_{\ell^r} \le \|x\|_{\ell^p}$.*

Dimostrazione: resta da provare che $\ell^p \subset \ell^r$ e la disuguaglianza delle norme. Proviamo che se $x \in \ell^r$ si ha $\|x\|_{\ell^\infty} \le \|x\|_{\ell^r}$. Infatti per ogni i vale

$$|x_i| = (|x_i|^r)^{1/r} \le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^r\right)^{1/r} = \|x\|_{\ell^r},$$

da cui $\|x\|_{\ell^\infty} \le \|x\|_{\ell^r}$. Osserviamo inoltre che se $x \in c_0$ vale $\|x\|_{\ell^\infty} = \max\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Resta da provare la disuguaglianza $\|x\|_{\ell^r} \le \|x\|_{\ell^p}$ se $p < r$. Supponiamo $x \neq 0$ altrimenti la disuguaglianza è vera. Dividendo ambo i membri per $\|x\|_\infty$, possiamo ridurci al caso di provare la disuguaglianza $\|x\|_{\ell^r} \le \|x\|_{\ell^p}$ solo sugli elementi $x \in \ell^p$ con $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$. In generale si ha $|x_i| \le 1$, per cui (essendo $p < r$ si ha $|x_i|^r \le |x_i|^p$) si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r \le \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p$$

Osserviamo ora che poiché $x \in c_0$, si ha che uno degli $|x_i|$ vale 1, quindi $\sum |x_i|^r \ge 1$, da cui, poiché $1/r < 1/p$, si ottiene:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_{\ell^p},$$

il che prova l'inclusione degli spazi e la disuguaglianza delle norme, essendo il membro più a sinistra pari a $\|x\|_{\ell^r}$. L'inclusione è propria perché la successione definita da $x_n = 1/(n+1)^{1/p}$ appartiene a ℓ^r ma non a ℓ^p.

2 Complementi sugli spazi L^2 e L^p

Definizione 5 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura. Definiamo $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ che indicheremo con $L^2(X)$ o semplicemente L^2 come lo spazio delle classi di equivalenza di funzioni $f : X \to \mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con la misura di Lebesgue) modulo l'uguaglianza μ-q.o. tali che*

$$\int_X |f|^2 \, d\mu < +\infty.$$

Proposizione 2 *Nelle notazioni precedenti, L^2 è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e la posizione*

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_X f\bar{g} \, d\mu$$

definisce un prodotto scalare che rende lo spazio L^2 uno spazio di Hilbert ($\bar{g}(x)$ indica il complesso coniugato di $g(x) \in \mathbb{K}$, ovviamente se $g(x) \in \mathbb{R}$ si ha $\bar{g}(x) = g(x)$).

Dimostrazione Ricordiamo la disuguaglianza elementare $2ab \le a^2 + b^2$ valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Siano $f, g, h \in L^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Si ha ovviamente che $\alpha f \in L^2$. Per definizione, $f + g$ è misurabile e si ha:

$$\int_X |f+g|^2 \, d\mu = \int_X |f|^2 \, d\mu + \int_X |g|^2 \, d\mu + 2 \int_X f\bar{g} \, d\mu < +\infty.$$

Quindi L^2 è spazio vettoriale.
Proviamo ora che $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ definisce un prodotto scalare. Dobbiamo verificare le seguenti proprietà per $f, g, h \in L^2$:

1. $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

2. $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle, \alpha \in \mathbb{K}$

3. $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

4. $\langle f, f\rangle > 0$ se $f \neq 0$ μ-q.o.

Tali proprietà sono di verifica immediata a partire dalla definizione. Dotiamo lo spazio L^2 della norma indotta dal prodotto scalare:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}} = \left(\int_X |f|^2\, d\mu\right)^{1/2}.$$

Per provare che L^2 è di Hilbert resta da provare che esso è completo rispetto a questa norma. Ricordiamo il seguente risultato valido negli spazi normati: *Se $(X, \|\cdot\|_X)$ è spazio normato, allora esso è completo se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che valga $\sum \|x_n\|_X < +\infty$ si abbia $\sum x_n$ convergente in norma ad un elemento di X.*
Pertanto, sia f_n una successione di elementi di L^2 tale che la serie (numerica) $\sum \|f_n\|_{L^2} = \lambda < +\infty$. Dobbiamo provare che $\sum f_n$ converge in L^2 ad un elemento di L^2.

1. supponiamo $f_n(x) \geq 0$ per μ-q.o. $x \in X$ e poniamo $w_n = \sum_{k=0}^n f_k$. La successione $\{w_n(x)\}_n \in \mathbb{N}$ è non decrescente per μ-q.o. $x \in X$ e risulta per ogni n:

$$\|w_n\|_{L^2} = \left\|\sum_{k=0}^n f_k\right\|_{L^2} \leq \sum_{k=0}^n \|f_k\|_{L^2} \leq \lambda, \qquad \int_X u_n^2\, d\mu \leq \lambda^2.$$

Pertanto per il Teorema di Beppo Levi si ha che w_n^2 converge μ-q.o. ad una funzione g integrabile tale che $g \geq w_n^2 \geq 0$ per μ-q.o. $x \in X$ e per ogni n. Definiamo $w = g^{1/2} \in L^2$. Si ha inoltre $|w_n - w|^2 \leq 2w_n^2 + 2w^2 \leq 4g$, quindi si può applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue alla funzione $|w_n - w|^2$ ottenendo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |w_n - w|^2\, d\mu = 0$$

da cui $\|w_n - w\|_{L^2}^2 \to 0$, segue la convergenza richiesta per la successione delle ridotte.

2. Nel caso generale decomponiamo f_n nelle parti positive e negative. Si ha $0 \leq f_n^{\pm} \leq |f_n|$ per μ-q.o. x per cui per ogni n si ha $f_n^{\pm} \in L^2$ e ci si riconduce al caso precedente.

In analogia a quanto fatto in precedenza per gli spazi ℓ^p definiamo gli spazi L^p con $1 \leq p \leq \infty$.

Definizione 6 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura, $1 \leq p < +\infty$. Definiamo:*

$$L^p(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ funzioni } \mu\text{-misurabili tali che } |f|^p \in L^1(X, \mathbb{R})\}.$$

Si prova che la posizione:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

definisce una norma che rende $L^p(X)$ spazio di Banach.

Definizione 7 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura, $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile. Definiamo* l'estremo superiore essenziale *di f nel modo seguente:*

$$es\sup(f) = \inf_{\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}} \{\alpha : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\}$$

con la convenzione $\inf \emptyset = +\infty$*. La definizione è ben posta, perché modificando f su un insieme di misura nulla non se ne altera l'estremo superiore essenziale. Si prova che se $\{\alpha \in \mathcal{R} \cup \{\pm\infty\} : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\} \neq \emptyset$ allora*

$$es\sup(f) = \min_{\mathcal{R}\cup\{\pm\infty\}} \{\alpha : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\}.$$

Dimostrazione Sia α_j una successione convergente all'estremo inferiore L. Poniamo $A_j = \{x : f(x) > \alpha_j\}$, ciascun A_j ha misura nulla e pertanto l'unione di tutti gli A_j ha misura nulla perchè unione numerabile di insiemi di misura nulla. Si ha che $\{x : f(x) > L\}$ coincide con l'unione di tutti gli A_j, pertanto ha misura nulla. Quindi l'estremo inferiore L appartiene all'insieme $\{\alpha : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\}$, pertanto ne è il minimo.

Definizione 8 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura. Definiamo:*

$$L^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ funzioni } \mu\text{-misurabili tali che } es\sup(|f|) < \infty\},$$

Si prova che la posizione $\|f\|_{L^\infty} = es\sup(|f|)$ definisce una norma che rende $L^\infty(X)$ spazio di Banach.

Dimostrazione Proviamo che $\|\cdot\|_{L^\infty}$ è effettivamente una norma su L^∞. Sia $f \in L^\infty$. Dalla definizione, segue che $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ per quasi ogni $x \in X$. Ciò implica che $\|f\|_{L^\infty} \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $f = 0$ in L^∞, l'assoluta omogeneità è ovvia dalla definizione, e la disuguaglianza triangolare discende dal fatto che $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$.

Proposizione 3 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura. Sia $f \in L^p$, $g \in L^q$ con $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq +\infty$ (con la convenzione $1/\infty = 0$). Allora $fg \in L^1$ e vale la* disuguaglianza di Hölder*: $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.*

Dimostrazione La conclusione è ovvia se $p = 1$ o $p = \infty$ oppure se $f = 0$ o $g = 0$. Supponiamo perciò $1 < p < \infty$, $f, g \neq 0$. Proviamo la seguente disuguaglianza, valida per $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Infatti, poiché la funzione log è concava su $[0, +\infty[$, vale la seguente disuguaglianza:

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab$$

da cui segue la disuguaglianza voluta osservando che log è strettamente crescente. Si ha allora per q.o. $x \in X$

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Da cui, integrando:

$$\|f(x)g(x)\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f(x)\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}|g(x)|_{L^q}^q.$$

Rimpiazzando f con λf, $\lambda > 0$, otteniamo:

$$\|f(x)g(x)\|_{L^1} \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f(x)\|_{L^p}^p + \frac{1}{q\lambda}|g(x)|_{L^q}^q.$$

Posto $\lambda = \|g\|_{L^q}^{q/p}/\|f\|_{L^p}$ si ha la disuguaglianza voluta.

Osservazione: una questione naturale che ci si può porre è la seguente: supponiamo di avere una successione di funzioni f_n convergente in norma L^p ad una funzione f, che rapporto intercorre tra il limite puntuale della successione $f_n(x)$ e $f(x)$? Ovviamente questa domanda è suggestiva ma alquanto imprecisa, infatti bisogna tenere conto del fatto che f_n e f sono definite a meno di insiemi di misura nulla, per cui il cosiddetto limite puntuale di f_n non ha significato.

Definizione 9 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura. Siano f ,$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funzioni misurabili. Diremo che la successione f_n converge a f in misura se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

La seguente proposizione, di cui omettiamo la dimostrazione, porge la soluzione del problema considerato in precedenza: se $f_n \to f$ in L^p allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge a f puntualmente quasi ovunque.

Proposizione 4 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura.*

1. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di funzioni misurabili convergenti in misura ad f, allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} convergente a f q.o.*

2. *Sia $1 \leq p < +\infty$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di funzioni L^p convergente in L^p ad una funzione f, allora f_n converge a f in misura, perciò esiste una sottosuccessione f_{n_k} convergente a f q.o.*

3. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di funzioni convergenti q.o. a f e $\mu(X) < \infty$, f_n converge a f in misura.*

Osservazione: la proposizione precedente non assicura la convergenza q.o. di *tutta* la successione f_n ma solo l'esistenza di una sottosuccessione convergente q.o. A titolo esemplificativo, si veda l'esempio seguente.

Esempio: Definiamo $I_{jk} = [k/j, (k+1)/j]$ per ogni coppia di indici appartenenti ad $A = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \leq j-1\}$. Poniamo su A un ordinamento totale nel modo seguente: $(i,j) < (k,h)$ se $i < k$ oppure se $i = k$ e $j < h$. L'insieme $A = \{a_n\}$ così ottenuto è numerabile. Definiamo $f_n(x) = \chi_{I_{a_n}}(x)$. f_n converge alla funzione nulla in L^2, ma non converge puntualmente in nessun punto.

In analogia a quanto fatto in precedenza per gli spazi ℓ^p, vorremmo confrontare tra di loro gli spazi L^p. Tuttavia ci imbattiamo in una grande differenza rispetto al caso precedente: nel caso più generale non è possibile confrontare L^p con L^r se $p \neq r$, ovvero esistono funzioni L^p che non sono L^r e viceversa.

Esempio: Consideriamo la seguente funzione $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_p(0) = 0$ e da

$$f_p(x) = \frac{1}{(|x|(1 + \log^2(|x|)))^{1/p}}, \; x \neq 0$$

Questa funzione appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ ma non a $L^r(\mathbb{R})$ per $r \neq p$. Poniamo infatti $\alpha = r/p$. Supponiamo $\alpha > 1$ e studiamo l'integrabilità di $1/(x(1 + \log^2(x)))^\alpha$ in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^+$. Poichè $\alpha > 1$, si ha che $x^{\alpha-1}(1 + \log^2(x))^\alpha \to 0$ per $x \to 0^+$ (esercizio), riscrivendo, ciò implica che, per x sufficientemente vicino a 0, si ha: $x^\alpha(1+\log^2(x))^\alpha < x$, da cui $f_p^p > 1/x$ che non è integrabile in un intorno di 0. Supponiamo ora $0 < \alpha < 1$ e studiamo l'integrabilità di $1/(x(1+\log^2(x)))^\alpha$ in un intorno di $+\infty$. Poichè $0 < \alpha < 1$, si ha che $x^{\alpha-1}(1 + \log^2(x))^\alpha \to 0$ per $x \to +\infty$ (esercizio), riscrivendo, ciò implica che, per x sufficientemente vicino a 0, si ha: $x^\alpha(1 + \log^2(x))^\alpha < x$, da cui $f_p^p > 1/x$ che non è integrabile in un intorno di $+\infty$.
Per $r = p$, cioè $\alpha = 1$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} f_p^p \, dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \log^2(x))} \frac{1}{x} \, dx = 2 \arctan[\log(x)]_{x=0}^{x=\infty} = 2\pi.$$

Osservazione: All'opposto dell'esempio precedente, in cui gli L^p risultavano non confrontabili, supponiamo di avere uno spazio (X, μ) tale che $\mu = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$. In questo caso tutti gli L^p coincidono e lo spazio L^p risulta avere dimensione finita pari a N, pertanto tutte le norme sono topologicamente equivalenti.

Un caso di rilevante interesse è il seguente:

Proposizione 5 *Sia (X, μ) spazio con misura e sia $\mu(X) < +\infty$. Allora se $1 \leq p < r \leq \infty$ si ha $L^r \subset L^p$ con immersione continua.*

Dimostrazione: Se $r = \infty$ la dimostrazione è immediata. Sia $r \neq \infty$ e $f \in L^r$. Allora $|f|^p \in L^{r/p}$. L'esponente coniugato di r/p è $q = r/(r-p)$ e, poiché X ha misura finita, si ha che la costante 1 appartiene a L^q. Per la disuguaglianza di Hölder si ha:

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \||f|^p\|_{L^{r/p}} \cdot \|1\|_{L^q}$$

da cui $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^r} \cdot \mu(X)^{1/p-1/r}$.

Esempio: Sia $E = \{\chi_{[0,1/n]}(x) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \subset L^p[0,1]$ per ogni p. Descrivere al variare di $1 \leq p \leq \infty$ la chiusura di E in L^p.
Soluzione: Sia $p \neq \infty$. Si ha $\|\chi_{[0,1/n]}\|_{L^p} = 1/n^p$. Pertanto la chiusura di E in L^p è $E \cup \{0\}$. Se $p = \infty$ per ogni $m \neq n$ si ha $\|\chi_{[0,1/m]} - \chi_{[0,1/n]}\|_{L^\infty} = 1$, quindi E non ha punti di accumulazione, perciò è chiuso.

3 Proiezione su chiusi convessi in spazi di Hilbert

Definizione 10 *Sia X uno spazio vettoriale, $S \subseteq X$. Diremo che S è* convesso *se per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni coppia $x, y \in X$ si ha $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$*

Definizione 11 *Sia X spazio normato, $z \in X$, $A \subset X$ non vuoto. Definiamo la* distanza *di z da A nel modo seguente:*

$$d_A(z) = \inf\{\|z - x\| : x \in A\}$$

Definizione 12 *Sia X spazio normato, $z \in X$, $A \subset X$ chiuso non vuoto. Definiamo la* proiezione *di z da A nel modo seguente:*

$$\pi_A(z) = \{x \in A : d_A(z) = \|z - x\|\}$$

In generale, $\pi_A(z)$ è un insieme, può avere più elementi o essere vuoto. Comunque, $\pi_A(z)$ è sempre chiuso grazie al fatto che A è chiuso e alla continuità della norma.

Teorema 1 *Sia X spazio di Hilbert, $z \in X$, $S \subset X$ chiuso convesso non vuoto. Allora esiste un unico $x \in S$ tale per cui $d_S(z) = \|z - x\|$, quindi $\pi_S(z) = \{x\}$. L'unico elemento $x \in S$ della proiezione di z su S è caratterizzato dalla disuguaglianza $\langle z - x, y - x\rangle \leq 0$, per ogni $y \in S$.*

Dimostrazione Sia y_n successione in S tale che $d_n = |z - y_n| \to d_S(z)$. Proviamo che y_n è di Cauchy. Ricordiamo l'*identità del parallelogrammo* valida negli spazi a prodotto scalare:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

per ogni coppia di elementi a, b dello spazio. Applichiamo il precedente con $a = z - y_n$, $b = z - y_m$, si ha allora:

$$\left|z - \frac{y_n + y_m}{2}\right|^2 + \left|\frac{y_m - y_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

Poichè S è convesso, si ha $(y_n + y_m)/2 \in S$ e quindi $|z - (y_n + y_m)/2|^2 \geq d_S^2(z)$, da cui:

$$\left|\frac{y_m - y_n}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d_S^2(z)$$

Al limite per m, n che tendono a $+\infty$ il termine di destra tende a 0, quindi la successione y_n è di Cauchy e pertanto converge ad un elemento di S, $y_n \to u$.
Supponiamo ora di avere $u \in S$ che verifichi $d_S(z) = |z - u|$. Sia $w \in S$ e si consideri $v_t = (1-t)u + tw \in S$ per $t \in]0,1]$. Si ha

$$|z-u|^2 \leq |z-v_t|^2 = |(z-u) - t(w-u)|^2 = |z-u|^2 - 2t\langle z-u, w-u\rangle + t^2|w-u|^2$$

da cui $2\langle z - u, w - u\rangle \leq t|w - u|^2$, passando al limite per $t \to 0^+$ si ha $\langle z - u, w - u\rangle \leq 0$, per ogni $w \in S$.

Supponiamo ora di avere $u \in S$ che verifichi $\langle z - u, w - u \rangle \leq 0$ per ogni $w \in S$, allora si ha

$$|u - z|^2 - |w - z|^2 = 2\langle z - u, w - u \rangle - |u - w|^2 \leq 0$$

per ogni $w \in S$ da cui $d_S(z) = |u - z|$.
Proviamo l'unicità. Siano u_1, u_2 verificanti: $\langle z - u_i, w - u_i \rangle \leq 0$ per $i = 1, 2$ per ogni $w \in S$. In particolare, si ha:

$$\langle z - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leq 0, \qquad\qquad \langle z - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0$$

da cui sommando si ha $|u_1 - u_2|^2 \leq 0$ per cui $u_1 = u_2$.

Osservazione In verità non occorre che lo spazio a prodotto scalare X sia completo. Quello che conta è che l'insieme S nella topologia indotta da X sia completo. Questo capita, ad esempio, se S è un sottospazio di dimensione finita di uno spazio a prodotto scalare (non necessariamente completo) X.

Osservazione Siano $u_1 = \pi_S(z_1), u_2 = \pi_S(z_2)$. Come visto si ha: $\langle z_i - u_i, w_i - u_i \rangle \leq 0$ per $i = 1, 2$ per ogni $w_i \in S$, $i = 1, 2$. Scelto $w_1 = \pi_S(z_2)$ e $w_2 = \pi_S(z_1)$, sommando si ottiene:

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|z_1 - z_2\|$$

che mostra la non espansività (e conseguente continuità) dell'operatore π_S.

Corollario 1 *In uno spazio di Hilbert, ogni chiuso convesso non vuoto ammette un unico elemento di norma minima.*

Esempio: Consideriamo $\mathbb{R}^2$ munito della norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, e il segmento $S := \{x + y = 1 : x \geq 0, y \geq 0\}$. S è chiuso, convesso non vuoto, ma non possiede un solo elemento di norma minima (tutti i suoi elementi hanno norma 1). Nonostante la norma $\|(x, y)\|_1$ sia topologicamente equivalente all'usuale norma euclidea (quella data dal prodotto scalare $(x, y) \cdot (z, t) = xz + yt$), visto che la dimensione dello spazio è finita, si ha che $\mathbb{R}^2$ munito della norma $\|\cdot\|_1$ è di Banach ma non di Hilbert.

Esempio: Consideriamo $C([0, 1])$ munito della norma della convergenza uniforme. Poniamo:

$$K = \{f \in C([0, 1]) : \int_0^{1/2} f\,dx - \int_{1/2}^1 f\,dx = 1\}.$$

K è chiuso, convesso, non vuoto ma è privo di elementi di norma minima. Infatti, definiamo $u(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[1/2,1]}(x)$, e poniamo $T(f) = \int_0^1 f u\,dx$. Pertanto $K = T^{-1}\{1\}$. T è continua da $C([0, 1])$ munito della topologia della convergenza uniforme in $\mathbb{R}$, infatti se f_n converge uniformemente a f è possibile passare al limite sotto al segno di integrale:

$$\lim \int_0^1 f_n u\,dx = \int_0^1 f u\,dx.$$

Pertanto K, controimmagine di un chiuso, è chiuso. La convessità è immediata dalla linearità di T. Proviamo ora che se $\|f\|_\infty \leq 1$ si ha che $f \notin K$. Infatti si ha $f(x)u(x) \leq 1$ per ogni x e, dovendo essere $T(f) = 1$, si dovrà avere $f(x) = 1$ per quasi ogni $x \in [0, 1/2]$ e $-f(x) = 1$ per quasi ogni $x \in [1/2, 1]$. Poiché f è continua si avrà $f(x) = 1$ per ogni $x \in [0, 1/2]$, e $f(x) = -1$ per ogni $x \in [1/2, 0]$, il che è impossibile perché ciò contraddice la continuità di f in $1/2$. Poniamo ora $d = \inf\{\|f\|_\infty : f \in K\}$ e proviamo che $d = 1$. Sia $\alpha > 1$, $\varepsilon = (\alpha - 1)/\alpha$. Risulta $0 < \varepsilon < 1/2$. Definiamo la funzione $f_\alpha(x) = \alpha$ se $0 \leq x \leq 1/2 - \varepsilon$, $f_\alpha(x) = -\alpha$ se $1/2 + \varepsilon \leq x \leq 1$ e $f_\alpha(x) = -(\alpha/\varepsilon)(x - 1/2)$ se $|x - 1/2| \leq \varepsilon$. Si ha che f_α in K per ogni $\alpha > 1$ e $\|f\|_\infty = \alpha$. Da cui $d = 1$ ma 1 non è il minimo delle norme degli elementi di K.