Didattica di supporto
Corso di Analisi C

Antonio Marigonda*

6 dicembre 2006

1 Esercizi sulle serie di Fourier

Esercizio 1.

Si consideri la funzione

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad\qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Si estenda in modo opportuno f ad una funzione periodica pari g di periodo 2π ed ad una funzione periodica dispari h di periodo 2π. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di g, h. Utilizzare i risultati per dimostrare che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Svolgimento: Definiamo per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$g(x + 2k\pi) = f(|x|), \qquad\qquad h(x + 2k\pi) = f(|x|)\mathrm{sgn}(x),$$

dove $\mathrm{sgn}(x)$ indica il segno di x. Si ha che $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono periodiche di periodo 2π e sono rispettivamente pari e dispari. Esse appartengono a $L^2(\mathbb{T})$ in particolare perché continue. Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier di g, h. Stiamo considerando il sistema $\Gamma = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$ di $L^2(-\pi, \pi)$, tale sistema è ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg\, dx$$

Si ha per quanto riguarda g:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi^2}{3} \\
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \cos kx\, dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos kx\, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx\, dx
\end{aligned}$$

*Dipartimento di Matematica Università di Pavia, via Ferrata 1 - 27100 Pavia. Ufficio C23. E-mail: antonio.marigonda@unipv.it

Essendo (si integri per parti):

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos kx\,dx &= \left[\frac{\sin kx}{k}x\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}\,dx = \frac{1}{k^2}[\cos kx]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2},\\ \int_0^\pi x^2\cos kx\,dx &= \left[\frac{\sin kx}{k}x^2\right]_{x=0}^{x=\pi} - 2\int_0^\pi x\frac{\sin kx}{k}\,dx = \frac{2}{k}\left[\frac{\cos kx}{k}x\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{k^2}\int_0^\pi \cos kx\,dx\\ &= 2\frac{(-1)^k}{k^2}\pi - \frac{2}{k^2}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi} = 2\frac{(-1)^k}{k^2}\pi,\end{aligned}$$

si ha:

$$A_k = 2\frac{(-1)^k}{k^2} - 2\frac{1}{k^2} - 4\frac{(-1)^k}{k^2} = 2\frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2},$$

quindi per $k \geq 1$ si ha che $A_k = 0$ se k è dispari. Se $k = 2n$ è pari, si ha $A_k = A_{2n} - 4/k^2 = -1/n^2$. Poiché g è pari, sappiamo che i coefficienti dei termini seno debbono essere tutti nulli quindi $B_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.
Si ha la seguente serie di Fourier (ricordando che il primo elemento del sistema ortonormale è $\sqrt{2}/2$):

$$g(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + ...\right)$$

Il quadrato della norma $L^2(\mathbb{T})$ di g è dato da:

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)^2\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2x^2 - 2\pi x^3 + x^4) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{3} - 2\frac{\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}\end{aligned}$$

Per Parseval si ha che $\|g\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{i=0}^{+\infty} |A_i|^2$. Ricordando che $A_i = 0$ per i dispari e $A_{2n} = -1/n^2$, $n > 0$, si ottiene:

$$\frac{\pi^4}{15} = |A_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |A_{2n}|^2 = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

da cui l'asserto per quanto riguarda la prima serie.

Per quanto riguarda h si ha $A_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ perché h è dispari. Calcoliamo i coefficienti B_k:

$$\begin{aligned}B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\,dx\\ &= 2\int_0^\pi x\sin kx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx\end{aligned}$$

Essendo poi (integrando per parti e ricordando i risultati già ottenuti):

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin kx\,dx &= \left[-\frac{\cos kx}{k}x\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{k^2}[\sin kx]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi(-1)^{k+1}}{k},\\ \int_0^\pi x^2\sin kx\,dx &= \left[-\frac{\cos kx}{k}x^2\right]_{x=0}^{x=\pi} + 2\int_0^\pi x\frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + \frac{2}{k}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

si ha:

$$B_k = 2\frac{\pi(-1)^{k+1}}{k} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + 2\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^3} + \frac{1}{k^3}\right)$$

Pertanto si ha $B_k = 0$ per k pari, e per k dispari si ha $B_k = B_{2n+1} = 8/(\pi k^3) = (n+1/2)^{-3}/\pi$, da cui:

$$h(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + ...\right)$$

Il quadrato della norma $L^2(\mathbb{T})$ di h (ricordando i risultati già ottenuti) è dato da:

$$\|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)^2\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Per Parseval:

$$\|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{i=1}^{+\infty} |B_i|^2$$

Ricordando che $B_i = 0$ per i pari e $B_{2n+1} = 8/(\pi(2n+1)^3)$, $n \in \mathbb{N}$) si ottiene:

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{n=0}^{+\infty} |B_{2n+1}|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(n+1/2)^6}$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^6}.$$

Da cui,

$$\left(1 - \frac{1}{64}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960},$$

segue il risultato richiesto per la seconda serie. □

Esercizio 2.

Dopo aver esteso in modo opportuno la funzione $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ ad una funzione pari g periodica di periodo 2π, e averne calcolato lo sviluppo in serie di Fourier, si provi che:

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + ... = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Svolgimento. Consideriamo il sistema di vettori linearmente indipendenti di $L^2(-\pi, \pi)$ dato da $\Gamma := \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos kx, \sin kx \, : \, k \in \mathbb{N}\}$, esso risulta ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\, dx.$$

Estendiamo f ad una funzione periodica pari $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π Ponendo $g(x + 2k\pi) = \sin |x| = \sin x \cdot \mathrm{sgn}(x)$, per $x \in [-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, dove $\mathrm{sgn}(x)$ è il segno di x. Abbiamo quindi per $k \neq 1$ e ricordando che $(-1)^{1-k} = (-1)^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\frac{\sqrt{2}}{2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \\
A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin((1+k)x) + \sin((1-k)x)]\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} - \frac{\cos((1-k)x)}{1-k}\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{k+1}\pi - 1}{k+1} + \frac{(-1)^{1-k} - 1}{k-1}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{k+1} - 1}{k+1} + \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k-1}\right] \\
&= 2\frac{(-1)^{k+1} - 1}{\pi(k^2 - 1)} = -2\frac{1 + (-1)^k}{\pi(k^2 - 1)} \\
A_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = 0
\end{aligned}$$

Pertanto abbiamo che $A_k = 0$ per k dispari, se $k = 2n$ si ha $A_{2n} = -4/\pi(4n^2 - 1) = -4[\pi(2n-1)(2n+1)]^{-1}$. Ricordando che il primo vettore del sistema ortonormale è $\sqrt{2}/2$, la serie di Fourier di g è:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + ...\right).$$

Ricordando che $\sin x$ fa parte del sistema ortonormale e che $\mathrm{sgn}^2(x) = 1$ per $x \neq 0$, la norma al quadrato di g è $\|g\|_{L^2}^2 = \langle \sin x, \sin x\rangle_{L^2} = 1$. Per Parseval si ha allora $\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i^2$, da cui

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi^2 - 8}{16},$$

come richiesto. $\square$