16

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h)-f(t)\|^p \, dt \leq h^{p-1} \int_{T-h}^{T} W(t)\, dt \leq h^p W(T) = h^p \left\|\frac{d}{dt} v_{f_1}\right\|_{L^p}^p .$$

L'implication ii) $\Longrightarrow$ iii) se démontre de manière identique à l'implication ii) $\Longrightarrow$ iii) de la proposition A.5.

Enfin pour prouver que iii) $\Longrightarrow$ i) on considère la suite f_n des régularisés de f. Grâce au lemme A.3, on a comme dans la démonstration de la proposition A.5 $\left[\int_{\frac{1}{n}}^{T-\frac{1}{n}} \left\|\frac{df_n}{dt}(t)\right\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq C$.

Posons $\gamma_n(t) = \begin{cases} \left\|\frac{df_n}{dt}(t)\right\| & \text{si } \frac{1}{n}<t<T-\frac{1}{n} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$. On a alors

$\|f_n(t)-f_n(s)\| \leq \int_s^t \gamma_n(\tau)\, d\tau$ pour $\frac{1}{n}\leq s\leq t\leq T-\frac{1}{n}$. Comme γ_n est borné dans L^p, il existe $n_k \longrightarrow +\infty$ tel que $\gamma_{n_k} \longrightarrow \gamma$ faiblement pour $\sigma(L^p(0,T;\mathbb{R}),L^{p'}(0,T;\mathbb{R}))$ et $\|\gamma\|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \leq C$.

Alors pour $s,t\in A$, $s<t$ on a

$$\|f(t)-f(s)\| \leq \int_s^t \gamma(\tau)\, d\tau .$$

On achève la démonstration en considérant $f_1(t) = \lim\limits_{\substack{s\in A\\ s\to t}} f(s)$.

4. <u>Compléments divers</u>.

<u>Lemme A.4</u>. (Gronwall-Bellman). <u>Soit</u> $m\in L^1(0,T;\mathbb{R})$ <u>tel que</u> $m\geq 0$ p.p. <u>sur</u> $]0,T[$ <u>et soit</u> a <u>une constante</u> ≥ 0.

<u>Soit</u> ϕ <u>une fonction continue de</u> $[0,T]$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>vérifiant</u> $\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\, \phi(s)\, ds$ <u>pour tout</u> $t\in[0,T]$. <u>Alors</u>

$\phi(t) \leq a\, e^{\int_0^t m(s)ds}$ <u>pour tout</u> $t\in[0,T]$.

En effet soit $\psi(t) = a + \int_0^t m(s)\, \phi(s)\, ds$; la fonction ψ est absolument continue et on a $\frac{d\psi}{dt}(t) = m(t)\, \phi(t) \leq m(t)\, \psi(t)$ p.p. sur $]0,T[$. Donc $\frac{d}{dt}\left(\psi(t)\, e^{-\int_0^t m(s)ds}\right) \leq 0$ p.p. sur $]0,T[$, et comme la

fonction $t \longmapsto \psi(t)\, e^{\int_0^t m(s)ds}$ est absolument continue, elle est décroissante. Par suite $\psi(t)\, e^{-\int_0^t m(s)ds} \leq \psi(0) = a$; il en résulte que $\phi(t) \leq \psi(t) \leq a\, e^{\int_0^t m(s)ds}$.

<u>Lemme A.5. Soit</u> $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ <u>tel que</u> $m \geq 0$ <u>p.p. sur</u> $]0,T[$ <u>et soit</u> a <u>une constante</u> ≥ 0.

<u>Soit</u> ϕ <u>une fonction continue de</u> $[0,T]$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>vérifiant</u> $\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\,\phi(s)\,ds$ <u>pour tout</u> $t \in [0,T]$.

<u>Alors</u> $|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)\,ds$ <u>pour tout</u> $t \in [0,T]$.

En effet soit $\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(a+\varepsilon)^2 + \int_0^t m(s)\,\phi(s)\,ds$, $\varepsilon > 0$; donc $\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) = m(t)\,\phi(t)$ p.p. sur $]0,T[$ et $\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \psi_0(t) \leq \psi_\varepsilon(t)$ pour $t \in [0,T]$. Il en résulte que $\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) \leq m(t)\sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}$. On a $\psi_\varepsilon(t) \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2$ pour tout $t \in [0,T]$; de sorte que la fonction $t \longmapsto \sqrt{\psi_\varepsilon(t)}$ est absolument continue et $\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} = \frac{1}{2\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}}\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t)$ p.p. sur $]0,T[$. Par suite $\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$ p.p. sur $]0,T[$ et $\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{\psi_\varepsilon(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t m(s)\,ds$.

On en déduit que

$$|\phi(t)| \leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{2\,\psi_\varepsilon(0)} + \int_0^t m(s)\,ds = a + \varepsilon + \int_0^t m(s)\,ds$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\varepsilon > 0$.

<u>Lemme A.6. Soit</u> u <u>une fonction de</u> $[t_0,T]$ <u>dans un espace de Banach</u> X. <u>On suppose que les fonctions</u> $t \longmapsto u(t)$ <u>et</u> $t \longmapsto \|u(t)\|$ <u>sont dérivables à droite en</u> t_0.

<u>Alors</u>

$$\frac{d^+}{dt}\|u(t_0)\| + \alpha\|u(t_0)\| \leq \left\|\frac{d^+u}{dt}(t_0) + \alpha u(t_0)\right\| \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

En effet, soit $h > 0$; on a

En effet, on peut toujours supposer que $0 \in D(A)$. Soit H_0 l'espace engendré par $D(A)$ et soit $A_0 = A \cap (H_0 \times H_0)$. A_0 est maximal monotone dans H_0 et l'intérieur de conv $D(A_0)$ relativement à H_0 n'est pas vide. Il en résulte, d'après la proposition 2.9, que $\mathrm{Int}_{H_0} D(A_0) \neq \emptyset$. Enfin $S(t)$ coincide avec le semi groupe engendré par $-A_0$ sur $\overline{D(A_0)}$.

REMARQUE 3.5.

Lorsque A est un opérateur linéaire maximal monotone, la propriété $S(t)\,\overline{D(A)} \subset D(A)$ $\forall t > 0$ permet de conclure que la fonction $t \mapsto S(t)u_0$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$. Si on a de plus une estimation de la forme

$$|AS(t)u_0| \leq \frac{C}{t}\,|u_0| \qquad \forall u_0 \in \overline{D(A)}\ ,\ \forall t > 0$$

la fonction $t \mapsto S(t)u_0$ peut être prolongée à un secteur du plan complexe en une fonction analytique ; on dit alors que $S(t)$ est un semi groupe analytique. Il n'en est pas de même dans le cas non linéaire. A l'aide du théorème 3.2. (ou 3.3.) on peut construire aisément des exemples de semi groupes vérifiant $S(t)\,\overline{D(A)} \subset D(A)$ $\forall t > 0$ et tels que $t \mapsto S(t)u_0$ ne soit pas de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

2 - RESOLUTION DE L'EQUATION $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$; NOTION DE SOLUTION FAIBLE

DEFINITION 3.1.

Soient A un opérateur de H et $f \in L^1(0,T;H)$. On appelle solution forte de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ toute fonction $u \in C([0,T]; H)$, absolument continue sur tout compact de $]0,T[$ (et donc d'après le corollaire A.2 de l'appendice, u est dérivable p.p. sur $]0,T[$), vérifiant $u(t) \in D(A)$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ p.p. sur $]0,T[$.

On dit que $u \in C([0,T]; H)$ est solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ s'il existe des suites $f_n \in L^1(0,T;H)$ et $u_n \in C([0,T];H)$ telles que u_n soit une solution forte de l'équation $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;H)$ et $u_n \to u$ uniformément sur $[0,T]$.

Dégageons d'abord quelques estimations élémentaires

LEMME 3.1.

Soient A un opérateur monotone, f et $g \in L^1(0,T;H)$, u et v des solutions faibles des équations $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ et $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$. On a

$$|u(t)-v(t)| \leq |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(\sigma)-g(\sigma)|\,d\sigma \qquad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \tag{26}$$

(27) $(u(t)-u(s),u(s)-x) \leq \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 \leq \int_s^t (f(\sigma)-y, u(\sigma)-x)d\sigma$

Ces estimations étant stables par passage à la limite dans $C([0,T],H) \times L^1(0,T,H)$, on peut supposer que u et v sont des solutions

$\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$
$\forall [x,y] \in A$

fortes. On a alors, grâce à la monotonie de A, p.p. sur $]0,T[$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|^2 = (\frac{du}{dt}(t)-\frac{dv}{dt}(t),u(t)-v(t)) \leq (f(t)-g(t),u(t)-v(t)).$$

Puisque $|u(t)-v(t)|^2$ est absolument continu sur tout compact de $]0,T[$ et continu sur $[0,T]$, on a, en intégrant sur $]s,t[$

$$(28)\quad \frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2 \leq \int_s^t (f(\sigma)-g(\sigma),u(\sigma)-v(\sigma))d\sigma$$

D'où l'on déduit (28) grâce au lemme A.5 de l'appendice. La seconde inégalité de (27) est obtenue en prenant dans (28) $g = y$ et $v = x$. La vérification de la première inégalité de (27) est immédiate.

THEOREME 3.4.

Soit A un opérateur maximal monotone de H. Pour tout $f \in L^1(0,T;H)$ et tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une solution faible unique u de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ telle que $u(0) = u_0$.

L'unicité résulte directement de (28). Démontrons l'existence. Supposons d'abord que $u_0 \in D(A)$ et que f est une fonction en escalier définie sur la subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T$ par $f = y_i$ sur $[a_{i-1}, a_i[$. Désignons par $S_i(t)$ le semi groupe engendré par l'opérateur maximal monotone $-(A-y_i)$. Définissons $u(t)$ par $u(0) = u_0$ et $u(t) = S_i(t-a_{i-1})\, u(a_{i-1})$ pour $t \in [a_{i-1},a_i]$. Il est clair, d'après le théorème 3.1 que u est solution forte de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

Considérons maintenant le cas où $u_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1(0,T;H)$. Il existe une suite f_n de fonctions en escalier sur $[0,T]$ telle que $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;H)$ et une suite $u_{0n} \in D(A)$ telle que $u_{0n} \to u_0$ dans H. Soit u_n la solution forte de l'équation $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ telle que $u_n(0) = u_{0n}$. Grâce à (26), on a

$$|u_n(t)-u_m(t)| \leq |u_{0n}-u_{0m}| + \int_0^t |f_n(\sigma)-f_m(\sigma)|d\sigma \qquad \forall t \in [0,T]$$

Donc, u_n converge uniformément vers une fonction continue u telle que $u(0) = u_0$ et qui est solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ (par définition I).

REMARQUE 3.6.

Soit A maximal monotone et soit $u_0 \in \overline{D(A)}$ fixé ; l'opérateur qui à $f \in L^2(0,T;H)$ fait correspondre la solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$, est maximal monotone dans $L^2(0,T;H)$. En effet d'après (28) il est monotone ; de plus il est partout défini et continu grâce à (28).

In queste condizioni A è emicontinuo, dunque massimale monotono.

La propriété suivante est fondamentale dans l'étude des solutions faibles.

THEOREME 3.5.

Soient A un opérateur maximal monotone, $f \in L^1(0,T;H)$ et $u \in C([0,T];H)$ une solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Soit $t_0 \in [0,T[$ un point de Lebesgue à droite de f (resp. $t_0 \in]0,T[$ un point de Lebesgue de f) ; on pose $f(t_0+0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s)ds$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $u(t_0) \in D(A)$.

(ii) $\liminf_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}|u(t_0+h)-u(t_0)| < +\infty$ (resp. $\liminf_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}|u(t_0+h)-u(t_0)| < +\infty$)

(iii) *u est dérivable à droite en t_0*

Dans ce cas $\frac{d^+u}{dt}(t_0) = (f(t_0+0)-Au(t_0))^\circ = f(t_0+0)-\mathrm{Proj}_{Au(t_0)} f(t_0+0)$

On utilisera dans la démonstration le lemme suivant

LEMME 3.2.

Soient A un opérateur maximal monotone, $f \in L^1(0,T;H)$ et $u \in C([0,T];H)$ une solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. Soit t_n une suite de $[0,T]$ telle que $t_n \to t_0$, $t_n \neq t_0$,

$$\frac{u(t_n)-u(t_0)}{t_n-t_0} \to \alpha, \quad \frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n} f(s)ds \to \beta \quad \text{et} \quad \frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n}|f(s)|ds$$

soit borné.

Alors $u(t_0) \in D(A)$ et $\beta - \alpha \in Au(t_0)$.

Equivalenza tra le proprietà

(1) u è soluzione forte dell'equazione $\frac{du}{dt} + Au \ni f$

(2) u è soluzione debole ed è assolutamente continua su tutti i compatti di $(0,T)$;

(3) u verifica

$$(u(t)-u(s), u(s)-x) \leq \int_s^t \left(f(\sigma)-y, u(\sigma)-x\right) d\sigma$$

$$\forall\ (x,y) \in A,\ \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$$

ed è ass. continua su tutti i compatti di $(0,T)$.

Condizioni sufficienti ad avere una soluzione forte?

$$\left.\begin{array}{l} u_0 \in D(A) \\ f \in VB(0,T;H) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} u \text{ è lipschitziana su } [0,T] \\ \text{cioè } u \in W^{1,\infty}(0,T;H) \end{array}$$

N.B. in particolare vale per $f \in W^{1,1}(0,T;H)$

* cioè f è a variazione limitata da $[0,T]$ in H.

Effetto regolarizzante se $A = \partial\varphi$,
con φ convessa propria s.c.i.

2. Smoothing effect on initial data

Abbiamo una soluzione forte in condizioni più generali su u_0 ed f.

Recall that $A = \partial\varphi$ is maximal monotone in $H \times H$ and $\overline{D(A)} = \overline{D(\varphi)}$. Consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni f, \ 0 < t < T \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

The main result is

THEOREM 2.1. *Let f be given in $L^2(0, T; H)$ and $u_0 \in \overline{D(A)}$. Then problem (2.3) has a unique solution $u \in C(0, T; H)$ which satisfies*

$$u \in W^{1,2}(\delta, T; H) \text{ for every } 0 < \delta < T. \tag{2.4}$$

$$u(t) \in D(A), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[. \tag{2.5}$$

$$\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H), \ \varphi(u) \in L^1(0, T). \tag{2.6}$$

Hence, it is a strong solution.

Moreover, if $u_0 \in D(\varphi)$ then

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H), \ \varphi(u) \in L^\infty(0, T). \tag{2.7}$$

In order to prove Theorem 2.1 we need the following lemma which also is of interest for other problems.

LEMMA 2.1. *Let $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ be such that $u(t) \in D(\partial\varphi)$ a.e. on $]0, T[$ and there exists $g \in L^2(0, T; H)$ such that*

$$g(t) \in \partial\varphi(u(t)), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[.$$

Then, function $t \to \varphi(u(t))$ is absolutely continuous on $[0, T]$ and the following equality holds a.e. in $(0,T)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left(h, \ \frac{du}{dt}(t)\right), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[,$$

for all $h \in \partial\varphi(u(t))$. In particular one can take $h = g(t)$.

Proof. As usual we denote by $(\partial\varphi)_\lambda$ the operator $\lambda^{-1}(1 - (1 + \lambda\partial\varphi)^{-1})$. From Theorem 2.2, in Chapter II, we have

$$(\partial\varphi)_\lambda = \partial\varphi_\lambda \text{ for all } \lambda > 0.$$

Clearly, the function $t \to \varphi_\lambda(u(t))$ is a.e. differentiable on $]0, T[$ and by definition,

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda(u(t)) = \left((\partial\varphi)_\lambda u(t), \ \frac{du}{dt}(t)\right), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[.$$

Note that $|(\partial\varphi)_\lambda u(t)| \leq |(\partial\varphi)^0 u(t)| \leq |g(t)|$
and $(\partial\varphi)_\lambda(u(t)) \longrightarrow (\partial\varphi)^0(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$, whence
$(\partial\varphi)_\lambda(u) \longrightarrow (\partial\varphi)^0(u)$ in $L^2(0,T;H)$ by the Lebesgue dominated convergence theorem.

Consequently,

$$\varphi_\lambda(u(t)) - \varphi_\lambda(u(s)) = \int_s^t \left((\partial\varphi)_\lambda u(\tau),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}(\tau) \right) \mathrm{d}\tau;\ s, t \in]0, T[.$$

Passing to the limit $\lambda \to 0$, yields

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u(s)) = \int_s^t \left((\partial\varphi)^0 u(\tau),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}(\tau) \right) \mathrm{d}\tau$$

which implies that the function $t \to \varphi(u(t))$ is absolutely continuous on $[0, T]$. Let $t_0 \in]0, T[$ be such that $u(t)$ and $\varphi(u(t))$ are differentiable in $t = t_0$ and $u(t_0) \in D(\partial\varphi)$. Let h be arbitrary in $\partial\varphi(u(t_0))$. We have

$$\varphi(v) - \varphi(u(t_0)) \geqslant (h, v - u(t_0)), \text{ for all } v \in H.$$

By taking $v = u(t_0 \pm \varepsilon)$ one finally obtains

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u(t_0)) = \left(h,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_0) \right)$$

$\varphi(u(t_0 \pm \varepsilon)) - \varphi(u(t_0))$
$\geqslant (h, u(t_0 \pm \varepsilon) - u(t$
now divide by $\pm\varepsilon$ and get the two inequalities.

which concludes the proof.

Proof of Theorem 2.1. Let x_0 be any element in $D(\partial\varphi)$ and let y_0 be such that $y_0 \in \partial\varphi(x_0)$. If we introduce the new function $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(x_0) - (y_0, u - x_0)$,* then Eq. (2.3) is equivalent to the equation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni f(t) - y_0.$$

Hence, we may assume without loss of generality that

$$\min\{\varphi(u);\ u \in H\} = \varphi(x_0) = 0.$$

First we shall assume that $u_0 \in D(\partial\varphi)$ and $f \in W^{1,2}(0, T; H)$, i.e., f and $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ belong to $L^2(0, T; H)$. From Theorem 2.2 in Chapter III, problem (2.3) has a unique solution $u \in C(0, T; H)$ such that $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^\infty(0, T; H)$.

We multiply Eq. 2.3 by $t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. By Lemma 2.1 we have

$$t\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|^2 + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u) = t\left(f,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[.$$

* if one takes $\bar{\varphi}(v) = \varphi(x_0 + v) - \varphi(x_0) - (y_0, v)$, then $\min\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(0) = 0$ and $\frac{dv}{dt} + \partial\bar{\varphi}(v) \ni f(t) - y_0$ with $v(0) = u_0 - x_0$

Hence

$$\int_0^T t\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t + T\varphi(u(T)) = \int_0^T t\left(f(t),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(u(t))\,\mathrm{d}t$$

therefore, also

$$\int_0^T t\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T t\,|f(t)|^2\,\mathrm{d}t + 2\int_0^T \varphi(u(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

because $\varphi(u)$ is nonnegative on H.

Next, we have

$$\varphi(u(t)) \leqslant (y(t),\ u(t) - x_0) \text{ for all } y(t) \in \partial\varphi(u(t)).$$

In other words

$$\varphi(u(t)) \leqslant \left(f(t) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t),\ u(t) - x_0\right), \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[.$$

Finally

$$\int_0^T \varphi(u(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}|u(0) - x_0|^2 + \int_0^T |f(t)|\,|u(t) - x_0|\mathrm{d}t.$$

On the other hand, by multiplying Eq. (2.3) with $u(t) - x_0$ and integrating over $]0, t[$ one gets

$$|u(t) - x_0| \leqslant |u(0) - x_0| + \int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$ (this comes from the usual estimate for weak solutions)

and therefore

$$\int_0^T \varphi(u(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \cancel{\frac{1}{4}}\left(|u(0) - x_0| + \int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2. \tag{2.9}$$

Combining estimates (2.8) and (2.9) we obtain

$$\int_0^T t\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T t\,|f(t)|^2\,\mathrm{d}t + \overset{2}{\cancel{4}}\left(|u_0 - x_0| + \int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2. \tag{2.10}$$

Now we assume that $u_0 \in D(\partial\varphi)$ and $f \in L^2(0, T; H)$. Since $D(\partial\varphi)$ is a dense subset* of $D(\varphi)$, there exists $\{x_n\} \subset D(\partial\varphi)$ such that $\lim_{n\to\infty} x_n = u_0$. Let $\{f_n\} \subset W^{1,2}(0, T; H)$ be such that $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(0, T; H)$, and denote by u_n the corresponding solutions of Eq. (2.3). By the monotonicity of $\partial\varphi$ one obtains

$\times\ \overline{D(\partial\varphi)}$

$$* \quad |u_n(t) - u_m(t)| \leqslant |x_n - x_m| + \int_0^t |f_n(s) - f_m(s)|\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$ (usual estimate)

we recall that $J_\lambda x \to x$ as $\lambda \searrow 0$ for all $x \in \overline{D(\partial\varphi)}$

- as an exercise, one can prove that the functions f_n solving the Cauchy problem $\frac{1}{n}f_n' + f_n = f$ in $(0,T)$, $f_n(0) = 0$ yields a sequence $\{f_n\}$ in the above conditions.

Hence $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ exists uniformly on $[0, T]$. Since $\lim_{n\to\infty} \frac{du_n}{dt} = \frac{du}{dt}$ in the sense of H-valued vectorial distributions on $]0, T[$, estimate (2.10) implies that $\sqrt{t}\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.*

In particular, it follows that $u(t)$ is absolutely continuous on every compact of $]0, T[$. By using a standard argument (as in the proof of Theorem 2.2 Chapter III), one deduces that u satisfies Eq. (2.3) on $]0, T[$.

Here, the procedure is a bit formal. Actually, one should reproduce the estimate on the regularized problem with $u_{0n} \in D(\partial\varphi)$ and $f_n \in W^{1,2}(0,T;H)$, then let $n \to \infty$.

Now, we assume that $u_0 \in D(\varphi)$. By using again Eq. (2.3) we get

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u) \leqslant |f|\left|\frac{du}{dt}\right|, \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[.$$

Hence

$$\frac{1}{2}\left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \leqslant \frac{1}{2}|f(t)|^2, \quad \text{a.e.} \quad t \in]0, T[,$$

which implies that the function $t \to \varphi(u(t)) - \frac{1}{2}\int_0^t |f(s)|^2\, ds$ is monotone nonincreasing over $[0, T]$. Since $u_0 \in D(\varphi)$ one deduces that

$$\varphi(u(t)) \leqslant \varphi(u_0) + \frac{1}{2}\int_0^t |f(t)|^2\, dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.11}$$

Let ε be positive and sufficiently small. From relation (2.11) we have

$$\frac{1}{2}\int_\varepsilon^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt \leqslant \varphi(u_0) + \frac{1}{2}\int_0^T |f|^2\, dt.$$

Hence $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$ and $\varphi(u) \in L^\infty(0, T)$. This completes the proof.

THEOREM 2.2. *We are given*

$$u_0 \in \overline{D(A)}, f \in W^{1,1}(0, T; H).$$

Then the solution $u(t)$ for problem (2.3) satisfies

$$u(t) \in D(\partial\varphi) \text{ for every } t \in]0, T[\tag{2.1}$$

$$\frac{d^+}{dt}u(t) + (\partial\varphi(u(t)) - f(t))^0 = 0, \quad \forall\, t \in]0, T[, \tag{2.1}$$

$$t\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H). \tag{2.1}$$

* Actually, it turns out that
$u'_n \longrightarrow u'$ weakly in $L^2(\delta,T;H)$ for all $\delta \in (0,T)$;
$\sqrt{t}\,u'_n \longrightarrow w$ weakly in $L^2(0,T;H)$
and one can check that $w = \sqrt{t}\,u'$ a.e. in $(0,T)$.