Didattica di supporto
Corso di Complementi di Matematica
per Scienze Applicate

Antonio Marigonda*

6 dicembre 2006

1 Alcuni richiami sulle ODE

Equazioni lineari del primo ordine omogenee.

Tali equazioni si presentano nella forma $y' + a(t)y = 0$ con $a : I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo di $\mathbb{R}$. Le soluzioni di quest'equazione costituiscono uno spazio vettoriale reale, cioè soddisfano alla seguente proprietà:

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, per ogni coppia $u(t), w(t)$ di soluzioni dell'equazione data si ha che la funzione $z(t) = \lambda u(t) + \mu w(t)$ è ancora una soluzione.

Infatti si ha:

$$z'(t) = \lambda u'(t)+\mu w'(t) = \lambda(a(t)u(t))+\mu(a(t)w(t)) = a(t)(\lambda u(t)+\mu w(t)) = a(t)z(t).$$

Data $A(t) \in \int a(t)$ primitiva di $a(t)$, moltiplicando l'equazione per $e^{A(t)}$ si ottiene $e^{A(t)}y' + e^{A(t)}a(t)y = 0$, da cui:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}y\right) = 0.$$

Quindi la quantità $e^{A(t)}y$ è costante. Posto $c = e^{A(t)}y$, si ha $y = ce^{-A(t)}$. Per cui le soluzioni sono date da: $y = ce^{-A(t)}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Si noti che per $c = 0$ è ammessa una soluzione costante identicamente nulla. Se $B(t)$ è un'altra primitiva di $a(t)$, si ha $A(t) = B(t)+k$ con $k \in \mathbb{R}$, pertanto $y = ce^{-A(t)} = ce^{-k}e^{-B(t)}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$, da cui definito $C = ce^{-k}$, si ha $y = Ce^{-B(t)}$ al variare di $C \in \mathbb{R}$. Ciò prova l'insieme delle soluzioni non dipende dalla particolare primitiva scelta, cioè che nella formula precedente la scelta di primitive differenti porta alla stessa soluzione qualora di definisca in modo opportuno la costante arbitraria $C \in \mathbb{R}$.

Equazioni lineari del primo ordine non omogenee:

*Dipartimento di Matematica Università di Pavia, via Ferrata 1 - 27100 Pavia. Ufficio C23. E-mail: antonio.marigonda@unipv.it

Tali equazioni si presentano nella forma: $y' + a(t)y = b(t)$ con $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ continue, I intervallo di $\mathbb{R}$. In questo caso le soluzioni non costituiscono più uno spazio vettoriale come in precedenza, tuttavia rimane valida la seguente proprietà:

se $u(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea $y'+a(t)y = 0$ e $w(t)$ è soluzione della non omogenea $y'+a(t)y = b(t)$, allora $z = u(t)+w(t)$ risolve $y'+a(t)y = b(t)$.

Quindi, avendo già risolto l'equazione omogenea, per trovare tutte le soluzioni di quella non omogenea basterà trovare una soluzione particolare. Sia $A(t) \in \int a(t)$ una primitiva di $a(t)$. Definiamo $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$ e cerchiamo di stabilire a quali condizioni debba sottostare $C(t)$ affinché $y(t)$ sia soluzione. Derivando si ottiene:

$$y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} + C(t)e^{-A(t)}(-a(t)) = C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)}.$$

Ricordando che $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$ e che $y' + a(t)y = b(t)$, si ha allora che $b(t) = C'(t)e^{-A(t)}$, da cui si ricava che $C'(t) = e^{A(t)}b(t)$, quindi se $C(t) \in \int e^{A(t)}b(t)$ è una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$ si ha che $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$ è soluzione. Pertanto l'insieme delle soluzioni di $y' + a(t)y = b(t)$ sarà dato da:

$$y(t) = C(t)e^{-A(t)} + ce^{-A(t)}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Come in precedenza notiamo che se al posto di $C(t)$ scegliamo un'altra primitiva di $e^{A(t)}b(t)$, l'insieme delle soluzioni non varia (basta ridefinire in modo opportuno la costante $c \in \mathbb{R}$.

Esistenza e Unicità in $\mathbb{R}$

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti (anche illimitati), sia $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Consideriamo l'equazione $y' = f(t, y)$. Supponiamo che esista $L > 0$ tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni $t \in I$, $y_1, y_2 \in J$. Allora per ogni $t_0 \in I$, $y_0 \in J$ esiste $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ tale che $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ e $\varphi(t_0) = y_0$. Inoltre se $\psi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ è un'altra funzione tale che $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$ e $\psi(t_0) = y_0$, si ha $\psi(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in I$.

Criterio per il Teorema di Esistenza e Unicità

Consideriamo l'equazione $y' = f(y)$ con $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata limitata, J intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Allora vale il teorema di esistenza e unicità.

Conseguenza dell'Unicità delle Soluzioni

Supponiamo che l'equazione $y' = f(t, y)$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Esistenza e Unicità in $I \times J$. Se $\phi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ sono soluzioni di $y' = f(t, y)$ tali che esiste $\bar{t} \in I$, $\bar{y} \in J$ per cui $\bar{y} = \psi(\bar{t}) = \phi(\bar{t})$, allora per ogni $t \in I$ si ha $\psi(t) = \phi(t)$.

Esempio: Si consideri l'equazione $y' = 3/2y^{1/3}$. Tale equazione non soddisfa le ipotesi del Teorema in ogni intorno di 0 (la funzione $y \mapsto y^{1/3}$ non è derivabile con derivata continua in un intorno di 0). Questa equazione ammette infatti la soluzione identicamente nulla $y_1(t) \equiv 0$, e la soluzione $y_2(t) = t^{3/2}$ che assumono entrambe valore 0 per $t = 0$.

Equazioni di Bernoulli:

Si presentano in forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con p, q continue, $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0, 1$. Si pone $y^{1-n} = z$ ottenendo l'equazione lineare $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$. Ad ogni integrale di questa corrisponde l'integrale ottenuto invertendo la relazione $y^{1-n} = z$ (nel caso di n intero, attenzione alla differenza tra n pari e n dispari). Se $n > 0$ vi è anche l'integrale $y = 0$.

2 Problema di Cauchy per ODE lineari I ordine

Sia $I = [0, T]$ intervallo di $\mathbb{R}$. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + a(t)y &= b(t) \\ y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

dove $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ sono funzioni continue.

Scegliamo le seguenti primitive:

$$A(t) := \int_0^t a(s)\, ds, \qquad B(t) := \int_0^t e^{-A(s)} b(s)\, ds$$

Esse sono caratterizzate dall'avere la proprietà $A(0) = B(0) = 0$. A questo punto la generica soluzione dell'equazione ha la forma:

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}B(t),$$

Per soddisfare il dato iniziale $y(0) = y_0$, si dovrà avere quindi $c = y_0$. Quindi la funzione

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)}B(t)$$

è soluzione del problema di Cauchy e, per il Teorema di esistenza e unicità, essa è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

3 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni:

1) $y' + y \tan x = \sin 2x$, 2) $y' + y = \sin x$, 3) $y' + \frac{1}{\sin x} y = \frac{1}{y}$.
4) $y' - 2y \tan x = 2\sqrt{y}$, 5) $y' - \frac{x}{1+x^2} y = e^{-x} y^3$
6) $y' + y\frac{1}{\tan x} = \frac{x}{\sin x}$, 7) $y' = xy + x^3y^2$ 8) $y' + y = x^2y^2$, 9) $y' = \cos x \cdot \sqrt{y-1}$
10) $y' = y^{2/3}$ e determinare le soluzioni soddisfacenti $y(1) = 0$.

Soluzioni:

1. Come prima cosa studiamo l'equazione omogenea $y'+y\tan x = 0$, abbiamo quindi $a(x) = \tan x$. Dobbiamo pertanto calcolare una primitiva di $\tan x$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, si ha che una primitiva di $\tan x$ è data da:

$$A(x) = \int_0^x \tan t \, dt = -\int_0^x \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt = -\ln(\cos x),$$

(osservando che l'integrando è della forma $(f'(t)/f(t)$ se $f(t) = \cos t)$. Pertanto le soluzioni dell'omogenea sono date da $v(x) = ce^{-A(x)} = c\cos(x)$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una primitiva $C(x)$ di $b(x)e^{A(x)}$ dove $b(x) = \sin 2x$, cioè

$$\begin{aligned} C(t) = \int b(x)e^{A(x)} \, dx &= \int \sin(2x)e^{-\ln(\cos x)} \, dx = \int \sin(2x)e^{\ln(\frac{1}{\cos x})} \, dx \\ &= \int \frac{\sin 2x}{\cos x} \, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} \, dx = 2\int \sin x \, dx \\ &= -2\cos x + k, \; k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Poiché la scelta della primitiva è indifferente, poniamo $k = 0$, quindi $C(x) = -2\cos x$. A questo punto, la soluzione è data da

$$y(x) = v(x) + e^{-A(x)}C(x) = \cos x(c - 2\cos x), \; c \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned} y' &= -\sin x(c - 2\cos x) + 2\cos x \sin x \\ y' + y\tan x &= -\sin x(c - 2\cos x) + 2\cos x \sin x + \cos x(c - 2\cos x)\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -c\sin x + 2\cos x \sin x + 2\cos x \sin x + c\sin x - 2\sin x \cos x \\ &= 2\sin x \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

$\square$

2. Come prima cosa studiamo l'equazione omogenea $y' + y = 0$, abbiamo quindi $a(x) = 1$. Una primitiva di 1 è $A(x) = x$. Pertanto le soluzioni dell'equazione omogenea sono $v(x) = ce^{-x}$. A questo punto dobbiamo determinare una primitiva $C(x)$ di $b(t)e^{A(t)}$ dove $b(t) = \sin x$, cioè una primitiva di $\sin xe^x$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, una primitiva

è data da:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x e^t \sin t\, dt \\ &= [e^t \sin t]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x e^t \cos t\, dt \\ &= e^x \sin x - [e^t \cos t]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x e^t(-\sin t)\, dt \\ &= e^x(\sin x - \cos x) + 1 - C(x) \end{aligned}$$

dove nel secondo e terzo passaggio si è integrato per parti.
Da cui $C(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$. Poiché la scelta della primitiva è ininfluente, possiamo scegliere la primitiva $\tilde{C}(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ che differisce dall'altra per una costante. Pertanto la nostra soluzione sarà:

$$y(x) = v(x) + e^{-A(x)}\tilde{C}(x) = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x),\ c \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \\ y' + y &= -ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) = \sin x \end{aligned}$$

$\square$

3. L'equazione data è di Bernoulli con $p(x) = 1/\sin x$, $q(x) = 1$, $n = -1$. Poniamo quindi $y^{1-n} = z$, cioè $y^2 = z$. Allora si ha $z' + \frac{2z}{\sin x} = 1$. Poniamo $a(x) = \frac{2}{\sin x}$, $b(t) = 1$ e calcoliamo una primitiva di $a(t)$. Grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo, una primitiva è:

$$A(x) = \int_0^x \frac{2}{\sin t}\, dt = 2\int_0^x \frac{1}{\sin t}\, dt$$

Per calcolare questo integrale, poniamo $s = \tan(t/2)$, da cui $ds = \frac{1}{\cos^2(t/2)}\frac{1}{2}\, dt$
Allora si ha:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\int_0^x \frac{1}{\sin t}\, dt = 2\int_0^x \frac{1}{2\sin(t/2)\cos(t/2)}\, dt \\ &= 2\int_0^x \frac{1}{2\frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)}\cos^2(t/2)}\, dt = 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{s}\, ds \\ &= 2\ln(\tan(x/2)) = \ln(\tan^2(x/2)) \end{aligned}$$

Quindi $A(x) = \ln \tan^2(x/2)$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da $v(x) = ce^{-A(t)} = c\tan^{-2}(x/2)$. Determiniamo ora una primitiva di $b(x)e^{A(x)}$, cioè di $\tan^2(x/2)$.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \tan^2(t/2)\, dt = 2\int_0^{x/2} \tan^2 s\, ds = 2\int_0^{x/2} (\tan^2 s + 1 - 1)\, ds \\ &= 2\int_0^{x/2} (\tan^2 s + 1)\, ds - 2\int_0^{x/2} ds = 2\int_0^{x/2} \frac{d}{ds}(\tan s)\, ds - x \\ &= 2\tan(x/2) - x \end{aligned}$$

dove si è posto $2s = t$ e si è sfruttato il fatto che $\frac{d}{ds}\tan s = \frac{1}{\cos^2 s} = \tan^2 s + 1$. Quindi:

$$z(x) = v(x) + e^{-A(t)}C(t) = \frac{c + 2\tan(x/2) - x}{\tan^2(x/2)}$$

e $y = \pm\sqrt{z(x)}$. $\square$

4. L'equazione è di Bernoulli con $n = 1/2 > 0$, quindi ammette la soluzione costante $y \equiv 0$. Posto poi $y^{1-1/2} = z$, cioè $y = z^2$, si ha $z' - z\tan x = 1$, quindi $a(x) = -\tan x$. Una primitiva (vedi esercizio 1) è allora $A(x) = \ln\cos x$. Per cui le soluzioni dell'omogenea sono $v = ce^{-A(x)} = c/\cos x$ Dobbiamo ora calcolare una primitiva di $b(x)e^{A(x)}$ dove $b(x) = 1$, cioè una primitiva di $\cos x$, quindi $C(x) = \sin x$. Quindi si avrà:

$$z(x) = \frac{c}{\cos x} + \tan x,\ c \in \mathbb{R}$$

e $y(x) = z^2(x)$. $\square$

5. Una soluzione è $y \equiv 0$. Posto $z = y^{-2}$ si ottiene $z' + \frac{2x}{1+x^2}z = -2e^{-x}$, la cui soluzione è $z = \frac{2}{e^x(1+x^2)}(x^2 + 2x + 3 + ce^x)$, $c \in \mathbb{R}$, poi $y = \pm 1/\sqrt{z}$. $\square$

6. La soluzione è $y = \frac{x^2+c}{2\sin x}$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

7. La soluzione è $y = 1/(-x^2 + 2 + ce^{-x^2/2})$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

8. La soluzione è $y = 1/(x^2 + 2x + 2 + ce^x)$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

9. È a variabili separabili. Oppure diventa di Bernoulli posto $z = y - 1$. Si ha che $y \equiv 1$ è soluzione. Dividendo per $\sqrt{y-1}$ e integrando si ottiene $2\sqrt{y-1} = \sin x + C$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

10. $y \equiv 0$ è soluzione, le altre si ottengono ponendo $y = (x + c)^3/27$. La condizione iniziale è verificata sia da $y \equiv 0$ che ponendo $c = -1$. $\square$