In $\mathbb{R}^N$ abbiamo considerato la misura esterna

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

A sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ unioni numerabili di intervalli

e già controllato che

$$\mu^*(I) = |I| \quad \forall\, I \text{ intervallo di } \mathbb{R}^N.$$

<u>Proposizione 1</u>. Per $\delta > 0$ fissato e per $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha che

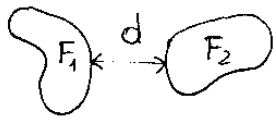
$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ \operatorname{diam}(I_n) \leq \delta \ \ \forall n \right\}.$$

<u>Dim</u>. Per ogni unione numerabile di intervalli qualunque possiamo trovarne un'altra con intervalli con diametro $\leq \delta$ che mi da la stessa somma della serie.

<u>Proposizione 2</u>. Se $F_1, \dots, F_n$ sono insiemi chiusi e limitati, $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j$, si ha $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(F_i)$.

<u>Dim.</u> Se $n = 2$, poniamo

$$d = \operatorname{dist}(F_1, F_2)$$



$\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $\{I_n\}$ con

$$F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad |I_n| \leq \frac{d}{2} \ \ \forall n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \mu^*(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$$

Ora abbiamo

$$\mu^*(F_1) + \mu^*(F_2) \leq \sum_{I_n \cap F_1 \neq \emptyset} |I_n| + \sum_{I_j \cap F_2 \neq \emptyset} |I_j| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \mu^*(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$$

e da qui si conclude. Caso generale per induzione.

<u>Proposizione 3</u> $\forall$ aperto limitato G, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $F \subset G$ chiuso tale che $\mu^*(F) > \mu^*(G) - \varepsilon$.

<u>Dim.</u> Tramite un procedimento di reticolazione, G può essere rappresentato come unione di intervalli I_n a due a due disgiunti e tali che $I_n \subseteq G\ \forall n$ e $\mu^*(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$, per cui esiste $\bar{n}$ tale che $\sum_{i=1}^{\bar{n}} |I_i| > \mu^*(G) - \frac{\varepsilon}{2}$. Ora per ogni I_i fisso un intervallo $J_i \subseteq I_i$ chiuso e limitato tale che $|J_i| > |I_i| - \frac{\varepsilon}{2\bar{n}}$.

Ora $F = \bigcup_{i=1}^{\bar{n}} J_i$ è il chiuso richiesto in quanto (v. Prop. 2)

$$\mu^*(F) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} |J_i| > \sum_{i=1}^{\bar{n}} |I_i| - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^*(G) - \varepsilon .$$

<u>Proposizione 4</u> $\forall$ aperto limitato G, $\forall$ chiuso $F \subset G$

$$\mu^*(G \setminus F) = \mu^*(G) - \mu^*(F).$$

<u>Dim.</u> $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ F_1$ chiuso, con $F_1 \subseteq G \setminus F$ e

$$\mu^*(F_1) > \mu^*(G \setminus F) - \varepsilon \qquad \text{(Prop. 3)}.$$

Allora (v. Prop. 2)

$$\mu^*(F) + \mu^*(G \setminus F) < \mu^*(F) + \mu^*(F_1) + \varepsilon$$
$$= \mu^*(F \cup F_1) + \varepsilon \leq \mu^*(G) + \varepsilon$$

e dunque $\mu^*(F) + \mu^*(G \setminus F) \leq \mu^*(G)$ da cui la tesi (subadditività di $\mu^* \Rightarrow \mu^*(G) \leq \mu^*(F) + \mu^*(G \setminus F)$).

<u>Definizione</u>. Dico che $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ chiuso F_ε e aperto G_ε tali che

$$F_\varepsilon \subseteq A \subseteq G_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad \mu^*(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon .$$

<u>Oss.</u> Non abbiamo ancora detto quanto vale la misura di A!

<u>Teorema 1</u>. La famiglia degli insiemi misurabili $\mathcal{M}$ è un algebra.

<u>Dim</u>. Ovviamente $\emptyset$ (sia aperto che chiuso) è misurabile. Se $A \in \mathcal{M}$, e dunque $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq G_\varepsilon$ allora

$$\underset{\text{chiuso}}{\complement G_\varepsilon} \subseteq \complement A \subseteq \underset{\text{aperto}}{\complement F_\varepsilon}$$

e $\complement F_\varepsilon \setminus \complement G_\varepsilon = G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$!

Se ora $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, dimostriamo che $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ (il che implica anche la chiusura rispetto all'unione e dunque la tesi). Per $\varepsilon > 0$ fissato siano F_1, F_2 chiusi e G_1, G_2 aperti con

$$F_i \subseteq A_i \subseteq G_i \quad \text{e} \quad \mu^*(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1,2$$

Allora $F = F_1 \cap F_2 \subseteq A = A_1 \cap A_2 \subseteq G = G_1 \cap G_2$ e

$$G \setminus F \subseteq (G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)$$

da cui $\mu^*(G \setminus F) \leq \mu^*(G_1 \setminus F_1) + \mu^*(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon$

<u>Proposizione 5</u> Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è limitato, allora

$$A \in \mathcal{M} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \text{ chiuso con } F_\varepsilon \subseteq A \text{ tale che } \mu^*(F_\varepsilon) > \mu^*(A) - \varepsilon$$

<u>Dim</u>. $\Rightarrow$ scende dalla def. $\mu^*(G_\varepsilon) \leq \mu^*(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) + \mu^*(F_\varepsilon) < \varepsilon + \mu^*(F_\varepsilon)$.

$\Leftarrow$ esiste successione $\{I_n\}$ con I_n aperti e tali che $\operatorname{diam}(I_n) \leq 1$ con $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \mu^*(A) + \varepsilon$. Prendo come G_ε l'unione degli I_n la cui intersezione con A non è vuota. E dunque G_ε è limitato e $\mu^*(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu^*(G_\varepsilon) - \mu^*(F_\varepsilon)$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \mu^*(F_\varepsilon) < \mu^*(A) + \varepsilon - \mu^*(F_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

<u>Teorema 2</u>. La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili è una σ-algebra. Inoltre μ^* è σ-additiva su $\mathcal{M}$.

<u>Dim.</u> Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j$.

Supponiamo inoltre $\exists\, I$ intervallo limitato tale che $A_n \subseteq I \ \forall n$.

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists\, F_n \subseteq A_n$ chiusi con $\mu^*(F_n) > \mu^*(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Siccome $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ per subadditività di μ^*, fisso $k \in \mathbb{N}$ con $\sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) > \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \frac{\varepsilon}{2}$

e $F = \bigcup_{n=1}^{k} F_n$. F_n sono chiusi e disgiunti per cui applico Prop. 2

$$\mu^*(F) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F_n) > \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$> \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \varepsilon$$

e concludo con Prop. 5 per la misurabilità di $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) < \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F_n) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e questo vale per ogni intero k, per cui deduco che

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ora rimuoviamo la condizione di limitatezza dell'insieme unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Introduciamo

una successione $\{I_j\}$ di intervalli limitati, $I_j \cap I_k = \emptyset$ $\forall j \neq k$, tali che $\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ e ogni limitato sia ricoperto da un numero finito di $\{I_j\}$. Allora definiti

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap I_j) \quad , \quad j \in \mathbb{N},$$

i B_j sono misurabili per prima parte dimostrazione.
Inoltre $B_j \cap B_k = \emptyset$ $\forall j \neq k$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Per $\varepsilon > 0$ fissato esistono F_j chiuso, G_j aperto, $F_j \subseteq B_j \subseteq G_j$, $\mu^*(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Proviamo che $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ è chiuso: se $\{x_n\} \subseteq F$ converge, allora è limitata e dunque sta in un numero finito di F_j, per cui il limite appartiene a uno di questi. Dunque F è chiuso.
D'altra parte, $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$ è aperto ed essendo

$$F \subseteq A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq G,$$

$$G \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F_j),$$

$$\mu^*(G \setminus F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(G_j \setminus F_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Dunque A è misurabile. Ora notiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j)$$

dove abbiamo usato la prima parte della dimostrazione
Inoltre, per $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} \mu^*(B_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(F_j) + \sum_{j=1}^{n} \mu^*(G_j \setminus F_j) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) + \varepsilon$$

$$\leq \mu^*\left(A \equiv \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) + \varepsilon.$$

Si passa al limite per $n \to \infty$ ottenendo $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) \leq \mu^*(A$

Raccogliendo le disuguaglianze precedenti

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) \leq \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

concludiamo con uguaglianze dappertutto.

Sia ora $\{A_i\}$ una successione qualunque di insiemi misurabili: introduciamo

$$A'_1 = A_1, \quad A'_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right), \quad n > 1;$$

gli A'_n sono tutti insiemi misurabili (perché $\mathcal{M}$ è un'algebra) e a due a due disgiunti, inoltre la loro unione coincide con

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

che è dunque misurabile. $\square$

Dunque $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura. Definiamo lo spazio di misura $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}, \mu)$ con

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

che viene detta <u>misura di Lebesgue</u> su $\mathbb{R}^N$.

Se ora $\mathcal{B}$ è la σ-algebra dei borelliani (generata dagli aperti di $\mathbb{R}^N$), si ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Vale comunque il

<u>Teorema 3</u>. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile se e solo se A può essere rappresentato come

- unione numerabile di chiusi e di insieme trascurabile

o come

- intersezione numerabile di aperti meno un trascurabile.

Dim. Vediamo dapprima che aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. Dalle Proposizioni 5 e 3 consegue che tutti gli aperti limitati sono misurabili. Allora, per la σ-additività di $\mathcal{M}$, ogni insieme aperto A è misurabile: lo si può controllare per continuità operando sugli insiemi $A \cap I_n$, dove $\{I_n\}$ è una successione di intervalli aperti e limitati che invade $\mathbb{R}^N$.

Allora anche tutti i chiusi, in quanto complementari di aperti, sono misurabili. Pertanto risulta controllato che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, cioè tutti i borelliani di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili.

Sia ora B un insieme tale che $\mu^*(B) = 0$. Allora possiamo ricoprire B con una successione $\{I_n\}$ di intervalli limitati tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, a partire da questi, costruire intervalli aperti $I'_n \supseteq I_n$ e tali che $|I'_n| \leq |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$: ora $B \subseteq G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$ e anche $F = \emptyset \subseteq B$, con

$$\mu^*(G \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n| < \varepsilon,$$

pertanto B è misurabile e $\mu(B) = 0$.

Risulta così dimostrato il "se" dell'enunciato perchè un insieme della tipologia indicata è senzaltro misurabile.

Passiamo ora a controllare il viceversa.

Se A è misurabile, allora

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ F_n$ chiuso, G_n aperto con $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ e

$$\mu^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}.$$

Se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, noto che $N = A \setminus F$ è trascurabile in quanto $\mu(N) = \mu^*(N) \leq \mu^*(G_n \setminus F_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dunque $A = F \cup N$.
Inoltre

$$\mathcal{C}A = \mathcal{C}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap \mathcal{C}N = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}F_n\right) \setminus N. \qquad \square$$

<u>Oss.</u> $\mathcal{M}$ è dunque la σ-algebra generata da $\mathcal{B}$ e dalla famiglia degli insiemi trascurabili.

<u>Proposizione 6</u>. Vale la seguente proprietà

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G),\ G \text{ aperto e } G \supseteq A\} \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Se inoltre $A \in \mathcal{M}$, allora

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \sup\{\mu(F),\ F \text{ chiuso, limitato e } F \subseteq A\}.$$

<u>Dim</u>. La prima è una conseguenza della rappresentabilità di un aperto tramite intervalli. Fissato ora $\varepsilon > 0$ e posto $A_n = A \cap (-n, n)^N$, per A misurabile abbiamo

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n);$$

se $\mu(A) < +\infty$ esiste n tale che $\mu(A_n) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$.
Se invece $\mu(A) = +\infty$, esiste n con $\mu(A_n) > \varepsilon$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$.
pertanto $\mu(F) > \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$